考点 03　函数与方程

一、选择题

1．函数 $f(x)=e^x+x-2$ 的零点所在的区间是（　　）

A．$(-1,0)$　　B．$(0,1)$　　C．$(1,2)$　　D．$(2,3)$

【答案】B

【解析】$f(x)=e^x+x-2$，易知函数单调递增，

$f(0)=e^0+0-2=-1<0$，$f(1)=e+1-2=e-1>0$，故函数在 $(0,1)$ 上有唯一零点.

故选 B.

2．方程 $\ln x+x-4=0$ 的实根所在的区间为（　　）

A．$(1,2)$　　B．$(2,3)$　　C．$(3,4)$　　D．$(4,5)$

【答案】B

【解析】构造函数 $f\left(x\right)=\ln x+x-4$，则该函数在 $\left(0,+\infty\right)$ 上单调递增，

$\because f\left(1\right)=-3<0$，$f\left(2\right)=\ln 2-2<0$，$f\left(3\right)=\ln 3-1>0$，

由零点存在定理可知，方程 $\ln x+x-4=0$ 的实根所在区间为 $\left(2,3\right)$，

故选 B.

3．函数 $f(x)=e^x|\ln x|-2$ 的零点个数为（　　）

A．1　　B．2　　C．3　　D．4

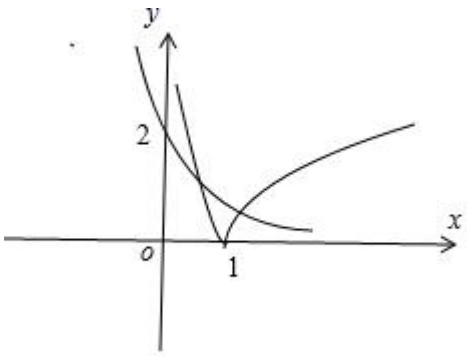
【答案】B

【解析】函数 $f(x)=e^x|lnx|-2$ 的零点可以转化为：$|lnx|=\dfrac{2}{e^x}$ 的零点；

在坐标系中画出两个函数 $y=\left|\ln x\right|,y=\dfrac{2}{e^x}$ 的图象，根据图象可得有两个交点；

故原函数有两个零点.

故选 B.



4．若方程$(k-1)x^2-2x+3=0$有两个不相等的实数根，则实数k的取值范围是（　　）

A．$k<\frac{4}{3}$　　B．$k>\frac{4}{3}$　　C．$k<\frac{4}{3}$，且$k\neq1$　　D．$k>\frac{4}{3}$，且$k\neq1$

【答案】C

【解析】由方程有两个不相等的实数根可知，此方程为一元二次方程且判别式大于零，即可得

$\begin{cases}k-1\neq0\\ \Delta=4-12(k-1)>0\end{cases}$，解得$k<\frac{4}{3}$，且$k\neq1$.

故选 C.

5．若函数$f(x)=2^x+x-7$的零点所在的区间为$(k,k+1)(k\in\mathbf{Z})$,则 k=(　　)

A．3　　B．4　　C．1　　D．2

【答案】D

【解析】$\because\begin{cases}f(2)=4+2-7<0,\\ f(3)=8+3-7>0,\end{cases}$且$f(x)$单调递增，

$\therefore f(x)$的零点所在的区间为（2,3），$\therefore k=2$.

故选 D.

6．若函数$f(x)=x^3+x^2-2x-2$的一个正数零点附近的函数值用二分法逐次计算，参考数据如下表：

$f(1)=-2$	$f(1.5)=0.625$
$f(1.25)=-0.984$	$f(1.375)=-0.260$
$f(1.438)=0.165$	$f(1.4065)=-0.052$

那么方程$x^3+x^2-2x-2=0$的一个近似根（精确到 0.1）为（　　）

A．1.2　　B．1.3　　C．1.4　　D．1.5

【答案】C

【解析】由表中参考数据可得，$f(1.375)=-0.260<0$，$f(1.438)=0.165>0$，

所以$f(1.375)\cdot f(1.438)<0$，由二分法定义得零点应该存在于区间$(1.375,1.438)$内，又

精确度为0.1，且$|1.438-1.375|<0.1$，故方程$x^3+x^2-2x-2=0$的一个近似根为1.4.

故选 C

7．若x_0是方程$\frac{6}{x}=\log_2 x$的解，则x_0属于区间　（　　）

A．$(0,1)$　　B．$(1,2)$　　C．$(2,4)$　　D．$(4,+\infty)$

【答案】C

【解析】构造函数$f(x)=\frac{6}{x}-\log_2 x$，$f(x)$的定义域为$(0,+\infty)$，$f(x)$在定义域上是单调递减函数，

且$f(2)=3-1=2>0, f(4)=\frac{3}{2}-2=-\frac{1}{2}<0$，由零点存在性定理可知，$f(x)$唯一零点在区间$(2,4)$，

也即方程$\frac{6}{x}=\log_2 x$的解x_0属于区间$(2,4)$.

故选 C

8．已知函数$f(x)=\log_2 x+x-3$在区间$(a,a+1)$内有零点，则正数a的取值范围为（　　）

A．$(1,2)$　　B．$(2,+\infty)$　　C．$(0,1)$　　D．$(1,+\infty)$

【答案】A

【解析】由题得$f(2)=\log_2 2+2-3=0$，且函数在定义域内$f(x)$单调递增（增+增=增），

所以$a<2<a+1$，得$1<a<2$.

故选 A

二、填空题

9．若函数$f(x)=\begin{cases}e^x, x\le 0\\ x^2-1, x>0\end{cases}$，则函数$y=f(x)-1$的零点是_____.

【答案】0 或$\sqrt{2}$

【解析】要求函数$y=f(x)-1$的零点，

则令 $y=f(x)-1=0$,即 $f(x)=1$,

又因为：$f(x)=\begin{cases}e^x, x\le 0\\ x^2-1, x>0\end{cases}$,

①当 $x\le 0$ 时,$f(x)=e^x$,

$e^x=1$，解得 $x=0$.

②当 $x>0$ 时，$f(x)=x^2-1$,

$x^2-1=1$，解得 $x=\pm\sqrt{2}$（负值舍去），所以 $x=\sqrt{2}$.

综上所述，函数 $y=f(x)-1$ 的零点是 0 或 $\sqrt{2}$.

故填 0 或 $\sqrt{2}$.

10．若函数 $f(x)=3^x-\frac{4}{x}-2a$ 的一个零点在区间 $(1,2)$ 内，则实数 a 的取值范围是_____.

【答案】$\left(-\frac{1}{2},\frac{7}{2}\right)$.

【解析】由条件可知函数 $f(x)$ 在 $(1,2)$ 上单调递增，所以 $f(1)\cdot f(2)<0$,

即 $(3-4-2a)(9-2-2a)<0$，解之得 $-\frac{1}{2}<a<\frac{7}{2}$．所以实数 a 的取值范围是 $\left(-\frac{1}{2},\frac{7}{2}\right)$.

故填 $\left(-\frac{1}{2},\frac{7}{2}\right)$.

一、选择题

11．已知函数 $f(x)=\log_3 x$，函数 $h(x)$ 是最小正周期为 2 的偶函数，且当 $x\in[0,1]$ 时，$h(x)=3^x-1$.若函数 $y=k\cdot f(x)+h(x)$ 有 3 个零点，则实数 k 的取值范围是（　　）

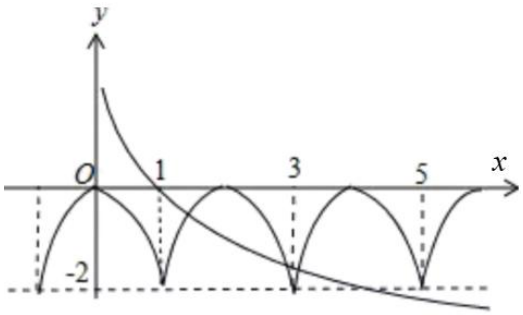
A．$(1,2\log_7 3)$　　B．$(-2,-2\log_5 3)$　　C．$(-2\log_5 3,-1)$　　D．$(-\log_7 3,-\frac{1}{2})$

【答案】B

【解析】函数 $y=k\cdot f(x)+h(x)$ 有 3 个零点，即 $k\log_3 x=-h(x)$ 有 3 个不同根.

画出函数 $y=k\log_3 x$ 的图像,再由 $h(x)$ 是最小正周期为 2 的偶函数,

且当 $x\in[0,1]$ 时，$h(x)=3^x-1$ 画出 $y=-h(x)$ 的图象如图：



要使函数 $y=k\log_3 x$ 与 $y=-h(x)$ 的图象有 3 个交点，则

$k<0$，且 $\begin{cases}k\log_3 3>-2\\ k\log_3 5<-2\end{cases}$，即 $-2<k<-2\log_5 3$.

∴实数 k 的取值范围是 $(-2,-2\log_5 3)$.

故选 B.

12．设函数 $f(x)=x^3-3x^2-ax-a+5$，若存在唯一的正整数 x_0，使得 $f(x_0)<0$，则实数 a 的取值范围是（　　）

A．$\left(0,\frac{1}{3}\right)$　　B．$\left(\frac{1}{3},\frac{3}{2}\right]$　　C．$\left(\frac{1}{3},\frac{5}{4}\right]$　　D．$\left(\frac{5}{4},\frac{3}{2}\right]$

【答案】C

【解析】由 $f(x)=x^3-3x^2-ax-a+5<0$，得 $x^3-3x^2+5<a(x+1)$，

设 $g(x)=x^3-3x^2+5, h(x)=a(x+1)$，

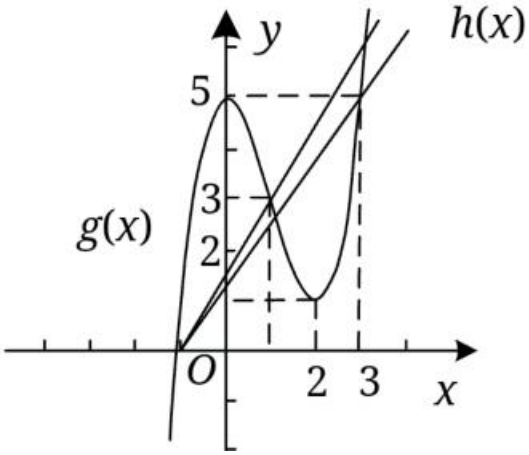
$g'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$，

$g'(x)>0\Rightarrow x<0$ 或 $x>2$；$g'(x)<0\Rightarrow 0<x<2$，

则函数 $g(x)$ 在 $(0,2)$ 上递减，在 $(-\infty,0)$ 和 $(2,+\infty)$ 上递增，

当 $x=2$ 时，有极小值 $g(2)=1$，函数 $h(x)$ 恒过定点 $(-1,0)$，

则 $g(x), h(x)$ 这两个函数图象如图：



要使存在唯一的正整数 x_0，使得 $g(x_0)<h(x_0)$，只要 $\begin{cases} g(1)\geq h(1) \\ g(3)\geq h(3) \\ h(2)>g(2) \end{cases}$，

即 $\begin{cases} 1-3+5\geq 2a \\ 5\geq 4a \\ 3a>8-12+5 \end{cases}$，解得 $\frac{1}{3}<a\leq\frac{5}{4}$，

故选 C

13．设函数 $f(x)=\begin{cases} |\ln x|, x>0 \\ e^x(x+1), x\leq 0 \end{cases}$，若方程 $[f(x)]^2-af(x)+\frac{1}{16}=0$ 有六个不等的实数根，则实数 a 可取的值可能是（　　）

A．$\frac{2}{3}$　　B．$\frac{2}{3}$ 或 1　　C．1　　D．$\frac{2}{3}$ 或 2

【答案】B

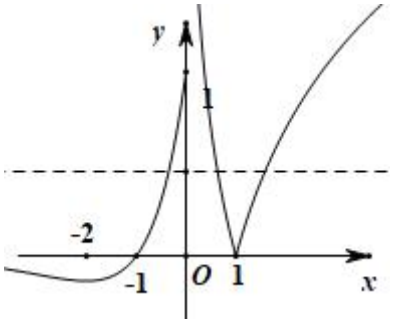
【解析】当 $x\leq 0$ 时，$f(x)=e^x(x+1)$，则 $f'(x)=e^x(x+1)+e^x=e^x(x+2)$

由 $f'(x)<0$ 得 $x+2<0$，即 $x<-2$，此时 $f(x)$ 为减函数，

由 $f'(x)>0$ 得 $x+2>0$，即 $-2<x\leq 0$，此时 $f(x)$ 为增函数，

即当 $x=-2$ 时，$f(x)$ 取得极小值 $f(-2)=-\frac{1}{e^2}$，

作出 $f(x)$ 的图象如图：



由图象可知当$0<f\left(x\right)\leq 1$时，有三个不同的x与$f\left(x\right)$对应，

设$t=f\left(x\right)$，方程$[f(x)]^2-af(x)+\frac{1}{16}=0$有六个不等的实数根，

所以$t^2-at+\frac{1}{16}=0$在$t\in\left(0,1\right]$内有两个不等的实根，

设$g(t)=t^2-at+\frac{1}{16}$，

即$\begin{cases} g(0)>0 \\ g(1)\geq 0 \\ \Delta>0 \\ 0<\frac{a}{2}<1 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} \frac{1}{16}>0 \\ 1-a+\frac{1}{16}\geq 0 \\ a^2-4\times\frac{1}{16}>0 \\ 0<\frac{a}{2}<1 \end{cases}\Rightarrow\frac{1}{2}<a\leq\frac{17}{16}$，

则实数a可取的值可能是$\frac{2}{3}$，1

故选 B.

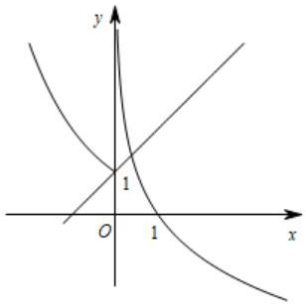
二、填空题

14. 若$f\left(x\right)=\begin{cases}2^{-x},x\leq 0,\\ \log_{\frac{1}{2}}x,x>0,\end{cases}$若$g\left(x\right)=f\left(x\right)-x+t$有两个零点，则实数$t$的取值范围为_____.

【答案】$\left(-\infty,-1\right]$

【解析】因为$g\left(x\right)=f\left(x\right)-x+t$有两个零点，所以$y=f(x)$与$y=x-t$有两个不同的交点，

如图所示，所以有$-t\geq 1$，即$t\leq -1$.



故填$(-\infty,-1]$.

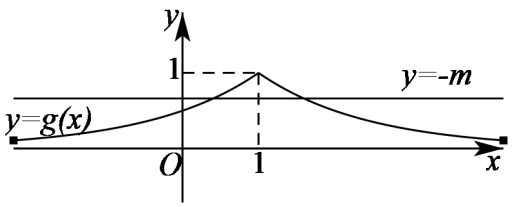
15．若函数$y=\left(\frac{1}{2}\right)^{|1-x|}+m$的图象与$x$轴有公共点，则$m$的取值范围是_____.

【答案】$[-1,0)$

【解析】由$y=\left(\frac{1}{2}\right)^{|1-x|}+m=0$可得出$-m=\left(\frac{1}{2}\right)^{|1-x|}$，设函数$g(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{|1-x|}$，

则直线$y=-m$与函数$y=g(x)$的图象有交点，

作出函数$g(x)=\begin{cases}\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}, x\geq 1\\ 2^{x-1}, x<1\end{cases}$与函数$y=-m$的图象如下图所示，



由图象可知$0<g(x)\leq 1$，则$0<-m\leq 1$，解得$-1\leq m<0$.

因此，实数m的取值范围是$[-1,0)$.

故填$[-1,0)$.