考点 16　复数与不等式

一、选择题

1．在复平面内，复数 $i(2+i)$ 对应的点的坐标为（　　）

A．$(1,2)$　　B．$(2,1)$　　C．$(-1,2)$　　D．$(2,-1)$

【答案】C

【解析】复数 $i(2+i)=2i-1$，故复数对应的点的坐标为(﹣1，2)，

故选 C.

2．复数 z 满足 $\overline{z}\ (1+i)=2i$（i 为虚数单位），则复数 $z=$（　　）

A．$1-i$　　B．$1+2i$　　C．$1+i$　　D．$2-2i$

【答案】A

【解析】复数 $\overline{z}(1+i)=2i$ 可变形为 $\overline{z}=\dfrac{2i}{1+i}=\dfrac{2i\left(1-i\right)}{\left(1+i\right)\left(1-i\right)}=\dfrac{2i+2}{2}=1+i$

则复数 $z=1-i$.

故选 A.

3．复数 $z=\dfrac{2\mathrm{i}^3}{1+\mathrm{i}}$ 的虚部为（　　）

A．-1　　B．1　　C．$-\mathrm{i}$　　D．i

【答案】A

【解析】$z=\dfrac{2\mathrm{i}^3}{1+\mathrm{i}}=\dfrac{-2\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}=\dfrac{-2-2\mathrm{i}}{2}=-1-\mathrm{i}$

虚部为-1

故选 A

4．在复平面内，已知复数 z 对应的点与复数 $1+i$ 对应的点关于实轴对称，则 $\dfrac{z}{i}=$（　　）

A．$1+i$　　B．$-1+i$　　C．$-1-i$　　D．$1-i$

【答案】C

【解析】由题得 z=1-i ，

所以 $\dfrac{z}{\mathrm{i}}=\dfrac{1-\mathrm{i}}{\mathrm{i}}=\dfrac{\mathrm{i}+1}{-1}=-1-\mathrm{i}$.

故选 C

5．若 $-1<\alpha<\beta<1$，则 $\alpha-\beta$ 的范围为（　　）

A．$(-2,0)$　　B．$(-2,-1)$　　C．$(-1,0)$　　D．$(0,1)$

【答案】A

【解析】因为$\alpha<\beta$，故$\alpha-\beta<0$，

因为$\alpha>-1,\beta<1$，故$-\beta>-1$，所以$\alpha-\beta>-2$即$-2<\alpha-\beta<0$，

故选 A.

6．不等式$x^2-\sqrt{5}x-1<0$的解集为（　　）

A．$\left(\frac{\sqrt{5}+3}{2},+\infty\right)$　　B．$\left(-\infty,\frac{\sqrt{5}-3}{2}\right)$

C．$\left(\frac{\sqrt{5}-3}{2},\frac{\sqrt{5}+3}{2}\right)$　　D．$\left(\frac{\sqrt{5}+3}{2},\frac{\sqrt{5}-3}{2}\right)$

【答案】C

【解析】方程$x^2-\sqrt{5}x-1=0$的两根分别为$\frac{\sqrt{5}-3}{2}$，$\frac{\sqrt{5}+3}{2}$，

又函数$y=x^2-\sqrt{5}x-1$的图象开口向上，

故不等式$x^2-\sqrt{5}x-1<0$的解集为$\left(\frac{\sqrt{5}-3}{2},\frac{\sqrt{5}+3}{2}\right)$.

故选 C.

二、填空题

7．给出下列命题：①$a>b$，$ac^2>bc^2$；②$a>|b|$，$a^2>b^2$；③$a>b$，$a^3>b^3$；④$|a|>b$，$a^2>b^2$.其中正确的命题序号是_____.

【答案】②③

【解析】①当$c^2=0$时不成立；②一定成立；③当$a>b$时，

$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)=(a-b)\left[\left(a+\frac{b}{2}\right)^2+\frac{3}{4}b^2\right]>0$成立；④当$b<0$时，不一定成立，如：

$|2|>-3$，但$2^2<(-3)^2$.

故填②③.

8．已知 a，b 均为正数，且$a+b=1$，则 ab 的最大值是_____.

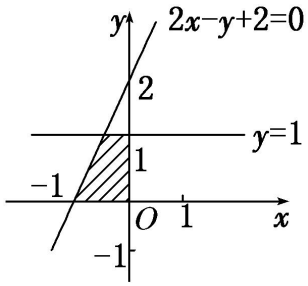
【答案】$\frac{1}{4}$

【解析】因为 a，b 均为正数，且 $a+b=1$，

所以 $a+b\geq 2\sqrt{ab}$，即 $ab\leq\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2=\dfrac{1}{4}$，当且仅当 $a=b=\dfrac{1}{2}$ 时取等号.

故填 $\dfrac{1}{4}$

9．能表示图中阴影部分的二元一次不等式组是_____.



【答案】$\begin{cases} y\leq 1 \\ x\leq 0 \\ 2x-y+2\geq 0 \end{cases}$

【解析】根据已知图中阴部部分所表示的平面区域可得：$\begin{cases} y\leq 1 \\ x\leq 0 \\ 2x-y+2\geq 0 \end{cases}$.

故填 $\begin{cases} y\leq 1 \\ x\leq 0 \\ 2x-y+2\geq 0 \end{cases}$

10．不等 $\dfrac{2-3x}{4x+3}\geq 0$ 的解集是_____.

【答案】$\left(-\dfrac{3}{4},\dfrac{2}{3}\right]$

【解析】因为 $4x+3^{1}\quad 0$，所以 $x^{1}\quad -\dfrac{3}{4}$，

$\dfrac{2-3x}{4x+3}\geq 0$，即 $(2-3x)(4x+3)\geq 0$，$(3x-2)(4x+3)\leq 0$，

解得 $-\dfrac{3}{4}<x\pounds\dfrac{2}{3}$，

故填 $\left(-\dfrac{3}{4},\dfrac{2}{3}\right]$.

一、选择题

11．已知复数 z 满足 $(1+i)z=\left|\sqrt{3}+i\right|$，i 为虚数单位，则 z 等于（　　）

A．$1-i$　　B．$1+i$　　C．$\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i$　　D．$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$

【答案】A

【解析】因为 $z=\frac{|\sqrt{3}+i|}{1+i}=\frac{2(1-i)}{(1+i)(1-i)}=1-i$，

故选 A．

12．已知 a 是实数，$\frac{a+i}{1-i}$ 是纯虚数，则 a 等于（　　）

A．$-\sqrt{2}$　　B．-1　　C．$\sqrt{2}$　　D．1

【答案】D

【解析】由题意可知：$\frac{a+i}{1-i}=\frac{(a+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\frac{(a-1)+(a+1)i}{2}$，

$\frac{a+i}{1-i}$ 为纯虚数，则：$\begin{cases}a-1=0\\a+1\neq 0\end{cases}$，据此可知 $a=1$．

故选 D.

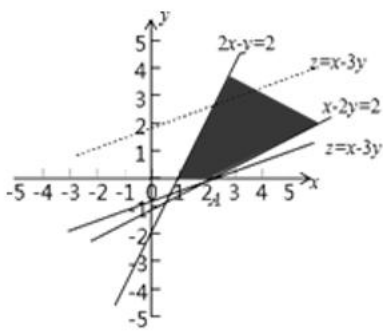
13．若实数 x,y 满足不等式组 $\begin{cases}y\geq 0\\x-2y\leq 2\\2x-y\geq 2\end{cases}$，则 $x-3y$（　　）

A．有最大值 -2，最小值 $-\frac{8}{3}$　　B．有最大值 $\frac{8}{3}$，最小值 2

C．有最大值 2，无最小值　　D．有最小值 -2，无最大值

【答案】C

【解析】画出不等式组 $\begin{cases}y\geq 0\\x-2y\leq 2\\2x-y\geq 2\end{cases}$ 表示的平面区域，如图阴影所示：



设 $z=x-3y$，则直线 $x-3y-z=0$ 是一组平行线；

当直线过点 A 时，z 有最大值，由 $\begin{cases}y=0\\x-2y=2\end{cases}$，得 $A(2,0)$；

所以 z 的最大值为 $x-3y=2-0=2$，且 z 无最小值.

故选 C.

二、填空题

14．若函数 $y=\sqrt{kx^2-6kx+(k+8)}$ (k 为常数)的定义域为 R，则 k 的取值范围是_____.

【答案】$[0,1]$

【解析】由题意，函数 $y=\sqrt{kx^2-6kx+(k+8)}$ (k 为常数)的定义域为 R，

即不等式 $kx^2-6kx+(k+8)\geq 0$ 在 R 上恒成立，

当 $k=0$ 时，不等式等价于 $8\geq 0$ 恒成立，符合题意；

当 $k\neq 0$ 时，则满足 $\begin{cases}k>0\\\Delta\leq 0\end{cases}$，即 $k>0$ 且 $(-6k)^2-4k(k+8)\leq 0$，解得 $0<k\leq 1$，

综上可得实数 k 的取值范围是 $[0,1]$.

故填 $[0,1]$

15．已知 $a>0$，$b>0$，且 $a+b=2$，则 $\frac{5}{a}+\frac{1}{5b}$ 的最小值是_____.

【答案】$\frac{18}{5}$

【解析】因为 $a+b=2$，所以 $\frac{5}{a}+\frac{1}{5b}=\frac{1}{2}(a+b)\left(\frac{5}{a}+\frac{1}{5b}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{5b}{a}+\frac{a}{5b}+\frac{26}{5}\right)$.

因为 $a>0,b>0$，所以 $\frac{5b}{a}+\frac{a}{5b}\geq 2$ (当且仅当 $a=\frac{5}{3}$，$b=\frac{1}{3}$ 时，等号成立)，

所以 $\frac{5}{a}+\frac{1}{5b}\geq\frac{1}{2}\times\left(2+\frac{26}{5}\right)=\frac{18}{5}$.

故填 $\frac{18}{5}$