考点 04　导数的概念与运算

一、选择题

1．曲线 $f(x)=\frac{1}{2}x^2$ 在点 $\left(1,\frac{1}{2}\right)$ 处的切线方程为（　　）

A．$2x+2y+1=0$　　B．$2x+2y-1=0$

C．$2x-2y-1=0$　　D．$2x-2y-3=0$

【答案】C

【解析】$f(x)=\frac{1}{2}x^2$ 的导函数为 $f'(x)=x$，既有在点 $\left(1,\frac{1}{2}\right)$ 处的切线斜率为 $f'(1)=1$，

由点斜式可得曲线 $f(x)=\frac{1}{2}x^2$ 在点 $\left(1,\frac{1}{2}\right)$ 处的切线方程为 $y-\frac{1}{2}=x-1$，

即为 $2x-2y-1=0$，

故选 C.

2．设函数 $f(x)=x$，则 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}=$（　　）

A．0　　B．1　　C．2　　D．-1

【答案】B

【解析】因为 $f(x)=x$，

所以 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{1+\Delta x-1}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta x}=1$.

故选 B.

3．曲线 $y=e^x$ 在点 $\left(2,e^2\right)$ 处的切线与坐标轴所围三角形的面积为（　　）

A．$\frac{9}{4}e^2$　　B．$2e^2$　　C．e^2　　D．$\frac{e^2}{2}$

【答案】D

【解析】$y'=\mathrm{e}^x$，故切线的斜率为 $k=e^2$，故切线方程为：$y-e^2=e^2(x-2)$，

化简得到 $y=e^2x-e^2$.

令 $x=0$，则 $y=-e^2$；令 $y=0$，则 $x=1$.

故切线与坐标轴所围三角形的面积为$\frac{1}{2}\times 1\times e^2=\frac{e^2}{2}$.

故选 D.

4．函数$f(x)=x(e^x-1)+\ln x$的图象在点$(1,f(1))$处的切线方程是（　　）

A．$y=2ex-e-1$　　B．$y=2ex-e+1$

C．$y=2ex+e-1$　　D．$y=2ex+e+1$

【答案】A

【解析】由函数$f(x)=x(e^x-1)+\ln x$知$f(1)=e-1$，$f'(x)=e^x-1+xe^x+\frac{1}{x}$，

所以$k=f'(1)=2e$，在点$(1,f(1))$处的切线方程是$y-(e-1)=2e(x-1)$，

化简得$y=2ex-e-1$.

故选 A.

5．已知曲线$f(x)=\mathrm{e}^x+1$（其中e为自然对数的底数）在点$(0,f(0))$处的切线为l，命题p：点$(1,3)$在直线l上，命题q：点$(-1,2)$在直线l上，则下列命题正确的是（　　）

A．$p\vee q$　　B．$(\neg p)\wedge q$　　C．$p\wedge q$　　D．$(\neg p)\wedge(\neg q)$

【答案】A

【解析】由题可知$f'(x)=e^x$，所以$f'(0)=1$，$f(0)=2$，所以切线l的方程为：$y=x+2$；

当$x=1$时，$y=3$，即点$(1,3)$在直线l上，所以p为真命题；

当$x=-1$时$y=1$，即点$(-1,2)$不在直线l上，所以q为假命题，所以$p\vee q$为真命题，$(\neg p)\wedge q$为假命题，$p\wedge q$为假命题，$(\neg p)\wedge(\neg q)$为假命题，

故选 A.

6．设$f(x)$是可导函数，且$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0-2\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=2$，则$f'(x_0)=$（　　）

A．$\frac{1}{2}$　　B．-1　　C．0　　D．-2

【答案】B

【解析】因为 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0-2\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=-2\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0-2\Delta x)-f(x_0)}{-2\Delta x}=-2f'(x_0)=2$

所以 $f'(x_0)=-1$，

故选 B.

7．已知函数 $f(x)=x^2\ln x+1-f'(1)x$，则函数 $f(x)$ 的图象在点 $(1,f(1))$ 处的切线斜率为（　　）

A．$\dfrac{1}{2}$　　B．$-\dfrac{1}{2}$　　C．$\dfrac{1}{2}-3e$　　D．$3e-\dfrac{1}{2}$

【答案】A

【解析】$\because f(x)=x^2\ln x+1-f'(1)x$，$\therefore f'(x)=2x\ln x+x-f'(1)$，

$\therefore f'(1)=1-f'(1)$，解得 $f'(1)=\dfrac{1}{2}$，

因此，函数 $y=f(x)$ 的图象在点 $(1,f(1))$ 处的切线斜率为 $\dfrac{1}{2}$.

故选 A.

二、填空题

8．曲线 $f(x)=\tan x$ 在点 $\left(\dfrac{\pi}{4},1\right)$ 处的切线方程为_____

【答案】$2x-y+1-\dfrac{p}{2}=0$.

【解析】因为 $f(x)=\tan x$ 定义为 $\left\{x\,|\,x\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi,k\in Z\right\}$，

所以 $f(x)=\tan x=\dfrac{\sin x}{\cos x}$，

所以 $f'(x)=\dfrac{(\sin x)'\cos x-(\cos x)'\sin x}{(\cos x)^2}=\dfrac{1}{\cos^2 x}$，

所以 $f'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{1}{\cos^2\dfrac{\pi}{4}}=2$，

故切线方程为 $y-1=2\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$，整理得 $2x-y+1-\dfrac{p}{2}=0$，

故填 $2x-y+1-\dfrac{p}{2}=0$.

9．若 $f'(x_0)=-3$，则 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0-3h)}{h}=$_____.

【答案】-12

【解析】因为 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0-3h)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)-\left[f(x_0-3h)-f(x_0)\right]}{h}$，

$=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}-\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0-3h)-f(x_0)}{h}$，

$=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}+3\lim\limits_{-3h\to 0}\dfrac{f(x_0-3h)-f(x_0)}{-3h}$，

$=f'(x_0)+3f'(x_0)=4f'(x_0)=-12$.

故填 -12.

10．函数 $y=3^x$ 的图象在 $x=0$ 处的切线方程为_____.

【答案】$y=(\ln 3)x+1$

【解析】∵ $y'=3^x\ln 3$，∴ $k=y'(0)=\ln 3$，

∵ 切点坐标为 $(0,1)$，

∴ 函数 $y=3^x$ 的图象在 $x=0$ 处的切线方程为 $y=(\ln 3)x+1$，

故填 $y=(\ln 3)x+1$.

一、选择题

11．函数 $f(x)=\ln x+ax$ 的图象存在与直线 $2x-y=0$ 平行的切线，则实数 a 的取值范围是(　　)

A．$(-\infty,2]$　　B．$(-\infty,2)$　　C．$(2,+\infty)$　　D．$(0,+\infty)$

【答案】B

【解析】函数 $f(x)=\ln x+ax$ 的图象存在与直线 $2x-y=0$ 平行的切线，

即 $f'(x)=2$ 在 $(0,+\infty)$ 上有解.

∴ $f'(x)=\dfrac{1}{x}+a=2$ 在 $(0,+\infty)$ 上有解，则 $a=2-\dfrac{1}{x}$.

因为 $x>0$，所以 $2-\dfrac{1}{x}<2$，所以 a 的取值范围是 $(-\infty,2)$.

故选 B.

12．已知 a，b 为正实数，直线 $y=x-a$ 与曲线 $y=\ln(x+b)$ 相切，则 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$ 的最小值是（　　）

A．2　　B．$4\sqrt{2}$　　C．4　　D．$2\sqrt{2}$

【答案】C

【解析】$y=\ln(x+b)$ 的导数为 $y'=\frac{1}{x+b}$，

由切线的方程 $y=x-a$ 可得切线的斜率为 1，

可得切点的横坐标为 $1-b$，所以切点为 $(1-b,0)$，

代入 $y=x-a$，得 $a+b=1$，

$\because a$、b 为正实数，

则 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=(a+b)(\frac{1}{a}+\frac{1}{b})=2+\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\geq 2+2\sqrt{\frac{b}{a}\cdot\frac{a}{b}}=4$．

当且仅当 $a=b=\frac{1}{2}$ 时，$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$ 取得最小值 4．

故选 C

二、填空题

13．已知函数 $f(x)$ 的导函数是 $f'(x)$，且满足 $f(x)=x^2f'(1)+x^2\ln x$，则 $f'(1)=$_____

【答案】-1

【解析】$f(x)=x^2f'(1)+x^2\ln x$，则 $f'(x)=2xf'(1)+2x\ln x+x$，

故 $f'(1)=2f'(1)+1$，解得 $f'(1)=-1$．

故填 -1．

14．已知函数 $f(x)=bx-\ln x$，其中 $b\in R$，若过原点且斜率为 k 的直线与曲线 $y=f(x)$ 相切，则 $k-b$ 的值为_____．

【答案】$-\frac{1}{e}$

【解析】设切点为 (m,n)，则 $n=bm-\ln m$，又 $f'(x)=b-\frac{1}{x}$，则 $k=b-\frac{1}{m}$，

又切线方程为：$y=kx$，则 $n=km$，则 $bm-\ln m=(b-\frac{1}{m})m$，

得 $\ln m=1$，得 $m=e$，故 $k-b=-\frac{1}{m}=-\frac{1}{e}$.

故填 $-\frac{1}{e}$

15．已知过点 $A(a,0)$ 作曲线 $C:y=x\cdot e^{x}$ 的切线有且仅有两条，则实数 a 的取值范围是_____.

【答案】$(-\infty,-4)\cup(0,+\infty)$

【解析】设切点为 (x_0,y_0)，则切线斜率为：$\mathrm{k}=(x_0+1)\cdot e^{x_0}$.

切线方程为：$\mathrm{y}-y_0=(x_0+1)\cdot e^{x_0}(x-x_0)$，

将点 $A(a,0)$ 代入切线方程得：$-y_0=(x_0+1)\cdot e^{x_0}(a-x_0)$，又 $y_0=x_0\cdot e^{x_0}$.

所以 $(x_0+1)\cdot e^{x_0}(a-x_0)=-x_0\cdot e^{x_0}$，整理得 $x_0^{\,2}-ax_0+a=0$ 有两个解.

所以 $\Delta=a^2-4a>0$，解得 $a<-4$ 或 $a>0$.

故填 $(-\infty,-4)\cup(0,+\infty)$.