2020年普通高等学校招生全国统一考试（浙江卷）

数学

本试题卷分选择题和非选择题两部分.全卷共4页，选择题部分1至2页；非选择题部分3至4页.满分150分.考试用时120分钟.

考生注意：

1．答题前，请务必将自己的姓名、准考证号用黑色字迹的签字笔或钢笔分别填写在试题卷和答题纸规定的位置上.

2．答题时，请按照答题纸上“注意事项”的要求，在答题纸相应的位置上规范作答，在本试题卷上的作答一律无效.

参考公式：

如果事件 A,B 互斥，那么 $P(A+B)=P(A)+P(B)$ 如果事件 A，B 相互独立，那么 $P(AB)=P(A)P(B)$ 如果事件 A 在一次试验中发生的概率是 p，那么 n 次独立重复试验中事件 A 恰好发生 k 次的概率 $P_n(k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}(k=0,1,2,\cdots,n)$ 台体的体积公式 $V=\frac{1}{3}(S_1+\sqrt{S_1S_2}+S_2)h$ 其中 S_1,S_2 分别表示台体的上、下底面积，h 表示台体的高	柱体的体积公式 $V=Sh$ 其中 S 表示柱体的底面积，h 表示柱体的高 锥体的体积公式 $V=\frac{1}{3}Sh$ 其中 S 表示锥体的底面积，h 表示锥体的高 球的表面积公式 $S=4\pi R^2$ 球的体积公式 $V=\frac{4}{3}\pi R^3$ 其中 R 表示球的半径

选择题部分（共40分）

一、选择题：本大题共10小题，每小题4分，共40分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1.已知集合 $P=\{x|1<x<4\}$，$Q=\{2<x<3\}$，则 $P\bigcap Q=$（　　）

A. $\{x|1<x\le 2\}$　　B. $\{x|2<x<3\}$

C. $\{x|3 \le x < 4\}$　　D. $\{x|1 < x < 4\}$

【答案】B

【解析】

【分析】

根据集合交集定义求解

【详解】$P \cap Q = (1,4) \cap (2,3) = (2,3)$

故选：B

【点睛】本题考查交集概念，考查基本分析求解能力，属基础题.

2.已知 $a\in\mathbf{R}$，若 $a-1+(a-2)i$(i 为虚数单位)是实数，则 $a=$（　　）

A. 1　　B. -1　　C. 2　　D. -2

【答案】C

【解析】

【分析】

根据复数为实数列式求解即可.

【详解】因为 $(a-1)+(a-2)i$ 为实数，所以 $a-2=0, \therefore a=2$，

故选：C

【点睛】本题考查复数概念，考查基本分析求解能力，属基础题.

3.若实数 x，y 满足约束条件 $\begin{cases} x-3y+1 \le 0 \\ x+y-3 \ge 0 \end{cases}$，则 $z=2x+y$ 的取值范围是（　　）

A. $(-\infty,4]$　　B. $[4,+\infty)$　　C. $[5,+\infty)$　　D. $(-\infty,+\infty)$

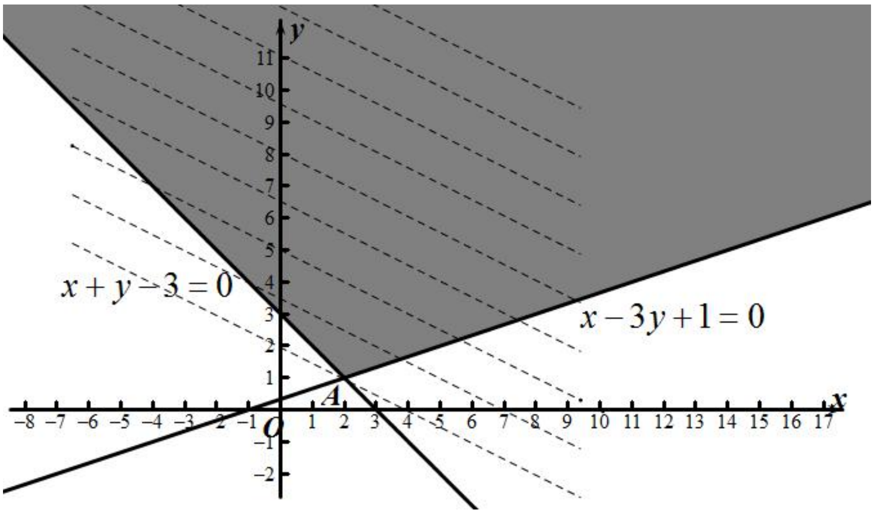
【答案】B

【解析】

【分析】

首先画出可行域，然后结合目标函数的几何意义确定目标函数在何处能够取得最大值和最小值从而确定目标函数的取值范围即可.

【详解】绘制不等式组表示的平面区域如图所示，



目标函数即：$y=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}z$，

其中 z 取得最大值时，其几何意义表示直线系在 y 轴上的截距最大，

z 取得最小值时，其几何意义表示直线系在 y 轴上的截距最小，

据此结合目标函数的几何意义可知目标函数在点 A 处取得最小值，

联立直线方程：$\begin{cases}x-3y+1=0\\x+y-3=0\end{cases}$，可得点 A 的坐标为：$A(2,1)$，

据此可知目标函数的最小值为：$z_{\min}=2+2\times1=4$

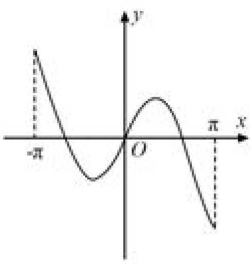
且目标函数没有最大值.

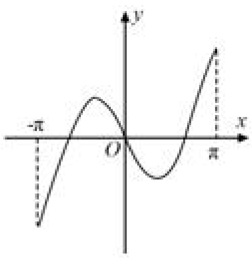
故目标函数的取值范围是 $[4,+\infty)$.

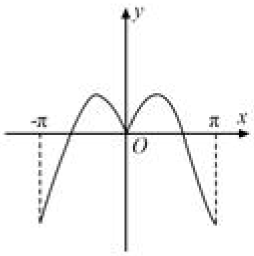
故选：B

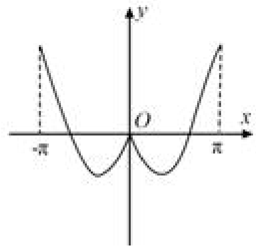
【点睛】求线性目标函数 $z=ax+by(ab\neq0)$ 的最值，当 $b>0$ 时，直线过可行域且在 y 轴上截距最大时，z 值最大，在 y 轴截距最小时，z 值最小；当 $b<0$ 时，直线过可行域且在 y 轴上截距最大时，z 值最小，在 y 轴上截距最小时，z 值最大.

4.函数 $y=x\cos x+\sin x$ 在区间[−π，+π]的图象大致为（ ）

A. 

B. 

C. 

D. 

【答案】A

【解析】

【分析】

首先确定函数的奇偶性，然后结合函数在 $x=\pi$ 处的函数值排除错误选项即可确定函数的图象.

【详解】因为 $f\left(x\right)=x\cos x+\sin x$，则 $f\left(-x\right)=-x\cos x-\sin x=-f\left(x\right)$，

即题中所给的函数为奇函数，函数图象关于坐标原点对称，

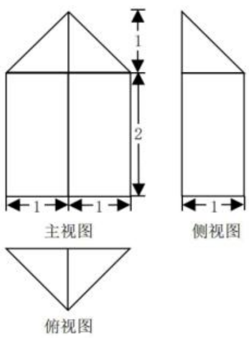
据此可知选项 CD 错误；

且 $x=\pi$ 时，$y=\pi\cos\pi+\sin\pi=-\pi<0$，据此可知选项 B 错误.

故选：A.

【点睛】函数图象的识辨可从以下方面入手：(1)从函数的定义域，判断图象的左右位置；从函数的值域，判断图象的上下位置. (2)从函数的单调性，判断图象的变化趋势. (3)从函数的奇偶性，判断图象的对称性. (4)从函数的特征点，排除不合要求的图象．利用上述方法排除、筛选选项.

5.某几何体的三视图（单位：cm）如图所示，则该几何体的体积（单位：cm^3）是（　　）



A. $\dfrac{7}{3}$　　　B. $\dfrac{14}{3}$　　　C. 3　　　D. 6

【答案】A

【解析】

【分析】

根据三视图还原原图，然后根据柱体和锥体体积计算公式，计算出几何体的体积.

【详解】由三视图可知，该几何体是上半部分是三棱锥，下半部分是三棱柱，

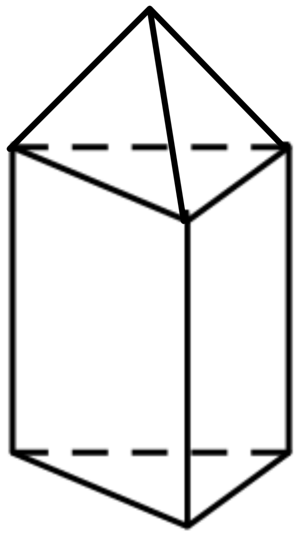
且三棱锥的一个侧面垂直于底面，且棱锥的高为 1，

棱柱的底面为等腰直角三角形，棱柱的高为 2，

所以几何体的体积为：

$$\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}\times 2\times 1\right)\times 1+\left(\frac{1}{2}\times 2\times 1\right)\times 2=\frac{1}{3}+2=\frac{7}{3}.$$

故选：A



【点睛】本小题主要考查根据三视图计算几何体的体积，属于基础题.

6.已知空间中不过同一点的三条直线 m，n，l，则“m，n，l 在同一平面”是“m，n，l 两两相交”的（　　）

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充分必要条件

D. 既不充分也不必要条件

【答案】B

【解析】

【分析】

将两个条件相互推导，根据能否推导的结果判断充分必要条件.

【详解】依题意 m,n,l 是空间不过同一点的三条直线，

当 m,n,l 在同一平面时，可能 $m//n//l$，故不能得出 m,n,l 两两相交.

当 m,n,l 两两相交时，设 $m\cap n=A,m\cap l=B,n\cap l=C$，根据公理 2 可知 m,n 确定一个平面 α，而

$B\in m\subset\alpha,C\in n\subset\alpha$，根据公理 1 可知，直线 BC 即 $l\subset\alpha$，所以 m,n,l 在同一平面.

综上所述，“m,n,l 在同一平面”是“m,n,l 两两相交”的必要不充分条件.

故选：B

【点睛】本小题主要考查充分、必要条件的判断，考查公理 1 和公理 2 的运用，属于中档题.

7.已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n，公差 $d\neq0$，$\frac{a_1}{d}\le1$．记 $b_1=S_2$，$b_{n+1}=S_{n+2}-S_{2n}$，$n\in\mathbf{N}^*$，下列等式不可能成立的是（　　）

A. $2a_4=a_2+a_6$　　B. $2b_4=b_2+b_6$　　C. $a_4^2=a_2a_8$　　D. $b_4^2=b_2b_8$

【答案】D

【解析】

【分析】

根据题意可得，$b_{n+1}=S_{2n+2}-S_{2n}=a_{2n+1}+a_{2n+2}$，而 $b_1=S_2=a_1+a_2$，即可表示出题中 b_2,b_4,b_6,b_8，再结合等差数列的性质即可判断各等式是否成立.

【详解】对于 A，因为数列 $\{a_n\}$ 为等差数列，所以根据等差数列的下标和性质，由 $4+4=2+6$ 可得，

$2a_4=a_2+a_6$，A 正确；

对于 B，由题意可知，$b_{n+1}=S_{2n+2}-S_{2n}=a_{2n+1}+a_{2n+2}$，$b_1=S_2=a_1+a_2$，

$\therefore b_2=a_3+a_4$，$b_4=a_7+a_8$，$b_6=a_{11}+a_{12}$，$b_8=a_{15}+a_{16}$．

$\therefore 2b_4=2\left(a_7+a_8\right)$，$b_2+b_6=a_3+a_4+a_{11}+a_{12}$．

根据等差数列的下标和性质，由 $3+11=7+7,4+12=8+8$ 可得

$b_2+b_6=a_3+a_4+a_{11}+a_{12}=2\left(a_7+a_8\right)=2b_4$，B 正确；

对于 C，$a_4^2-a_2a_8=\left(a_1+3d\right)^2-\left(a_1+d\right)\left(a_1+7d\right)=2d^2-2a_1d=2d\left(d-a_1\right)$，

当 $a_1=d$ 时，$a_4^2=a_2a_8$，C 正确；

对于 D，$b_4^2=\left(a_7+a_8\right)^2=\left(2a_1+13d\right)^2=4a_1^2+52a_1d+169d^2$，

$b_2b_8=\left(a_3+a_4\right)\left(a_{15}+a_{16}\right)=\left(2a_1+5d\right)\left(2a_1+29d\right)=4a_1^2+68a_1d+145d^2$，

$b_4^2-b_2b_8=24d^2-16a_1d=8d\left(3d-2a_1\right)$.

当 $d>0$ 时，$a_1\le d$，$\therefore 3d-2a_1=d+2\left(d-a_1\right)>0$ 即 $b_4^2-b_2b_8>0$；

当 $d<0$ 时，$a_1\ge d$，$\therefore 3d-2a_1=d+2\left(d-a_1\right)<0$ 即 $b_4^2-b_2b_8>0$，所以 $b_4^2-b_2b_8>0$，D 不正确.

故选：D.

【点睛】本题主要考查等差数列的性质应用，属于基础题.

8.已知点 O（0，0），A（–2，0），B（2，0）．设点 P 满足$|PA|–|PB|=2$，且 P 为函数 $y=3\sqrt{4-x^2}$ 图像上的点，则$|OP|=$（　　）

A. $\frac{\sqrt{22}}{2}$　　B. $\frac{4\sqrt{10}}{5}$　　C. $\sqrt{7}$　　D. $\sqrt{10}$

【答案】D

【解析】

【分析】

根据题意可知，点 P 既在双曲线的一支上，又在函数 $y=3\sqrt{4-x^2}$ 的图象上，即可求出点 P 的坐标，得到 $\left|OP\right|$ 的值.

【详解】因为$|PA|-|PB|=2<4$，所以点 P 在以 A,B 为焦点，实轴长为 2，焦距为 4 的双曲线的右支上，

由 $c=2,a=1$ 可得，$b^2=c^2-a^2=4-1=3$，即双曲线的右支方程为 $x^2-\frac{y^2}{3}=1\left(x>0\right)$，而点 P 还在函数 $y=3\sqrt{4-x^2}$ 的图象上，所以，

由 $\begin{cases}y=3\sqrt{4-x^2}\\x^2-\frac{y^2}{3}=1\left(x>0\right)\end{cases}$，解得 $\begin{cases}x=\frac{\sqrt{13}}{2}\\y=\frac{3\sqrt{3}}{2}\end{cases}$，即 $\left|OP\right|=\sqrt{\frac{13}{4}+\frac{27}{4}}=\sqrt{10}$.

故选：D.

【点睛】本题主要考查双曲线的定义的应用，以及二次曲线的位置关系的应用，意在考查学生的数学运算能力，属于基础题.

9.已知 a，$b\in\mathbf{R}$ 且 $ab\neq0$，若$(x–a)(x–b)(x–2a–b)\geq0$ 在 $x\geq0$ 上恒成立，则（　　）

A. $a<0$　　B. $a>0$　　C. $b<0$　　D. $b>0$

【答案】C

【解析】

【分析】

对 a 分 $a>0$ 与 $a<0$ 两种情况讨论，结合三次函数的性质分析即可得到答案.

【详解】因为 $ab\neq 0$，所以 $a\neq 0$ 且 $b\neq 0$，设 $f(x)=(x-a)(x-b)(x-2a-b)$，则 $f(x)$ 的零点

为 $x_1=a,x_2=b,x_3=2a+b$

当 $a>0$ 时，则 $x_2<x_3$，$x_1>0$，要使 $f(x)\geq 0$，必有 $2a+b=a$，且 $b<0$，

即 $\boldsymbol{b=-a}$，且 $b<0$，所以 $b<0$；

当 $a<0$ 时，则 $x_2>x_3$，$x_1<0$，要使 $f(x)\geq 0$，必有 $b<0$.

综上一定有 $b<0$.

故选：C

【点睛】本题主要考查三次函数在给定区间上恒成立问题，考查学生分类讨论思想，是一道中档题.

10.设集合 S，T，$S\subseteq \mathbf{N}^*$，$T\subseteq \mathbf{N}^*$，S，T 中至少有两个元素，且 S，T 满足：

①对于任意 x，$y\in S$，若 $x\neq y$，都有 $xy\in T$

②对于任意 x，$y\in T$，若 $x<y$，则 $\dfrac{y}{x}\in S$；

下列命题正确的是（　　）

A. 若 S 有 4 个元素，则 $S\cup T$ 有 7 个元素

B. 若 S 有 4 个元素，则 $S\cup T$ 有 6 个元素

C. 若 S 有 3 个元素，则 $S\cup T$ 有 4 个元素

D. 若 S 有 3 个元素，则 $S\cup T$ 有 5 个元素

【答案】A

【解析】

【分析】

分别给出具体的集合 S 和集合 T，利用排除法排除错误选项，然后证明剩余选项的正确性即可.

【详解】首先利用排除法：

若取 $S=\{1,2,4\}$，则 $T=\{2,4,8\}$，此时 $S\cup T=\{1,2,4,8\}$，包含 4 个元素，排除选项 D；

若取 $S=\{2,4,8\}$，则 $T=\{8,16,32\}$，此时 $S\cup T=\{2,4,8,16,32\}$，包含 5 个元素，排除选项 C；

若取 $S=\{2,4,8,16\}$，则 $T=\{8,16,32,64,128\}$，此时 $S\cup T=\{2,4,8,16,32,64,128\}$，包含 7 个元素，排除选项 B；

下面来说明选项 A 的正确性：

设集合 $S=\{p_1,p_2,p_3,p_4\}$，且 $p_1<p_2<p_3<p_4$， $p_1,p_2,p_3,p_4\in N^*$，

则 $p_1p_2<p_2p_4$，且 $p_1p_2,p_2p_4\in T$，则 $\dfrac{p_4}{p_1}\in S$，

同理 $\dfrac{p_4}{p_2}\in S$， $\dfrac{p_4}{p_3}\in S$， $\dfrac{p_3}{p_2}\in S$， $\dfrac{p_3}{p_1}\in S$， $\dfrac{p_2}{p_1}\in S$，

若 $p_1=1$，则 $p_2\geq 2$，则 $\dfrac{p_3}{p_2}<p_3$，故 $\dfrac{p_3}{p_2}=p_2$ 即 $p_3=p_2^2$，

又 $p_4>\dfrac{p_4}{p_2}>\dfrac{p_4}{p_3}>1$，故 $\dfrac{p_4}{p_3}=\dfrac{p_4}{p_2^2}=p_2$，所以 $p_4=p_2^3$，

故 $S=\{1,p_2,p_2^2,p_2^3\}$，此时 $p_2^5\in T,p_2\in T$，故 $p_2^4\in S$，矛盾，舍.

若 $p_1\geq 2$，则 $\dfrac{p_2}{p_1}<\dfrac{p_3}{p_1}<p_3$，故 $\dfrac{p_3}{p_1}=p_2,\dfrac{p_2}{p_1}=p_1$ 即 $p_3=p_1^3,p_2=p_1^2$，

又 $p_4>\dfrac{p_4}{p_1}>\dfrac{p_4}{p_2}>\dfrac{p_4}{p_3}>1$，故 $\dfrac{p_4}{p_3}=\dfrac{p_4}{p_1^3}=p_1$，所以 $p_4=p_1^4$，

故 $S=\{p_1,p_1^2,p_1^3,p_1^4\}$，此时 $\{p_1^3,p_1^4,p_1^5,p_1^6,p_1^7\}\subseteq T$.

若 $q\in T$， 则 $\dfrac{q}{p_1^3}\in S$，故 $\dfrac{q}{p_1^3}=p_1^i,i=1,2,3,4$，故 $q=p_1^{i+3},i=1,2,3,4$，

即 $q\in\{p_1^3,p_1^4,p_1^5,p_1^6,p_1^7\}$，故 $\{p_1^3,p_1^4,p_1^5,p_1^6,p_1^7\}=T$，

此时 $S\cup T=\{p_1,p_1^2,p_1^3,p_1^4,p_1^4,p_1^5,p_1^6,p_1^7\}$ 即 $S\cup T$ 中有 7 个元素.

故 A 正确.

故选：A.

【点睛】“新定义”主要是指即时定义新概念、新公式、新定理、新法则、新运算五种，然后根据此新定义去

解决问题，有时还需要用类比的方法去理解新的定义，这样有助于对新定义的透彻理解.但是，透过现象看本质，它们考查的还是基础数学知识，所以说“新题”不一定是“难题”，掌握好三基，以不变应万变才是制胜法宝.

非选择题部分（共 110 分）

二、填空题：本大题共 7 小题，共 36 分.多空题每小题 6 分，单空题每小题 4 分.

11.已知数列$\{a_n\}$满足$a_n=\dfrac{n(n+1)}{2}$，则 S_3=________.

【答案】10

【解析】

【分析】

根据通项公式可求出数列$\left\{a_n\right\}$的前三项，即可求出.

【详解】因为$a_n=\dfrac{n\left(n+1\right)}{2}$，所以$a_1=1,a_2=3,a_3=6$.

即$S_3=a_1+a_2+a_3=1+3+6=10$.

故答案为：10.

【点睛】本题主要考查利用数列的通项公式写出数列中的项并求和，属于容易题.

12.设$(1+2x)^5 \ =a_1+a_2x+a_3x^2+a_4x^3+a_5x^4+a_6x^5$，则 a_5=_______；$a_1+a_2+a_3$=_______.

【答案】 (1). 80

(2). 122

【解析】

【分析】

利用二项式展开式的通项公式计算即可.

【详解】$(1+2x)^5$的通项为$T_{r+1}=C_5^r(2x)^r=2^rC_5^rx^r$，令$r=4$，则$T_5=2^4C_5^4x^4=80x^4$，故$a_5=80$；

$a_1+a_3+a_5=2^1C_5^1+2^3C_5^3+2^5C_5^5=122$.

故答案为：80；122

【点睛】本题主要考查利用二项式定理求指定项的系数问题，考查学生的数学运算能力，是一道基础题.

13.已知$\tan\theta=2$，则$\cos 2\theta=$________；$\tan(\theta-\dfrac{\pi}{4})=$______.

【答案】 (1). $-\frac{3}{5}$ (2). $\frac{1}{3}$

【解析】

【分析】

利用二倍角余弦公式以及弦化切得 $\cos 2\theta$，根据两角差正切公式得 $\tan(\theta-\frac{\pi}{4})$

【详解】$\cos 2\theta=\cos^2\theta-\sin^2\theta=\frac{\cos^2\theta-\sin^2\theta}{\cos^2\theta+\sin^2\theta}=\frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}=\frac{1-2^2}{1+2^2}=-\frac{3}{5}$，

$\tan(\theta-\frac{\pi}{4})=\frac{\tan\theta-1}{1+\tan\theta}=\frac{2-1}{1+2}=\frac{1}{3}$，

故答案为：$-\frac{3}{5},\frac{1}{3}$

【点睛】本题考查二倍角余弦公式以及弦化切、两角差正切公式，考查基本分析求解能力，属基础题.

14.已知圆锥展开图的侧面积为 2π，且为半圆，则底面半径为_______.

【答案】1

【解析】

【分析】

利用题目所给圆锥侧面展开图的条件列方程组，由此求得底面半径.

【详解】设圆锥底面半径为 r，母线长为 l，则

$$\begin{cases}\pi\times r\times l=2\pi\\ 2\times\pi\times r=\frac{1}{2}\times 2\times\pi\times l\end{cases}$$，解得 $r=1,l=2$.

故答案为：1

【点睛】本小题主要考查圆锥侧面展开图有关计算，属于基础题.

15.设直线 $l:y=kx+b(k>0)$，圆 $C_1:x^2+y^2=1$，$C_2:(x-4)^2+y^2=1$，若直线 l 与 C_1，C_2 都相切，则

$k=$_______；b=______.

【答案】 (1). $\frac{\sqrt{3}}{3}$ (2). $-\frac{2\sqrt{3}}{3}$

【解析】

【分析】

由直线与圆 C_1,C_2 相切建立关于 k，b 的方程组，解方程组即可.

【详解】由题意，C_1,C_2 到直线的距离等于半径，即 $\frac{|b|}{\sqrt{k^2+1^2}}=1$，$\frac{|4k+b|}{\sqrt{k^2+1^2}}=1$，

所以 $|b|=|4k+b|$，所以 $k=0$（舍）或者 $b=-2k$，

解得 $k=\frac{\sqrt{3}}{3},b=-\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

故答案为：$\frac{\sqrt{3}}{3};-\frac{2\sqrt{3}}{3}$

【点睛】本题主要考查直线与圆的位置关系，考查学生的数学运算能力，是一道基础题.

16.一个盒子里有 1 个红 1 个绿 2 个黄四个相同的球，每次拿一个，不放回，拿出红球即停，设拿出黄球的个数为 ξ，则 $P(\xi=0)=$______；$E(\xi)=$______.

【答案】 (1). $\frac{1}{3}$ (2). 1

【解析】

【分析】

先确定 $\xi=0$ 对应事件，再求对应概率得结果；第二空，先确定随机变量，再求对应概率，最后根据数学期望公式求结果.

【详解】因为 $\xi=0$ 对应事件为第一次拿红球或第一次拿绿球，第二次拿红球，

所以 $P(\xi=0)=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$，

随机变量 $\xi=0,1,2$，

$P(\xi=1)=\frac{2}{4}\times\frac{1}{3}+\frac{2}{4}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{3}$，

$P(\xi=2)=1-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$，

所以 $E(\xi)=0\times\frac{1}{3}+1\times\frac{1}{3}+2\times\frac{1}{3}=1$.

故答案为：$\frac{1}{3};1$.

【点睛】本题考查古典概型概率、互斥事件概率加法公式、数学期望，考查基本分析求解能力，属基础题.

17.设 $\overrightarrow{e_1}$，$\overrightarrow{e_2}$ 为单位向量，满足 $|2\overrightarrow{e_1}-\overrightarrow{e_2}|\le\sqrt{2}$，$\vec{a}=\overrightarrow{e_1}+\overrightarrow{e_2}$，$\vec{b}=3\overrightarrow{e_1}+\overrightarrow{e_2}$，设 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 的夹角为 θ，则 $\cos^2\theta$ 的最小值为______.

【答案】$\frac{28}{29}$

【解析】

【分析】

利用复数模的平方等于复数的平方化简条件得$\vec{e_1}\cdot\vec{e_2}\geq\frac{3}{4}$，再根据向量夹角公式求$\cos^2\theta$函数关系式，根据函数单调性求最值.

【详解】$\because|2\vec{e_1}-\vec{e_2}|\leq\sqrt{2}$，

$\therefore 4-4\vec{e_1}\cdot\vec{e_2}+1\leq 2$，

$\therefore \vec{e_1}\cdot\vec{e_2}\geq\frac{3}{4}$，

$\therefore \cos^2\theta=\frac{(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}{\vec{a}^2\cdot\vec{b}^2}=\frac{(4+4\vec{e_1}\cdot\vec{e_2})^2}{(2+2\vec{e_1}\cdot\vec{e_2})(10+6\vec{e_1}\cdot\vec{e_2})}=\frac{4(1+\vec{e_1}\cdot\vec{e_2})}{5+3\vec{e_1}\cdot\vec{e_2}}$

$=\frac{4}{3}(1-\frac{2}{5+3\vec{e_1}\cdot\vec{e_2}})\geq\frac{4}{3}(1-\frac{2}{5+3\times\frac{3}{4}})=\frac{28}{29}$.

故答案为：$\frac{28}{29}$.

【点睛】本题考查利用模求向量数量积、利用向量数量积求向量夹角、利用函数单调性求最值，考查综合分析求解能力，属中档题.

三、解答题：本大题共5小题，共74分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

18.在锐角△ABC中，角A，B，C的对边分别为a，b，c，且$2b\sin A=\sqrt{3}a$.

（I）求角B；

（II）求cos$A$+cos$B$+cos$C$的取值范围.

【答案】（I）$B=\frac{\pi}{3}$；（II）$\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2},\frac{3}{2}\right]$

【解析】

【分析】

（I）首先利用正弦定理边化角，然后结合特殊角的三角函数值即可确定$\angle B$的大小；

（II）结合(1)的结论将含有三个角的三角函数式化简为只含有$\angle A$的三角函数式，然后由三角形为锐角三角形确定$\angle A$的取值范围，最后结合三角函数的性质即可求得$\cos A+\cos B+\cos C$的取值范围.

【详解】(I) 由 $2b\sin A=\sqrt{3}a$ 结合正弦定理可得：$2\sin B\sin A=\sqrt{3}\sin A,\therefore \sin B=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\triangle ABC$ 为锐角三角形，故 $B=\dfrac{\pi}{3}$.

(II) 结合(1)的结论有：

$$\cos A+\cos B+\cos C=\cos A+\frac{1}{2}+\cos\left(\frac{2\pi}{3}-A\right)$$

$$=\cos A-\frac{1}{2}\cos A+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin A+\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin A+\frac{1}{2}\cos A+\frac{1}{2}$$

$$=\sin\left(A+\frac{\pi}{6}\right)+\frac{1}{2}.$$

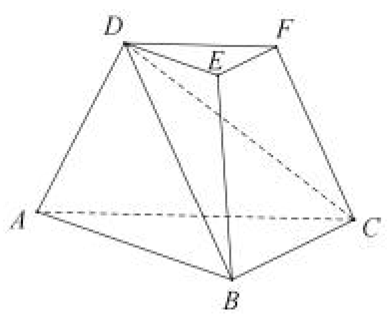
由 $\begin{cases}0<\dfrac{2}{3}\pi-A<\dfrac{\pi}{2}\\ 0<A<\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$ 可得：$\dfrac{\pi}{6}<A<\dfrac{\pi}{2}$，$\dfrac{\pi}{3}<A+\dfrac{\pi}{6}<\dfrac{2\pi}{3}$，

则 $\sin\left(A+\dfrac{\pi}{3}\right)\in\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},1\right]$，$\sin\left(A+\dfrac{\pi}{3}\right)+\dfrac{1}{2}\in\left(\dfrac{\sqrt{3}+1}{2},\dfrac{3}{2}\right]$.

即 $\cos A+\cos B+\cos C$ 的取值范围是 $\left(\dfrac{\sqrt{3}+1}{2},\dfrac{3}{2}\right]$.

【点睛】解三角形的基本策略：一是利用正弦定理实现“边化角”，二是利用余弦定理实现“角化边”；求最值也是一种常见类型，主要方法有两类，一是找到边之间的关系，利用基本不等式求最值，二是转化为关于某个角的函数，利用函数思想求最值.

19.如图，三棱台 $DEF—ABC$ 中，面 $ADFC\perp$ 面 ABC，$\angle ACB=\angle ACD=45°$，$DC=2BC$.



(I) 证明：$EF\perp DB$;

(II) 求 DF 与面 DBC 所成角的正弦值.

【答案】(I) 证明见解析；(II) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

【解析】

【分析】

(I) 作 $DH\perp AC$ 交 AC 于 H，连接 BH，由题意可知 $DH\perp$ 平面 ABC，即有 $DH\perp BC$，根据勾股定理可证得 $BC\perp BH$，又 $EF//BC$，可得 $DH\perp EF$，$BH\perp EF$，即得 $EF\perp$ 平面 BHD，即证得 $EF\perp DB$；

(II) 由 $DF//CH$，所以 DF 与平面 DBC 所成角即为 CH 与平面 DBC 所成角，作 $HG\perp BD$ 于 G，连接 CG，即可知 $\angle HCG$ 即为所求角，再解三角形即可求出 DF 与平面 DBC 所成角的正弦值.

【详解】(Ⅰ) 作 $DH\perp AC$ 交 AC 于 H，连接 BH.

∵平面 $ADFC\perp$ 平面 ABC，而平面 $ADFC\cap$ 平面 $ABC=AC$，$DH\subset$ 平面 $ADFC$，

∴ $DH\perp$ 平面 ABC，而 $BC\subset$ 平面 ABC，即有 $DH\perp BC$.

∵ $\angle ACB=\angle ACD=45^\circ$，

$\therefore CD=\sqrt{2}CH=2BC\Rightarrow CH=\sqrt{2}BC$.

在 $\triangle CBH$ 中，$BH^2=CH^2+BC^2-2CH\cdot BC\cos 45^\circ=BC^2$，即有 $BH^2+BC^2=CH^2$，∴ $BH\perp BC$.

由棱台的定义可知，$EF//BC$，所以 $DH\perp EF$，$BH\perp EF$，而 $BH\cap DH=H$，

∴ $EF\perp$ 平面 BHD，而 $BD\subset$ 平面 BHD，∴ $EF\perp DB$.

(Ⅱ) 因为 $DF//CH$，所以 DF 与平面 DBC 所成角即为与 CH 平面 DBC 所成角.

作 $HG\perp BD$ 于 G，连接 CG，由 (1) 可知，$BC\perp$ 平面 BHD，

因为所以平面 $BCD\perp$ 平面 BHD，而平面 $BCD\cap$ 平面 $BHD=BD$，

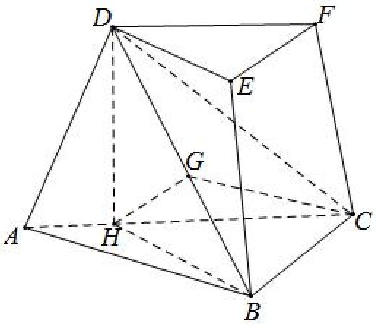
$HG\subset$ 平面 BHD，∴ $HG\perp$ 平面 BCD.

即 CH 在平面 DBC 内的射影为 CG，$\angle HCG$ 即为所求角.

在 $Rt\triangle HGC$ 中，设 $BC=a$，则 $CH=\sqrt{2}a$，$HG=\dfrac{BH\cdot DH}{BD}=\dfrac{\sqrt{2}a\cdot a}{\sqrt{3}a}=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}a$，

$$\therefore \sin\angle HCG=\frac{HG}{CH}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

故 DF 与平面 DBC 所成角的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.



【点睛】本题主要考查空间点、线、面位置关系，线面垂直的判定定理的应用，直线与平面所成的角的求法，意在考查学生的直观想象能力和数学运算能力，属于基础题．

20.已知数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$，$\{c_n\}$中，$a_1=b_1=c_1=1,c_n=a_{n+1}-a_n,c_{n+1}=\frac{b_n}{b_{n+2}}\cdot c_n(n\in\mathbf{N}^*)$．

（Ⅰ）若数列$\{b_n\}$为等比数列，且公比$q>0$，且$b_1+b_2=6b_3$，求q与a_n的通项公式；

（Ⅱ）若数列$\{b_n\}$为等差数列，且公差$d>0$，证明：$c_1+c_2+\cdots+c_n<1+\frac{1}{d}$．

【答案】(I) $q=\frac{1}{2},a_n=\frac{4^{n-1}+2}{3}$.；(II) 证明见解析.

【解析】

【分析】

(I) 根据$b_1+b_2=6b_3$，求得q，进而求得数列$\left\{c_n\right\}$的通项公式，利用累加法求得数列$\left\{a_n\right\}$的通项公式.

(II) 利用累乘法求得数列$\left\{c_n\right\}$的表达式，结合裂项求和法证得不等式成立.

【详解】(I) 依题意$b_1=1,b_2=q,b_3=q^2$，而$b_1+b_2=6b_3$，即$1+q=6q^2$，由于$q>0$，所以解得$q=\frac{1}{2}$，所以$b_n=\frac{1}{2^{n-1}}$.

所以$b_{n+2}=\frac{1}{2^{n+1}}$，故$c_{n+1}=\frac{\frac{1}{2^{n-1}}}{\frac{1}{2^{n+1}}}\cdot c_n=4\cdot c_n$，所以数列$\left\{c_n\right\}$是首项为$1$，公比为$4$的等比数列，所以$c_n=4^{n-1}$.

所以$a_{n+1}-a_n=c_n=4^{n-1}$（$n\geq 2,n\in N^*$）.

所以$a_n=a_1+1+4+\cdots+4^{n-2}=\frac{4^{n-1}+2}{3}$.

(II) 依题意设$b_n=1+\left(n-1\right)d=dn+1-d$，由于$\frac{c_{n+1}}{c_n}=\frac{b_n}{b_{n+2}}$，

所以 $\dfrac{c_n}{c_{n-1}}=\dfrac{b_{n-1}}{b_{n+1}}\left(n\geq 2,n\in N^*\right)$，

故 $c_n=\dfrac{c_n}{c_{n-1}}\cdot\dfrac{c_{n-1}}{c_{n-2}}\cdot\cdots\cdot\dfrac{c_3}{c_2}\cdot\dfrac{c_2}{c_1}\cdot c_1=\dfrac{b_{n-1}}{b_{n+1}}\cdot\dfrac{b_{n-2}}{b_n}\cdot\dfrac{b_{n-3}}{b_{n-1}}\cdot\cdots\cdot\dfrac{b_2}{b_4}\cdot\dfrac{b_1}{b_3}\cdot c_1$

$=\dfrac{b_1b_2}{b_nb_{n+1}}=\dfrac{1+d}{d}\left(\dfrac{1}{b_n}-\dfrac{1}{b_{n+1}}\right)=\left(1+\dfrac{1}{d}\right)\left(\dfrac{1}{b_n}-\dfrac{1}{b_{n+1}}\right)$.

所以 $c_1+c_2+\text{L}\ \ +c_n=\left(1+\dfrac{1}{d}\right)\left[\left(\dfrac{1}{b_1}-\dfrac{1}{b_2}\right)+\left(\dfrac{1}{b_2}-\dfrac{1}{b_3}\right)+\text{L}\ \ +\left(\dfrac{1}{b_n}-\dfrac{1}{b_{n+1}}\right)\right]$

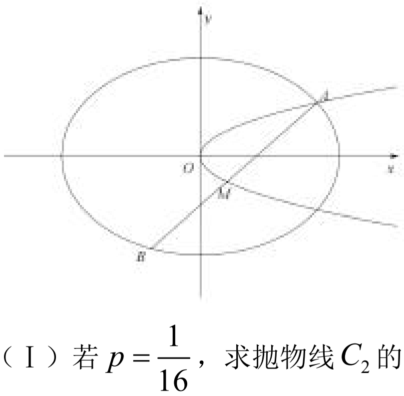
$=\left(1+\dfrac{1}{d}\right)\left(1-\dfrac{1}{b_{n+1}}\right)$.

由于 $d>0,b_1=1$，所以 $b_{n+1}>0$，所以 $\left(1+\dfrac{1}{d}\right)\left(1-\dfrac{1}{b_{n+1}}\right)<1+\dfrac{1}{d}$.

即 $c_1+c_2+\ldots+c_n<1+\dfrac{1}{d}$， $n\in N^*$.

【点睛】本小题主要考查累加法、累乘法求数列的通项公式，考查裂项求和法，属于中档题.

21.如图，已知椭圆 $C_1:\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$，抛物线 $C_2:y^2=2px(p>0)$，点 A 是椭圆 C_1 与抛物线 C_2 的交点，过点 A 的直线 l 交椭圆 C_1 于点 B，交抛物线 C_2 于 M（B，M 不同于 A）.



（Ⅰ）若 $p=\dfrac{1}{16}$，求抛物线 C_2 的焦点坐标；

（Ⅱ）若存在不过原点的直线 l 使 M 为线段 AB 的中点，求 p 的最大值.

【答案】（Ⅰ）$(\dfrac{1}{32},0)$；（Ⅱ）$\dfrac{\sqrt{10}}{40}$

【解析】

【详解】（Ⅰ）当 $p=\frac{1}{16}$ 时，C_2 的方程为 $y^2=\frac{1}{8}x$，故抛物线 C_2 的焦点坐标为 $(\frac{1}{32},0)$；

（Ⅱ）设 $A\left(x_1,y_1\right),B\left(x_2,y_2\right),M\left(x_0,y_0\right)$，$I:x=\lambda y+m$，

由 $\begin{cases}x^2+2y^2=2\\x=\lambda y+m\end{cases}\Rightarrow\left(2+\lambda^2\right)y^2+2\lambda my+m^2-2=0$，

$\therefore y_1+y_2=\frac{-2\lambda m}{2+\lambda^2},y_0=\frac{-\lambda m}{2+\lambda^2},x_0=\lambda y_0+m=\frac{2m}{2+\lambda^2}$，

由 M 在抛物线上，所以 $\frac{\lambda^2m^2}{\left(2+\lambda^2\right)^2}=\frac{4pm}{2+\lambda^2}\Rightarrow\frac{\lambda^2m}{2+\lambda^2}=4p$，

又 $\begin{cases}y^2=2px\\x=\lambda y+m\end{cases}\Rightarrow y^2=2p(\lambda y+m)\Rightarrow y^2-2p\lambda y-2pm=0$，

$\therefore y_1+y_0=2p\lambda$，$\therefore x_1+x_0=\lambda y_1+m+\lambda y_0+m=2p\lambda^2+2m$，

$\therefore x_1=2p\lambda^2+2m-\frac{2m}{2+\lambda^2}$.

由 $\begin{cases}\frac{x^2}{2}+y^2=1\\y^2=2px\end{cases}\Rightarrow x^2+4px=2$，即 $x^2+4px-2=0$

$\Rightarrow x_1=\frac{-4p+\sqrt{16p^2+8}}{2}=-2p+\sqrt{4p^2+2}$

$\Rightarrow -2p+\sqrt{4p^2+2}=2p\lambda^2+2m\cdot\frac{1+\lambda^2}{2+\lambda^2}=2p\lambda^2+\frac{8p}{\lambda^2}+8p\geq 16p$，

所以 $\sqrt{4p^2+2}\geq 18p$，$p^2\leq\frac{1}{160}$，$p\leq\frac{\sqrt{10}}{40}$，

所以，p 的最大值为 $\frac{\sqrt{10}}{40}$，此时 $A(\frac{2\sqrt{10}}{5},\frac{\sqrt{5}}{5})$.

法 2：设直线 $l:x=my+t(m\neq 0,t\neq 0)$，$A\left(x_0,y_0\right)$.

将直线 l 的方程代入椭圆 $C_1:\frac{x^2}{2}+y^2=1$ 得：$\left(m^2+2\right)y^2+2mty+t^2-2=0$，

所以点 M 的纵坐标为 $y_M=-\frac{mt}{m^2+2}$.

将直线 l 的方程代入抛物线 $C_2:y^2=2px$ 得：$y^2-2pmy-2pt=0$，

所以 $y_0 y_M = -2pt$，解得 $y_0 = \dfrac{2p\left(m^2+2\right)}{m}$，因此 $x_0 = \dfrac{2p\left(m^2+2\right)^2}{m^2}$，

由 $\dfrac{x_0^2}{2} + y_0^2 = 1$ 解得 $\dfrac{1}{p^2} = 4\left(m+\dfrac{2}{m}\right)^2 + 2\left(m+\dfrac{2}{m}\right)^2 ..160$，

所以当 $m=\sqrt{2}, t=\dfrac{\sqrt{10}}{5}$ 时，p 取到最大值为 $\dfrac{\sqrt{10}}{40}$.

【点睛】本题主要考查直线与圆锥曲线的位置关系的综合应用，涉及到求函数的最值，考查学生的数学运算能力，是一道有一定难度的题.

22.已知 $1<a\le 2$，函数 $f\left(x\right)=\mathrm{e}^x - x - a$，其中 e=2.71828…为自然对数的底数.

（Ⅰ）证明：函数 $y=f\left(x\right)$ 在 $(0,+\infty)$ 上有唯一零点；

（Ⅱ）记 x_0 为函数 $y=f\left(x\right)$ 在 $(0,+\infty)$ 上的零点，证明：

（ⅰ） $\sqrt{a-1} \le x_0 \le \sqrt{2(a-1)}$；

（ⅱ） $x_0 f(\mathrm{e}^{x_0}) \ge (\mathrm{e}-1)(a-1)a$.

【答案】(I) 证明见解析，(II)（i）证明见解析，(ii) 证明见解析.

【解析】

【分析】

(I) 先利用导数研究函数单调性，再结合零点存在定理证明结论；

(II)（i）先根据零点化简不等式，转化求两个不等式恒成立，构造差函数，利用导数求其单调性，根据单调性确定最值，即可证得不等式；

(ii) 先根据零点条件转化：$x_0 f(e^{x_0}) = x_0 f(x_0+a)$，再根据 $1<a\le 2$ 放缩，转化为证明不等式 $4(e^a-2)^2 \ge (e-1)^2(a-1)$，最后构造差函数，利用导数进行证明.

【详解】(I) Q $f'(x)=e^x-1$, Q $x>0, \therefore e^x>1, \therefore f'(x)>0, \therefore f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

Q $1<a\le 2, \therefore f(2)=e^2-2-a\ge e^2-4>0, f(0)=1-a<0$，

所以由零点存在定理得 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上有唯一零点；

(II)（i） Q $f(x_0)=0, \therefore e^{x_0}-x_0-a=0$，

$\therefore \sqrt{a-1} \le x_0 \le \sqrt{2(a-1)} \Leftrightarrow e^{x_0}-x_0-1 \le {x_0}^2 \le 2(e^{x_0}-x_0-1)$，

令 $g(x)=e^{x}-x-1-x^{2}(0<x<2),h(x)=e^{x}-x-1-\dfrac{x^{2}}{2}(0<x<2)$,

一方面：$h'(x)=e^{x}-1-x=h_{1}(x)$，$h_{1}'(x)=e^{x}-1>0$，

$\therefore h'(x)>h'(0)=0,\therefore h(x)$ 在 $(0,2)$ 单调递增，$\therefore h(x)>h(0)=0$，

$\therefore e^{x}-x-1-\dfrac{x^{2}}{2}>0,2(e^{x}-x-1)>x^{2}$，

另一方面：$\because 1<a\le 2\therefore a-1\le 1$，

所以当 $x_0\ge 1$ 时，$\sqrt{a-1}\le x_0$ 成立，

因此只需证明当 $0<x<1$ 时 $g(x)=e^{x}-x-1-x^{2}\le 0$，

因为 $g'(x)=e^{x}-1-2x=g_{1}(x)$，$g_{1}'(x)=e^{x}-2=0\Rightarrow x=\ln 2$

当 $x\in(0,\ln 2)$ 时，$g_{1}'(x)<0$，当 $x\in(\ln 2,1)$ 时，$g_{1}'(x)>0$，

所以 $g'(x)<\max\{g'(0),g'(1)\},\because g'(0)=0,g'(1)=e-3<0,\therefore g'(x)<0$，

$\therefore g(x)$ 在 $(0,1)$ 单调递减，$\therefore g(x)<g(0)=0$，$\therefore e^{x}-x-1<x^{2}$，

综上，$\therefore e^{x_0}-x_0-1\le x_0^{2}\le 2(e^{x_0}-x_0-1),\therefore \sqrt{a-1}\le x_0\le\sqrt{2(a-1)}$.

（ii）$t(x_0)=x_0 f(e^{x_0})=x_0 f(x_0+a)=x_0[(e^{a}-1)x_0+a(e^{a}-2)]$，

$\because t'(x_0)=2(e^{a}-1)x_0+a(e^{a}-2)>0$，$\sqrt{a-1}\le x_0\le\sqrt{2(a-1)}$，

$\therefore t(x_0)\ge t(\sqrt{a-1})=\sqrt{a-1}[(e^{a}-1)\sqrt{a-1}+a(e^{a}-2)]=(e^{a}-1)(a-1)+a\sqrt{a-1}(e^{a}-2)$，因为 $1<a\le 2$，

所以 $e^{a}>e,a\ge 2(a-1)$，

$\therefore t(x_0)\ge(e-1)(a-1)+2(a-1)\sqrt{a-1}(e^{a}-2)$，

只需证明 $2(a-1)\sqrt{a-1}(e^{a}-2)\ge(e-1)(a-1)^{2}$，

即只需证明 $4(e^{a}-2)^{2}\ge(e-1)^{2}(a-1)$，

令 $s(a)=4(e^{a}-2)^{2}-(e-1)^{2}(a-1),(1<a\le 2)$，

则 $s'(a)=8e^{a}(e^{a}-2)-(e-1)^{2}\ge 8e(e-2)-(e-1)^{2}>0$，

$\therefore s(a) > s(1) = 4(e-2)^2 > 0$，即 $4(e^a-2)^2 \geq (e-1)^2(a-1)$ 成立，

因此 $x_0 f\left(\mathrm{e}^{x_0}\right) \geq (\mathrm{e}-1)(a-1)a$.

【点睛】本题考查利用导数研究函数零点、利用导数证明不等式，考查综合分析论证与求解能力描述难题.