

绝密★启用前

2020 年普通高等学校招生全国统一考试（江苏卷）

数学 I

注意事项

考生在答题前请认真阅读本注意事项及各题答题要求

1. 本试卷共 4 页，均为非选择题(第 1 题~第 20 题，共 20 题)。本卷满分为 160 分，考试时间为 120 分钟。考试结束后，请将本试卷和答题卡一并交回。
2. 答题前，请务必将自己的姓名、准考证号用 0.5 毫米黑色墨水的签字笔填写在试卷及答题卡的规定位置。
3. 请认真核对监考员从答题卡上所粘贴的条形码上的姓名、准考证号与本人是否相符。
4. 作答试题，必须用 0.5 毫米黑色墨水的签字笔在答题卡上的指定位置作答，在其他位置作答一律无效。
5. 如需作图，须用 2B 铅笔绘、写清楚，线条、符号等须加黑、加粗。

参考公式：

柱体的体积 $V = Sh$ ，其中 S 是柱体的底面积， h 是柱体的高。

一、填空题：本大题共 14 小题，每小题 5 分，共计 70 分。请把答案填写在答题卡相应位置上。

1. 已知集合 $A = \{-1, 0, 1, 2\}$, $B = \{0, 2, 3\}$ ，则 $A \cap B = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

【答案】 $\{0, 2\}$

【解析】

【分析】

根据集合的交集即可计算。

【详解】 $\because A = \{-1, 0, 1, 2\}, B = \{0, 2, 3\}$

$\therefore A \cap B = \{0, 2\}$

故答案为： $\{0, 2\}$ 。

【点睛】 本题考查了交集及其运算，是基础题型。

2. 已知 i 是虚数单位，则复数 $z = (1+i)(2-i)$ 的实部是_____。

【答案】3

【解析】

【分析】

根据复数的运算法则，化简即可求得实部的值.

【详解】 $\because$ 复数 $z = (1+i)(2-i)$

$$\therefore z = 2 - i + 2i - i^2 = 3 + i$$

$\therefore$ 复数的实部为 3.

故答案为：3.

【点睛】本题考查复数的基本概念，是基础题.

3. 已知一组数据 $4, 2a, 3-a, 5, 6$ 的平均数为 4，则 a 的值是_____.

【答案】2

【解析】

【分析】

根据平均数的公式进行求解即可.

【详解】 $\because$ 数据 $4, 2a, 3-a, 5, 6$ 的平均数为 4

$$\therefore 4 + 2a + 3 - a + 5 + 6 = 20, \text{ 即 } a = 2.$$

故答案为：2.

【点睛】本题主要考查平均数的计算和应用，比较基础.

4. 将一颗质地均匀的正方体骰子先后抛掷 2 次，观察向上的点数，则点数和为 5 的概率是_____.

【答案】 $\frac{1}{9}$

【解析】

【分析】

分别求出基本事件总数，点数和为 5 的种数，再根据概率公式解答即可.

【详解】根据题意可得基本事件数总为 $6 \times 6 = 36$ 个.

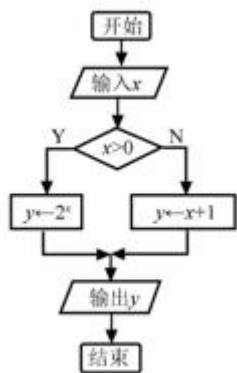
点数和为 5 的基本事件有 $(1, 4), (4, 1), (2, 3), (3, 2)$ 共 4 个.

$$\therefore \text{出现向上的点数和为 5 的概率为 } P = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}.$$

故答案为： $\frac{1}{9}$.

【点睛】 本题考查概率的求法，考查古典概型、列举法等基础知识，考查运算求解能力，是基础题.

5.如图是一个算法流程图，若输出 y 的值为 -2 ，则输入 x 的值是_____.



【答案】 -3

【解析】

【分析】

根据指数函数的性质，判断出 $y = x + 1$ ，由此求得 x 的值.

【详解】 由于 $2^x > 0$ ，所以 $y = x + 1 = -2$ ，解得 $x = -3$.

故答案为： -3

【点睛】 本小题主要考查根据程序框图输出结果求输入值，考查指数函数的性质，属于基础题.

6.在平面直角坐标系 xOy 中，若双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{5} = 1 (a > 0)$ 的一条渐近线方程为 $y = \frac{\sqrt{5}}{2}x$ ，则该双曲线的离心率是_____.

【答案】 $\frac{3}{2}$

【解析】

【分析】

根据渐近线方程求得 a ，由此求得 c ，进而求得双曲线的离心率.

【详解】 双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{5} = 1$ ，故 $b = \sqrt{5}$. 由于双曲线的一条渐近线方程为 $y = \frac{\sqrt{5}}{2}x$ ，即 $\frac{b}{a} = \frac{\sqrt{5}}{2} \Rightarrow a = 2$ ，

所以 $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{4 + 5} = 3$ ，所以双曲线的离心率为 $\frac{c}{a} = \frac{3}{2}$.

故答案为： $\frac{3}{2}$

【点睛】本小题主要考查双曲线的渐近线，考查双曲线离心率的求法，属于基础题.

7. 已知 $y=f(x)$ 是奇函数，当 $x \geq 0$ 时， $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$ ，则 $f(-8)$ 的值是_____.

【答案】 -4

【解析】

【分析】

先求 $f(8)$ ，再根据奇函数求 $f(-8)$

【详解】 $f(8) = 8^{\frac{2}{3}} = 4$ ，因为 $f(x)$ 为奇函数，所以 $f(-8) = -f(8) = -4$

故答案为：-4

【点睛】本题考查根据奇函数性质求函数值，考查基本分析求解能力，属基础题.

8. 已知 $\sin^2(\frac{\pi}{4} + \alpha) = \frac{2}{3}$ ，则 $\sin 2\alpha$ 的值是_____.

【答案】 $\frac{1}{3}$

【解析】

【分析】

直接按照两角和正弦公式展开，再平方即得结果.

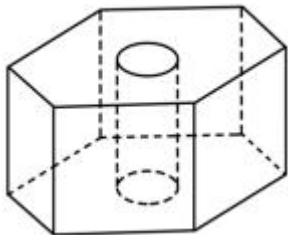
【详解】 $\because \sin^2(\frac{\pi}{4} + \alpha) = (\frac{\sqrt{2}}{2}\cos \alpha + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin \alpha)^2 = \frac{1}{2}(1 + \sin 2\alpha)$

$\therefore \frac{1}{2}(1 + \sin 2\alpha) = \frac{2}{3} \therefore \sin 2\alpha = \frac{1}{3}$

故答案为： $\frac{1}{3}$

【点睛】本题考查两角和正弦公式、二倍角正弦公式，考查基本分析求解能力，属基础题.

9. 如图，六角螺帽毛坯是由一个正六棱柱挖去一个圆柱所构成的. 已知螺帽的底面正六边形边长为 2 cm，高为 2 cm，内孔半径为 0.5 cm，则此六角螺帽毛坯的体积是_____ cm.



【答案】 $12\sqrt{3} - \frac{\pi}{2}$

【解析】

【分析】

先求正六棱柱体积，再求圆柱体积，相减得结果.

【详解】正六棱柱体积为 $6 \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times 2^2 \times 2 = 12\sqrt{3}$

圆柱体积为 $\pi \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot 2 = \frac{\pi}{2}$

所求几何体体积为 $12\sqrt{3} - \frac{\pi}{2}$

故答案为： $12\sqrt{3} - \frac{\pi}{2}$

【点睛】本题考查正六棱柱体积、圆柱体积，考查基本分析求解能力，属基础题.

10. 将函数 $y = 3\sin(2x + \frac{\pi}{4})$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度，则平移后的图象中与 y 轴最近的对称轴的方程是 _____.

【答案】 $x = -\frac{5\pi}{24}$

【解析】

【分析】

先根据图象变换得解析式，再求对称轴方程，最后确定结果.

【详解】 $y = 3\sin[2(x - \frac{\pi}{6}) + \frac{\pi}{4}] = 3\sin(2x - \frac{\pi}{12})$

$2x - \frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbb{Z}) \therefore x = \frac{7\pi}{24} + \frac{k\pi}{2} (k \in \mathbb{Z})$

当 $k = -1$ 时 $x = -\frac{5\pi}{24}$

故答案为： $x = -\frac{5\pi}{24}$

【点睛】本题考查三角函数图象变换、正弦函数对称轴，考查基本分析求解能力，属基础题.

11. 设 $\{a_n\}$ 是公差为 d 的等差数列， $\{b_n\}$ 是公比为 q 的等比数列. 已知数列 $\{a_n + b_n\}$ 的前 n 项和

$S_n = n^2 - n + 2^n - 1 (n \in \mathbb{N}^+)$ ，则 $d + q$ 的值是 _____.

【答案】 4

【解析】

【分析】

结合等差数列和等比数列前 n 项和公式的特点，分别求得 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 的公差和公比，由此求得 $d + q$.

【详解】设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d ，等比数列 $\{b_n\}$ 的公比为 q ，根据题意 $q \neq 1$ 。

等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和公式为 $P_n = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d = \frac{d}{2}n^2 + \left(a_1 - \frac{d}{2}\right)n$ ，

等比数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和公式为 $Q_n = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q} = -\frac{b_1}{1-q}q^n + \frac{b_1}{1-q}$ ，

依题意 $S_n = P_n + Q_n$ ，即 $n^2 - n + 2^n - 1 = \frac{d}{2}n^2 + \left(a_1 - \frac{d}{2}\right)n - \frac{b_1}{1-q}q^n + \frac{b_1}{1-q}$ ，

$$\text{通过对比系数可知} \begin{cases} \frac{d}{2} = 1 \\ a_1 - \frac{d}{2} = -1 \\ q = 2 \\ \frac{b_1}{1-q} = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d = 2 \\ a_1 = 0 \\ q = 2 \\ b_1 = 1 \end{cases}, \text{故 } d+q=4.$$

故答案为：4

【点睛】本小题主要考查等差数列和等比数列的前 n 项和公式，属于中档题。

12. 已知 $5x^2y^2 + y^4 = 1 (x, y \in \mathbb{R})$ ，则 $x^2 + y^2$ 的最小值是_____。

【答案】 $\frac{4}{5}$

【解析】

【分析】

根据题设条件可得 $x^2 = \frac{1-y^4}{5y^2}$ ，可得 $x^2 + y^2 = \frac{1-y^4}{5y^2} + y^2 = \frac{1}{5y^2} + \frac{4y^2}{5}$ ，利用基本不等式即可求解。

【详解】 $\because 5x^2y^2 + y^4 = 1$

$$\therefore x^2 = \frac{1-y^4}{5y^2}$$

$$\therefore x^2 + y^2 = \frac{1-y^4}{5y^2} + y^2 = \frac{1}{5y^2} + \frac{4y^2}{5} \geq 2\sqrt{\frac{1}{5y^2} \cdot \frac{4y^2}{5}} = \frac{4}{5}, \text{ 当且仅当 } \frac{1}{5y^2} = \frac{4y^2}{5}, \text{ 即 } x^2 = \frac{3}{10}, y^2 = \frac{1}{2} \text{ 时取等号.}$$

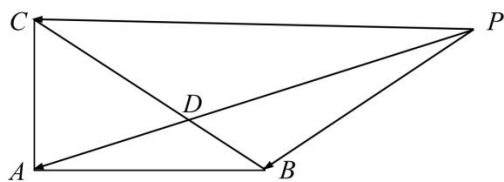
$$\therefore x^2 + y^2 \text{ 的最小值为 } \frac{4}{5}.$$

故答案为： $\frac{4}{5}$ 。

【点睛】本题考查了基本不等式在求最值中的应用.利用基本不等式求最值时,一定要正确理解和掌握“一正,二定,三相等”的内涵:一正是,首先要判断参数是否为正;二定是,其次要看和或积是否为定值(和定积最大,积定和最小);三相等是,最后一定要验证等号能否成立(主要注意两点,一是相等时参数是否在定义域内,二是多次用 $\geq$ 或 $\leq$ 时等号能否同时成立).

13.在 $\triangle ABC$ 中, $AB=4$, $AC=3$, $\angle BAC=90^\circ$, D 在边 BC 上, 延长 AD 到 P , 使得 $AP=9$, 若

$\overrightarrow{PA} = m\overrightarrow{PB} + \left(\frac{3}{2} - m\right)\overrightarrow{PC}$ (m 为常数), 则 CD 的长度是_____.



【答案】 $\frac{18}{5}$

【解析】

【分析】

根据题设条件可设 $\overrightarrow{PA} = \lambda \overrightarrow{PD}$ ($\lambda > 0$), 结合 $\overrightarrow{PA} = m\overrightarrow{PB} + \left(\frac{3}{2} - m\right)\overrightarrow{PC}$ 与 B, D, C 三点共线, 可求得 λ , 再根据勾股定理求出 BC , 然后根据余弦定理即可求解.

【详解】 $\because A, D, P$ 三点共线

$\therefore$ 可设 $\overrightarrow{PA} = \lambda \overrightarrow{PD}$ ($\lambda > 0$)

$\because \overrightarrow{PA} = m\overrightarrow{PB} + \left(\frac{3}{2} - m\right)\overrightarrow{PC}$

$\therefore \lambda \overrightarrow{PD} = m\overrightarrow{PB} + \left(\frac{3}{2} - m\right)\overrightarrow{PC}$, 即 $\overrightarrow{PD} = \frac{m}{\lambda} \overrightarrow{PB} + \frac{\left(\frac{3}{2} - m\right)}{\lambda} \overrightarrow{PC}$

$\because B, D, C$ 三点共线

$\therefore \frac{m}{\lambda} + \frac{\left(\frac{3}{2} - m\right)}{\lambda} = 1$, 即 $\lambda = \frac{3}{2}$

$\because AP = 9$

$\therefore AD = 3$

$\because AB = 4, AC = 3, \angle BAC = 90^\circ$

$\therefore BC = 5$

设 $CD = x$, $\angle CDA = \theta$, 则 $BD = 5 - x$, $\angle BDA = \pi - \theta$.

$$\therefore \text{根据余弦定理可得 } \cos \theta = \frac{AD^2 + CD^2 - AC^2}{2AD \cdot CD} = \frac{x}{6}, \quad \cos(\pi - \theta) = \frac{AD^2 + BD^2 - AB^2}{2AD \cdot BD} = \frac{(5-x)^2 - 7}{6(5-x)}$$

$$\therefore \cos \theta + \cos(\pi - \theta) = 0$$

$$\therefore \frac{x}{6} + \frac{(5-x)^2 - 7}{6(5-x)} = 0, \text{ 解得 } x = \frac{18}{5}.$$

$$\therefore CD \text{ 的长度为 } \frac{18}{5}.$$

$$\text{故答案为: } \frac{18}{5}.$$

【点睛】本题考查了平面向量知识的应用、余弦定理的应用以及求解运算能力，解答本题的关键是设出

$$\overrightarrow{PA} = \lambda \overrightarrow{PD} (\lambda > 0).$$

14. 在平面直角坐标系 xOy 中，已知 $P(\frac{\sqrt{3}}{2}, 0)$ ， A, B 是圆 $C: x^2 + (y - \frac{1}{2})^2 = 36$ 上的两个动点，满足 $PA = PB$ ，则 $\triangle PAB$ 面积的最大值是_____.

【答案】 $10\sqrt{5}$

【解析】

【分析】

根据条件得 $PC \perp AB$ ，再用圆心到直线距离表示三角形 PAB 面积，最后利用导数求最大值.

【详解】 $\because PA = PB \therefore PC \perp AB$

$$\text{设圆心 } C \text{ 到直线 } AB \text{ 距离为 } d, \text{ 则 } |AB| = 2\sqrt{36 - d^2}, |PC| = \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{1}{4}} = 1$$

$$\text{所以 } S_{\triangle PAB} \leq \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{36 - d^2} (d + 1) = \sqrt{(36 - d^2)(d + 1)^2}$$

$$\text{令 } y = (36 - d^2)(d + 1)^2 (0 \leq d < 6) \therefore y' = 2(d + 1)(-2d^2 - d + 36) = 0 \therefore d = 4 \text{ (负值舍去)}$$

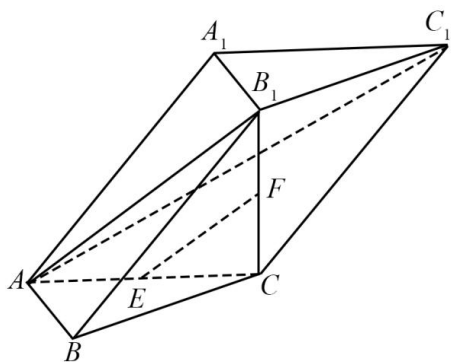
当 $0 \leq d < 4$ 时， $y' > 0$ ；当 $4 \leq d < 6$ 时， $y' \leq 0$ ，因此当 $d = 4$ 时， y 取最大值，即 $S_{\triangle PAB}$ 取最大值为 $10\sqrt{5}$ ，

故答案为： $10\sqrt{5}$

【点睛】本题考查垂径定理、利用导数求最值，考查综合分析求解能力，属中档题.

二、解答题：本大题共 6 小题，共计 90 分，请在答题卡指定区域内作答，解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15. 在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中， $AB \perp AC$ ， $B_1C \perp$ 平面 ABC ， E, F 分别是 AC, B_1C 的中点.



(1) 求证: $EF \parallel$ 平面 AB_1C_1 ;

(2) 求证: 平面 $AB_1C \perp$ 平面 ABB_1 .

【答案】(1) 证明详见解析; (2) 证明详见解析.

【解析】

【分析】

(1) 通过证明 $EF \parallel AB_1$, 来证得 $EF \parallel$ 平面 AB_1C_1 .

(2) 通过证明 $AB \perp$ 平面 AB_1C , 来证得平面 $AB_1C \perp$ 平面 ABB_1 .

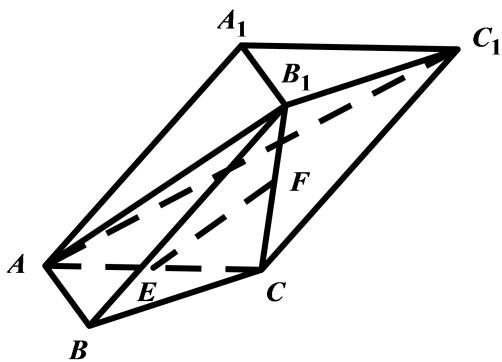
【详解】(1) 由于 E, F 分别是 AC, B_1C 的中点, 所以 $EF \parallel AB_1$.

由于 $EF \not\subset$ 平面 $AB_1C_1, AB_1 \subset$ 平面 AB_1C_1 , 所以 $EF \parallel$ 平面 AB_1C_1 .

(2) 由于 $B_1C \perp$ 平面 $ABC, AB \subset$ 平面 ABC , 所以 $B_1C \perp AB$.

由于 $AB \perp AC, AC \cap B_1C = C$, 所以 $AB \perp$ 平面 AB_1C ,

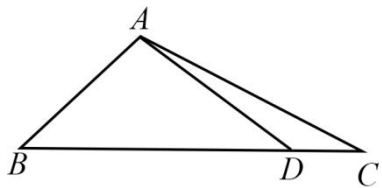
由于 $AB \subset$ 平面 ABB_1 , 所以平面 $AB_1C \perp$ 平面 ABB_1 .



【点睛】本小题主要考查线面平行的证明, 考查面面垂直的证明, 属于中档题.



16. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 已知 $a=3, c=\sqrt{2}, B=45^\circ$.



(1) 求 $\sin C$ 的值;

(2) 在边 BC 上取一点 D , 使得 $\cos \angle ADC = -\frac{4}{5}$, 求 $\tan \angle DAC$ 的值.

【答案】(1) $\sin C = \frac{\sqrt{5}}{5}$; (2) $\tan \angle DAC = \frac{2}{11}$.

【解析】

【分析】

(1) 利用余弦定理求得 b , 利用正弦定理求得 $\sin C$.

(2) 根据 $\cos \angle ADC$ 的值, 求得 $\sin \angle ADC$ 的值, 由 (1) 求得 $\cos C$ 的值, 从而求得 $\sin \angle DAC, \cos \angle DAC$ 的值, 进而求得 $\tan \angle DAC$ 的值.

【详解】(1) 由余弦定理得 $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B = 9 + 2 - 2 \times 3 \times \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 5$, 所以 $b = \sqrt{5}$.

由正弦定理得 $\frac{c}{\sin C} = \frac{b}{\sin B} \Rightarrow \sin C = \frac{c \sin B}{b} = \frac{\sqrt{5}}{5}$.

(2) 由于 $\cos \angle ADC = -\frac{4}{5}$, $\angle ADC \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, 所以 $\sin \angle ADC = \sqrt{1 - \cos^2 \angle ADC} = \frac{3}{5}$.

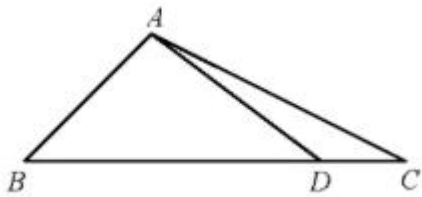
由于 $\angle ADC \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, 所以 $C \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, 所以 $\cos C = \sqrt{1 - \sin^2 C} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$.

所以 $\sin \angle DAC = \sin(\pi - \angle DAC) = \sin(\angle ADC + \angle C)$

$= \sin \angle ADC \cdot \cos C + \cos \angle ADC \cdot \sin C = \frac{3}{5} \times \frac{2\sqrt{5}}{5} + \left(-\frac{4}{5}\right) \times \frac{\sqrt{5}}{5} = \frac{2\sqrt{5}}{25}$.

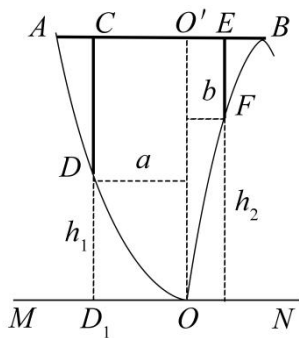
由于 $\angle DAC \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, 所以 $\cos \angle DAC = \sqrt{1 - \sin^2 \angle DAC} = \frac{11\sqrt{5}}{25}$.

所以 $\tan \angle DAC = \frac{\sin \angle DAC}{\cos \angle DAC} = \frac{2}{11}$.



【点睛】本小题主要考查正弦定理、余弦定理解三角形，考查三角恒等变换，属于中档题.

17.某地准备在山谷中建一座桥梁，桥址位置的竖直截面图如图所示：谷底 O 在水平线 MN 上、桥 AB 与 MN 平行， OO' 为铅垂线(O' 在 AB 上).经测量，左侧曲线 AO 上任一点 D 到 MN 的距离 h_1 (米)与 D 到 OO' 的距离 a (米)之间满足关系式 $h_1 = \frac{1}{40}a^2$ ；右侧曲线 BO 上任一点 F 到 MN 的距离 h_2 (米)与 F 到 OO' 的距离 b (米)之间满足关系式 $h_2 = -\frac{1}{800}b^3 + 6b$. 已知点 B 到 OO' 的距离为 40 米.



(1) 求桥 AB 的长度；

(2) 计划在谷底两侧建造平行于 OO' 的桥墩 CD 和 EF ，且 CE 为 80 米，其中 C, E 在 AB 上(不包括端点).

桥墩 EF 每米造价 k (万元)、桥墩 CD 每米造价 $\frac{3}{2}k$ (万元)($k > 0$).问 $O'E$ 为多少米时，桥墩 CD 与 EF 的总造价最低？

【答案】(1) 120 米 (2) $O'E = 20$ 米

【解析】

【分析】

(1) 根据 A,B 高度一致列方程求得结果；

(2) 根据题意列总造价的函数关系式，利用导数求最值，即得结果.

【详解】(1) 由题意得 $\frac{1}{40}|O'A|^2 = -\frac{1}{800} \times 40^3 + 6 \times 40 \therefore |O'A| = 80$

$\therefore |AB| = |O'A| + |O'B| = 80 + 40 = 120$ 米

(2) 设总造价为 $f(x)$ 万元, $|O'O| = \frac{1}{40} \times 80^2 = 160$, 设 $|O'E| = x$,

$$f(x) = k(160 + \frac{1}{800}x^3 - 6x) + \frac{3}{2}k[160 - \frac{1}{40}(80-x)^2], (0 < x < 40)$$

$$\therefore f(x) = k(160 + \frac{1}{800}x^3 - \frac{3}{80}x^2), \therefore f'(x) = k(\frac{3}{800}x^2 - \frac{6}{80}x) = 0 \therefore x = 20 \text{ (0 舍去)}$$

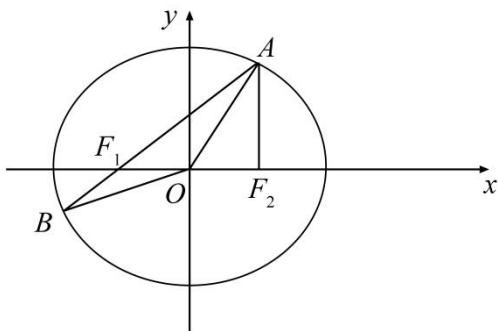
当 $0 < x < 20$ 时, $f'(x) < 0$; 当 $20 < x < 40$ 时, $f'(x) > 0$, 因此当 $x = 20$ 时, $f(x)$ 取最小值,

答: 当 $O'E = 20$ 米时, 桥墩 CD 与 EF 的总造价最低.

【点睛】 本题考查实际成本问题、利用导数求最值, 考查基本分析求解能力, 属中档题.

18. 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知椭圆 $E: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 点 A 在椭圆 E 上且在

第一象限内, $AF_2 \perp F_1F_2$, 直线 AF_1 与椭圆 E 相交于另一点 B .



(1) 求 $\triangle AF_1F_2$ 的周长;

(2) 在 x 轴上任取一点 P , 直线 AP 与椭圆 E 的右准线相交于点 Q , 求 $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{QP}$ 的最小值;

(3) 设点 M 在椭圆 E 上, 记 $\triangle OAB$ 与 $\triangle MAB$ 的面积分别为 S_1, S_2 , 若 $S_2 = 3S_1$, 求点 M 的坐标.

【答案】 (1) 6; (2) -4; (3) $M(2, 0)$ 或 $(-\frac{2}{7}, -\frac{12}{7})$.

【解析】

【分析】

(1) 根据椭圆定义可得 $AF_1 + AF_2 = 4$, 从而可求出 $\triangle AF_1F_2$ 的周长;

(2) 设 $P(x_0, 0)$, 根据点 A 在椭圆 E 上, 且在第一象限, $AF_2 \perp F_1F_2$, 求出 $A(1, \frac{3}{2})$, 根据准线方程得 Q 点坐标, 再根据向量坐标公式, 结合二次函数性质即可出最小值;

(3) 设出 $M(x_1, y_1)$, 点 M 到直线 AB 的距离为 d , 由点 O 到直线 AB 的距离与 $S_2 = 3S_1$, 可推出 $d = \frac{9}{5}$,

根据点到直线的距离公式，以及 $M(x_1, y_1)$ 满足椭圆方程，解方程组即可求得坐标.

【详解】(1) $\because$ 椭圆 E 的方程为 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$

$$\therefore F_1(-1, 0), F_2(1, 0)$$

由椭圆定义可得： $AF_1 + AF_2 = 4$.

$$\therefore \triangle AF_1F_2 \text{ 的周长为 } 4 + 2 = 6$$

(2) 设 $P(x_0, 0)$ ，根据题意可得 $x_0 \neq 1$.

$\because$ 点 A 在椭圆 E 上，且在第一象限， $AF_2 \perp F_1F_2$

$$\therefore A\left(1, \frac{3}{2}\right)$$

$\because$ 准线方程为 $x = 4$

$$\therefore Q(4, y_Q)$$

$$\therefore \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{QP} = (x_0, 0) \cdot (x_0 - 4, -y_Q) = (x_0 - 4)x_0 = (x_0 - 2)^2 - 4 \geq -4, \text{ 当且仅当 } x_0 = 2 \text{ 时取等号.}$$

$$\therefore \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{QP} \text{ 的最小值为 } -4.$$

(3) 设 $M(x_1, y_1)$ ，点 M 到直线 AB 的距离为 d .

$$\therefore A\left(1, \frac{3}{2}\right), F_1(-1, 0)$$

$$\therefore \text{直线 } AF_1 \text{ 的方程为 } y = \frac{3}{4}(x + 1)$$

$$\therefore \text{点 } O \text{ 到直线 } AB \text{ 的距离为 } \frac{3}{5}, S_2 = 3S_1$$

$$\therefore S_2 = 3S_1 = 3 \times \frac{1}{2} \times |AB| \times \frac{3}{5} = \frac{1}{2} |AB| \cdot d$$

$$\therefore d = \frac{9}{5}$$

$$\therefore |3x_1 - 4y_1 + 3| = 9 \quad \textcircled{1}$$

$$\therefore \frac{x_1^2}{4} + \frac{y_1^2}{3} = 1 \quad \textcircled{2}$$

$$\therefore \text{联立①②解得} \begin{cases} x_1 = 2 \\ y_1 = 0 \end{cases}, \begin{cases} x_1 = -\frac{2}{7} \\ y_1 = -\frac{12}{7} \end{cases}.$$

$$\therefore M(2,0) \text{ 或 } \left(-\frac{2}{7}, -\frac{12}{7}\right).$$

【点睛】 本题考查了椭圆的定义，直线与椭圆相交问题、点到直线距离公式的运用，熟悉运用公式以及根据 $S_2 = 3S_1$ 推出 $d = \frac{9}{5}$ 是解答本题的关键.

19. 已知关于 x 的函数 $y = f(x)$, $y = g(x)$ 与 $h(x) = kx + b (k, b \in \mathbf{R})$ 在区间 D 上恒有 $f(x) \geq h(x) \geq g(x)$.

(1) 若 $f(x) = x^2 + 2x$, $g(x) = -x^2 + 2x$, $D = (-\infty, +\infty)$, 求 $h(x)$ 的表达式;

(2) 若 $f(x) = x^2 - x + 1$, $g(x) = k \ln x$, $h(x) = kx - k$, $D = (0, +\infty)$, 求 k 的取值范围;

(3) 若 $f(x) = x^4 - 2x^2$, $g(x) = 4x^2 - 8$, $h(x) = 4(t^2 - t)x - 3t^4 + 2^2$ ($0 < |t| \leq \sqrt{2}$), $D = [m, n] \subseteq [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$, 求

证: $n - m \leq \sqrt{7}$.

【答案】 (1) $h(x) = 2x$; (2) $k \in [0, 3]$; (3) 证明详见解析

【解析】

【分析】

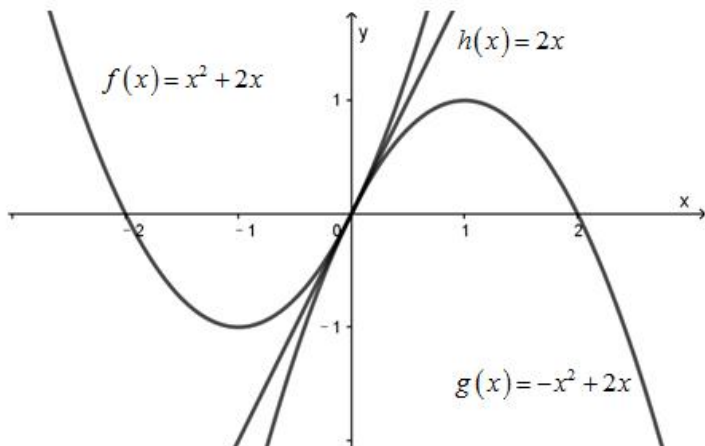
(1) 求得 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的公共点, 并求得过该点的公切线方程, 由此求得 $h(x)$ 的表达式.

(2) 先由 $h(x) - g(x) \geq 0$, 求得 k 的一个取值范围, 再由 $f(x) - h(x) \geq 0$, 求得 k 的另一个取值范围, 从而求得 k 的取值范围.

(3) 先由 $f(x) \geq h(x)$, 求得 $|t|$ 的取值范围, 由方程 $g(x) - h(x) = 0$ 的两个根, 求得 $n - m$ 的表达式, 利用导数证得不等式成立.

【详解】 (1) 由 $\begin{cases} y = x^2 + 2x \\ y = -x^2 + 2x \end{cases}$, 解得 $x = y = 0$, 所以 $f(x)$ 与 $g(x)$ 有唯一公共点 $(0, 0)$.

$f'(x) = 2x + 2 \Rightarrow f'(0) = 2$, $g'(x) = -2x + 2 \Rightarrow g'(0) = 2$, 所以 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $(0, 0)$ 处有公切线 $y = 2x$. 结合图象可知 $h(x) = 2x$, 满足 $f(x) \geq h(x) \geq g(x)$ 在 D 上恒成立.



(2) 令 $F(x) = h(x) - g(x) = k(x - 1 - \ln x) (x > 0)$, $F(1) = 0$.

$F'(x) = k \cdot \frac{x-1}{x}$. 若 $k < 0$, 则 $F(x)$ 在 $(0, 1)$ 上递增, 在 $(1, +\infty)$ 上递减, 则 $F(x) \leq F(1) = 0$, 即

$h(x) - g(x) \leq 0$, 不符合题意.

当 $k = 0$ 时, $F(x) = h(x) - g(x) = 0, h(x) = g(x)$, 符合题意.

当 $k > 0$ 时, $F(x)$ 在 $(0, 1)$ 上递减, 在 $(1, +\infty)$ 上递增, 则 $F(x) \geq F(1) = 0$,

即 $h(x) - g(x) \geq 0$, 符合题意.

综上所述, $k \geq 0$.

由 $f(x) - h(x) = x^2 - x + 1 - (kx - k) = x^2 - (k+1)x + (k+1) \geq 0$, 结合二次函数的性质得:

当 $x = \frac{k+1}{2} < 0$, 即 $k < -1$ 时, 存在 $x_0 \in (0, +\infty)$, 使 $f(x) - h(x) < 0$, 不符合题意.

当 $x = \frac{k+1}{2} = 0$, 即 $k = -1$ 时, $f(x) - h(x) = x^2 \geq 0$, 符合题意.

当 $x = \frac{k+1}{2} > 0$, 即 $k > -1$ 时, 则需 $\Delta = (k+1)^2 - 4(k+1) \leq 0$, 解得 $-1 < k \leq 3$.

综上所述, k 的取值范围是 $k \in [0, 3]$.

(3) $f(x) = x^4 - 2x^2, f'(x) = 4x^3 - 4x = 4x(x+1)(x-1)$,

所以 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处的切线为

$$y = (4x_0^3 - 4x_0)(x - x_0) + (x_0^4 - 2x_0^2) = (4x_0^3 - 4x_0)x - 3x_0^4 + 2x_0^2,$$

所以 $y = h(x)$ 是函数 $y = f(x)$ 的图象在 $x = t (0 < |t| \leq \sqrt{2})$ 处的切线,

由 $f'(x) > 0$, 得 $-1 < x < 0$ 或 $1 < x < \sqrt{2}$; 由 $f'(x) < 0$ 得 $-\sqrt{2} < x < -1$ 或 $0 < x < 1$.

因为 $f(-1) = -1, f(1) = -1$

所以要使 $f(x) \geq h(x)$, 则需 $1 \leq |t| \leq \sqrt{2}$.

由 $g(x) - h(x) = 0$ 得 $4x^2 - 4(t^3 - t)x + 3t^4 - 2t^2 - 8 = 0$, 设其两根为 x_1, x_2 , 则

$$x_1 + x_2 = t^3 - t, x_1 \cdot x_2 = \frac{3t^4 - 2t^2 - 8}{4},$$

$$\text{所以 } n - m = |x_1 - x_2| = \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2} = \sqrt{t^6 - 5t^4 + 3t^2 + 8}.$$

$$\text{令 } t^2 = \lambda, \lambda \in [1, 2], \text{ 则 } |n - m| = \sqrt{\lambda^3 - 5\lambda^2 + 3\lambda + 8}.$$

$$\text{构造函数 } P(\lambda) = \lambda^3 - 5\lambda^2 + 3\lambda + 8 (\lambda \in [1, 2]), P'(\lambda) = 3\lambda^2 - 10\lambda + 3 = (\lambda - 3)(3\lambda - 1),$$

$$\text{所以 } \lambda \in [1, 2] \text{ 时, } P'(\lambda) < 0, P(\lambda) \text{ 递减, } P(\lambda)_{\max} = P(1) = 7.$$

$$\text{所以 } (n - m)_{\max} = \sqrt{7}, \text{ 即 } n - m \leq \sqrt{7}.$$

【点睛】本小题主要考查利用的导数求切线方程, 考查利用导数研究不等式恒成立问题, 考查利用导数证明不等式, 考查分类讨论的数学思想方法, 属于难题.

20. 已知数列 $\{a_n\} (n \in N^*)$ 的首项 $a_1 = 1$, 前 n 项和为 S_n . 设 λ 与 k 是常数, 若对一切正整数 n , 均有

$$S_{n+1}^{\frac{1}{k}} - S_n^{\frac{1}{k}} = \lambda a_{n+1}^{\frac{1}{k}} \text{ 成立, 则称此数列为“}\lambda\text{-}k\text{”数列.}$$

(1) 若等差数列 $\{a_n\}$ 是“ $\lambda-1$ ”数列, 求 λ 的值;

(2) 若数列 $\{a_n\}$ 是“ $\frac{\sqrt{3}}{3}-2$ ”数列, 且 $a_n > 0$, 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(3) 对于给定的 λ , 是否存在三个不同的数列 $\{a_n\}$ 为“ $\lambda-3$ ”数列, 且 $a_n \geq 0$? 若存在, 求 λ 的取值范围; 若不存在, 说明理由.

【答案】(1) 1

$$(2) a_n = \begin{cases} 1, n=1 \\ 3 \cdot 4^{n-2}, n \geq 2 \end{cases}$$

(3) $0 < \lambda < 1$

【解析】

【分析】



(1) 根据定义得 $S_{n+1} - S_n = \lambda a_{n+1}$, 再根据和项与通项关系化简得 $a_{n+1} = \lambda a_{n+1}$, 最后根据数列不为零数列得结果;

(2) 根据定义得 $S_{n+1}^{\frac{1}{2}} - S_n^{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}(S_{n+1} - S_n)^{\frac{1}{2}}$, 根据平方差公式化简得 $S_{n+1} = 4S_n$, 求得 S_n , 即得 a_n ;

(3) 根据定义得 $S_{n+1}^{\frac{1}{3}} - S_n^{\frac{1}{3}} = \lambda a_{n+1}^{\frac{1}{3}}$, 利用立方差公式化简得两个方程, 再根据方程解的个数确定参数满足的条件, 解得结果

【详解】(1) $S_{n+1} - S_n = \lambda a_{n+1} \therefore a_{n+1} = \lambda a_{n+1} \text{ Q } a_1 = 1 \therefore a_{n+1} \neq 0 \therefore \lambda = 1$

(2) $\text{Q } a_n > 0 \therefore S_{n+1} > S_n \therefore S_{n+1}^{\frac{1}{2}} - S_n^{\frac{1}{2}} > 0$

$$\text{Q } S_{n+1}^{\frac{1}{2}} - S_n^{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}(S_{n+1} - S_n)^{\frac{1}{2}}$$

$$\therefore (S_{n+1}^{\frac{1}{2}} - S_n^{\frac{1}{2}})^2 = \frac{1}{3}(S_{n+1}^{\frac{1}{2}} - S_n^{\frac{1}{2}})(S_{n+1}^{\frac{1}{2}} + S_n^{\frac{1}{2}})$$

$$\therefore S_{n+1}^{\frac{1}{2}} - S_n^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}(S_{n+1}^{\frac{1}{2}} + S_n^{\frac{1}{2}}) \therefore S_{n+1}^{\frac{1}{2}} = 2S_n^{\frac{1}{2}} \therefore S_{n+1} = 4S_n \therefore S_n = 4^{n-1}$$

$$\therefore S_1 = a_1 = 1, S_n = 4^{n-1}$$

$$\therefore a_n = 4^{n-1} - 4^{n-2} = 3 \cdot 4^{n-2}, n \geq 2$$

$$\therefore a_n = \begin{cases} 1, n=1 \\ 3 \cdot 4^{n-2}, n \geq 2 \end{cases}$$

(3) 假设存在三个不同的数列 $\{a_n\}$ 为 " $\lambda-3$ " 数列.

$$S_{n+1}^{\frac{1}{3}} - S_n^{\frac{1}{3}} = \lambda a_{n+1}^{\frac{1}{3}} \therefore (S_{n+1}^{\frac{1}{3}} - S_n^{\frac{1}{3}})^3 = \lambda^3 (S_{n+1} - S_n)$$

$$\therefore S_{n+1}^{\frac{1}{3}} = S_n^{\frac{1}{3}} \text{ 或 } (S_{n+1}^{\frac{1}{3}} - S_n^{\frac{1}{3}})^2 = \lambda^3 (S_{n+1}^{\frac{2}{3}} + S_n^{\frac{2}{3}} + S_{n+1}^{\frac{1}{3}} S_n^{\frac{1}{3}})$$

$$\therefore S_{n+1} = S_n \text{ 或 } (\lambda^3 - 1)S_{n+1}^{\frac{2}{3}} + (\lambda^3 - 1)S_n^{\frac{2}{3}} + (\lambda^3 + 2)S_{n+1}^{\frac{1}{3}} S_n^{\frac{1}{3}} = 0$$

$\therefore$ 对于给定的 λ , 存在三个不同的数列 $\{a_n\}$ 为 " $\lambda-3$ " 数列, 且 $a_n \geq 0$

$$\therefore a_n = \begin{cases} 1, n=1 \\ 0, n \geq 2 \end{cases} \text{ 或 } (\lambda^3 - 1)S_{n+1}^{\frac{2}{3}} + (\lambda^3 - 1)S_n^{\frac{2}{3}} + (\lambda^3 + 2)S_{n+1}^{\frac{1}{3}} S_n^{\frac{1}{3}} = 0 (\lambda \neq 1) \text{ 有两个不等的正根.}$$

$$(\lambda^3 - 1)S_{n+1}^{\frac{2}{3}} + (\lambda^3 - 1)S_n^{\frac{2}{3}} + (\lambda^3 + 2)S_{n+1}^{\frac{1}{3}} S_n^{\frac{1}{3}} = 0 (\lambda \neq 1) \text{ 可转化为}$$



$$\frac{(\lambda^3 - 1)S_{n+1}^{\frac{2}{3}}}{S_n^{\frac{2}{3}}} + (\lambda^3 - 1) + \frac{(\lambda^3 + 2)S_{n+1}^{\frac{1}{3}}}{S_n^{\frac{1}{3}}} = 0 \quad (\lambda \neq 1), \text{不妨设} \left(\frac{S_{n+1}}{S_n}\right)^{\frac{1}{3}} = x (x > 0), \text{则}$$

$(\lambda^3 - 1)x^2 + (\lambda^3 + 2)x + (\lambda^3 - 1) = 0 \quad (\lambda \neq 1)$ 有两个不等正根, 设

$$f(x) = (\lambda^3 - 1)x^2 + (\lambda^3 + 2)x + (\lambda^3 - 1) = 0 \quad (\lambda \neq 1).$$

① 当 $\lambda < 1$ 时, $\Delta = (\lambda^3 + 2)^2 - 4(\lambda^3 - 1)^2 > 0 \Rightarrow 0 < \lambda^3 < 4$, 即 $0 < \lambda < 1$, 此时 $f(0) = \lambda^3 - 1 < 0$,

$$x_{\text{对}} = -\frac{(\lambda^3 + 2)}{2(\lambda^3 - 1)} > 0, \text{满足题意.}$$

② 当 $\lambda > 1$ 时, $\Delta = (\lambda^3 + 2)^2 - 4(\lambda^3 - 1)^2 > 0 \Rightarrow 0 < \lambda^3 < 4$, 即 $1 < \lambda < \sqrt[3]{4}$, 此时

$$f(0) = \lambda^3 - 1 > 0, \quad x_{\text{对}} = -\frac{(\lambda^3 + 2)}{2(\lambda^3 - 1)} < 0, \text{此情况有两个不等负根, 不满足题意舍去.}$$

综上, $0 < \lambda < 1$

【点睛】本题考查数列新定义、由和项求通项、一元二次方程实根分步, 考查综合分析求解能力, 属难题.

数学 II (附加题)

【选做题】本题包括 A、B、C 三小题, 请选定其中两小题, 并在相应的答题区域内作答. 若多做, 则按作答的前两小题评分. 解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

A. [选修 4-2: 矩阵与变换]

21. 平面上点 $A(2, -1)$ 在矩阵 $M = \begin{bmatrix} a & 1 \\ -1 & b \end{bmatrix}$ 对应的变换作用下得到点 $B(3, -4)$.

(1) 求实数 a, b 的值;

(2) 求矩阵 M 的逆矩阵 M^{-1} .

$$\text{【答案】} (1) \begin{cases} a=2 \\ b=2 \end{cases}; (2) M^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix}.$$

【解析】

【分析】

(1) 根据变换写出具体的矩阵关系式, 然后进行矩阵的计算可得出实数 a, b 的值;

(2) 设出逆矩阵, 由定义得到方程, 即可求解.

【详解】(1) $\because$ 平面上点 $A(2, -1)$ 在矩阵 $M = \begin{bmatrix} a & 1 \\ -1 & b \end{bmatrix}$ 对应的变换作用下得到点 $B(3, -4)$

$$\therefore \begin{bmatrix} a & 1 \\ -1 & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \begin{cases} 2a - 1 = 3 \\ -2 - b = -4 \end{cases}, \text{解得} \begin{cases} a = 2 \\ b = 2 \end{cases}$$

$$(2) \text{ 设 } M^{-1} = \begin{bmatrix} m & n \\ c & d \end{bmatrix}, \text{ 则 } MM^{-1} = \begin{bmatrix} 2m+c & 2n+d \\ -m+2c & -n+2d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \begin{cases} 2m+c=1 \\ 2n+d=0 \\ -m+2c=0 \\ -n+2d=1 \end{cases}, \text{解得} \begin{cases} m=\frac{2}{5} \\ n=-\frac{1}{5} \\ c=\frac{1}{5} \\ d=\frac{2}{5} \end{cases}$$

$$\therefore M^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix}$$

【点睛】本题考查矩阵变换的应用，考查逆矩阵的求法，解题时要认真审题，属于基础题。

B. [选修 4-4: 坐标系与参数方程]

22. 在极坐标系中，已知点 $A(\rho_1, \frac{\pi}{3})$ 在直线 $l: \rho \cos \theta = 2$ 上，点 $B(\rho_2, \frac{\pi}{6})$ 在圆 $C: \rho = 4 \sin \theta$ 上 (其中 $\rho \geq 0$, $0 \leq \theta < 2\pi$).

(1) 求 ρ_1, ρ_2 的值

(2) 求出直线 l 与圆 C 的公共点的极坐标.

【答案】(1) $\rho_1 = 4, \rho_2 = 2$ (2) $(2\sqrt{2}, \frac{\pi}{4})$

【解析】

【分析】

(1) 将 A, B 点坐标代入即得结果;

(2) 联立直线与圆极坐标方程，解得结果.

【详解】(1) $\rho_1 \cos \frac{\pi}{3} = 2 \therefore \rho_1 = 4$; $\rho_2 = 4 \sin \frac{\pi}{6} \therefore \rho_2 = 2$

(2) $\rho \cos \theta = 2, \rho = 4 \sin \theta \therefore 4 \sin \theta \cos \theta = 2, \therefore \sin 2\theta = 1$ $\theta \in [0, 2\pi) \therefore \theta = \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$

当 $\theta = \frac{\pi}{4}$ 时 $\rho = 2\sqrt{2}$; 当 $\theta = \frac{5\pi}{4}$ 时 $\rho = -2\sqrt{2} < 0$ (舍); 即所求交点坐标为 $(2\sqrt{2}, \frac{\pi}{4})$.

【点睛】本题考查极坐标方程及其交点, 考查基本分析求解能力, 属基础题.

C. [选修 4-5: 不等式选讲]

23. 设 $x \in \mathbf{R}$, 解不等式 $2|x+1| + |x| \leq 4$.

【答案】 $\left[-2, \frac{2}{3}\right]$

【解析】

【分析】

根据绝对值定义化为三个方程组, 解得结果

【详解】 $\therefore \begin{cases} x < -1 \\ -2x-2-x \leq 4 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} -1 \leq x \leq 0 \\ 2x+2-x \leq 4 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x > 0 \\ 2x+2+x \leq 4 \end{cases}$

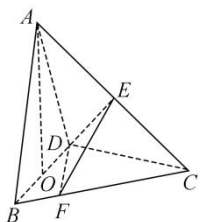
$\therefore -2 \leq x < -1$ 或 $-1 \leq x \leq 0$ 或 $0 < x \leq \frac{2}{3}$

所以解集为 $\left[-2, \frac{2}{3}\right]$

【点睛】本题考查分类讨论解含绝对值不等式, 考查基本分析求解能力, 属基础题.

【必做题】第 24 题、第 25 题, 每题 10 分, 共计 20 分. 请在答题卡指定区域内作答, 解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

24. 在三棱锥 $A-BCD$ 中, 已知 $CB=CD=\sqrt{5}, BD=2$, O 为 BD 的中点, $AO \perp$ 平面 BCD , $AO=2$, E 为 AC 的中点.



(1) 求直线 AB 与 DE 所成角的余弦值;

(2) 若点 F 在 BC 上, 满足 $BF = \frac{1}{4}BC$, 设二面角 $F-DE-C$ 的大小为 θ , 求 $\sin\theta$ 的值.

【答案】(1) $\frac{\sqrt{15}}{15}$ (2) $\frac{2\sqrt{39}}{13}$

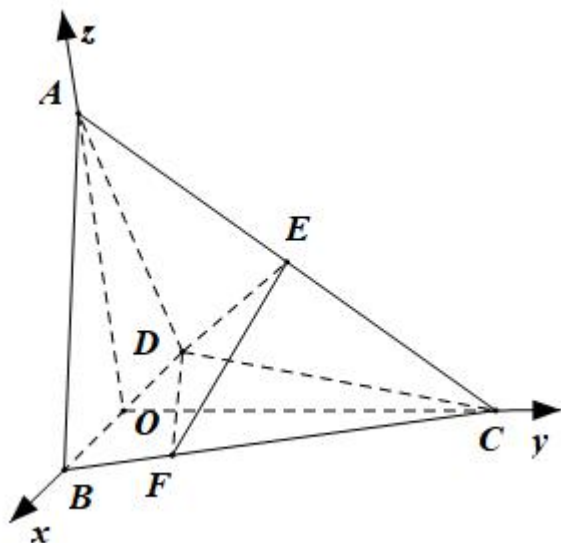
【解析】

【分析】

(1) 建立空间直角坐标系, 利用向量数量积求直线向量夹角, 即得结果;

(2) 先求两个平面法向量, 根据向量数量积求法向量夹角, 最后根据二面角与向量夹角关系得结果.

【详解】



(1) 连 CO $\because BC = CD, BO = OD \therefore CO \perp BD$

以 OB, OC, OA 为 x, y, z 轴建立空间直角坐标系, 则 $A(0, 0, 2), B(1, 0, 0), C(0, 2, 0), D(-1, 0, 0) \therefore E(0, 1, 1)$

$$\therefore \overrightarrow{AB} = (1, 0, -2), \overrightarrow{DE} = (1, 1, 1) \therefore \cos \langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DE} \rangle = \frac{-1}{\sqrt{5}\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{15}}{15}$$

从而直线 AB 与 DE 所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{15}}{15}$

(2) 设平面 DEC 一个法向量为 $\vec{n}_1 = (x, y, z)$,

$$\because \overrightarrow{DC} = (1, 2, 0), \begin{cases} \vec{n}_1 \cdot \overrightarrow{DC} = 0 \\ \vec{n}_1 \cdot \overrightarrow{DE} = 0 \end{cases} \therefore \begin{cases} x + 2y = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$$

$$\text{令 } y = 1 \therefore x = -2, z = 1 \therefore \vec{n}_1 = (-2, 1, 1)$$

设平面 DEF 一个法向量为

$$\vec{n}_2 = (x_1, y_1, z_1), \because \overrightarrow{DF} = \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{DB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{BC} = \left(\frac{7}{4}, \frac{1}{2}, 0\right), \begin{cases} \vec{n}_2 \cdot \overrightarrow{DF} = 0 \\ \vec{n}_2 \cdot \overrightarrow{DE} = 0 \end{cases} \therefore \begin{cases} \frac{7}{4}x_1 + \frac{1}{2}y_1 = 0 \\ x_1 + y_1 + z_1 = 0 \end{cases}$$

$$\text{令 } y_1 = -7 \therefore x_1 = 2, z_1 = 5 \therefore \vec{n}_2 = (2, -7, 5)$$

$$\therefore \cos \langle \vec{n}_1, \vec{n}_2 \rangle = \frac{-6}{\sqrt{6}\sqrt{78}} = -\frac{1}{\sqrt{13}}$$

$$\text{因此 } \sin \theta = \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{13}} = \frac{2\sqrt{39}}{13}$$

【点睛】本题考查利用向量求线线角与二面角，考查基本分析求解能力，属中档题。

25. 甲口袋中装有 2 个黑球和 1 个白球，乙口袋中装有 3 个白球。现从甲、乙两口袋中各任取一个球交换放入另一口袋，重复 n 次这样的操作，记甲口袋中黑球个数为 X_n ，恰有 2 个黑球的概率为 p_n ，恰有 1 个黑球的概率为 q_n 。

(1) 求 $p_1 \cdot q_1$ 和 $p_2 \cdot q_2$;

(2) 求 $2p_n + q_n$ 与 $2p_{n-1} + q_{n-1}$ 的递推关系式和 X_n 的数学期望 $E(X_n)$ (用 n 表示)。

$$\text{【答案】 (1) } p_1 = \frac{1}{3}, q_1 = \frac{2}{3}; p_2 = \frac{7}{27}, q_2 = \frac{16}{27}; (2) 2p_n + q_n = \frac{1}{3}(2p_{n-1} + q_{n-1}) + \frac{2}{3}$$

【解析】

【分析】

(1) 直接根据操作，根据古典概型概率公式可得结果；

(2) 根据操作，依次求 p_n, q_n ，即得递推关系，构造等比数列求得 $2p_n + q_n$ ，最后根据数学期望公式求结果。

$$\text{【详解】 (1) } p_1 = \frac{1 \times 3}{3 \times 3} = \frac{1}{3}, q_1 = \frac{2 \times 3}{3 \times 3} = \frac{2}{3};$$

$$p_2 = p_1 \times \frac{1 \times 3}{3 \times 3} + q_1 \times \frac{1 \times 2}{3 \times 3} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \times \frac{2}{9} = \frac{7}{27}$$

$$q_2 = p_1 \times \frac{2 \times 3}{3 \times 3} + q_1 \times \frac{1 \times 1 + 2 \times 2}{3 \times 3} + 0 = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \times \frac{5}{9} = \frac{16}{27}$$

$$(2) p_n = p_{n-1} \times \frac{1 \times 3}{3 \times 3} + q_{n-1} \times \frac{1 \times 2}{3 \times 3} = \frac{1}{3}p_{n-1} + \frac{2}{9}q_{n-1}$$

$$q_n = p_{n-1} \times \frac{2 \times 3}{3 \times 3} + q_{n-1} \times \frac{1 \times 1 + 2 \times 2}{3 \times 3} + (1 - p_{n-1} - q_{n-1}) \times \frac{3 \times 2}{3 \times 3} = -\frac{1}{9}q_{n-1} + \frac{2}{3}$$

$$\text{因此 } 2p_n + q_n = \frac{2}{3}p_{n-1} + \frac{1}{3}q_{n-1} + \frac{2}{3}$$



$$\text{从而 } 2p_n + q_n = \frac{1}{3}(2p_{n-1} + q_{n-1}) + \frac{2}{3} \therefore 2p_n + q_n - 1 = \frac{1}{3}(2p_{n-1} + q_{n-1} - 1)$$

$$\text{即 } 2p_n + q_n - 1 = (2p_1 + q_1 - 1) \frac{1}{3^{n-1}} \therefore 2p_n + q_n = 1 + \frac{1}{3^n}$$

$$E(X_n) = 2p_n + q_n = 1 + \frac{1}{3^n}$$

【点睛】 本题考查古典概型概率、概率中递推关系、构造法求数列通项、数学期望公式，考查综合分析求解能力，属难题.