考点 20　随机变量及其分布

一、选择题

1．设随机变量ξ服从正态分布$N(0,1)$，若$P(\xi>1)=p$，则$P(-1<\xi<0)=$（　　）

A．$\frac{1}{2}+p$　　B．$1-p$　　C．$\frac{1}{2}-p$　　D．$1-2p$

【答案】C

【解析】随机变量ξ服从正态分布$N(0,1)$，$\therefore P(\xi<-1)=P(\xi>1)=p$．

$P(-1<\xi<0)=\frac{1}{2}[1-2P(\xi>1)]=\frac{1}{2}-p$．

故选 C

2．有 8 件产品，其中 4 件是次品，从中有放回地取 3 次（每次 1 件），若X表示取得次品的次数，则$P(X\le 2)=$（　　）

A．$\frac{3}{8}$　　B．$\frac{13}{14}$　　C．$\frac{4}{5}$　　D．$\frac{7}{8}$

【答案】D

【解析】因为是有放回地取产品，所以每次取产品取到次品的概率为$\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$．

从中取 3 次，X为取得次品的次数，则$X\sim B\left(3,\frac{1}{2}\right)$，

$P(X\le 2)=P(X=2)+P(X=1)+P(X=0)=C_3^2\times\left(\frac{1}{2}\right)^2\times\frac{1}{2}+C_3^1\left(\frac{1}{2}\right)^3+C_3^0\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{7}{8}$，

故选 D．

3．某人射击的命中率为$p(0<p<1)$，他向一目标射击，当第一次射中目标则停止射击，射击次数的取值是（　　）

A．$1,2,3,\cdots,n$　　B．$1,2,3,\cdots,n,\cdots$　　C．$0,1,2,\cdots,n$　　D．$0,1,2,\cdots,n,\cdots$

【答案】B

【解析】由题意，当第一次射中目标则停止射击，

所以射击的次数的取值是$1,2,3,\cdots,n,\cdots$

故选 B

4．已知随机变量X的分布列为

X	-2	1	3
P	0.16	0.44	0.40

则 $E(2X+5)=$（　　）

A．1.32　　B．1.71　　C．2.94　　D．7.64

【答案】D

【解析】由题意可得，随机变量 X 的期望为 $E(X)=-2\times0.16+1\times0.44+3\times0.40=1.32$，

所以 $E(2X+5)=2E(X)+5=2.64+5=7.64$.

故选 D.

5．某校有甲、乙两个数学建模兴趣班.其中甲班有 40 人，乙班有 50 人.现分析两个班的一次考试成绩，算得甲班的平均成绩是 90 分，乙班的平均成绩是 81 分，则这两个数学建模兴趣班所有同学的平均成绩是（　　）

A．85　　B．85.5　　C．86　　D．86.5

【答案】A

【解析】由题意，这两个数学建模兴趣班所有同学的平均成绩是 $\dfrac{40\times90+50\times81}{40+50}=85$，

故选 A.

二、填空题

6．若某班 40 名同学某次考试数学成绩 X（满分 150 分）近似服从正态分布 $N(90,\sigma^2)$，已知 $P(60<X<90)=0.35$，则可估计该班 120 分以上的人数约为_____.

【答案】6

【解析】∵考试的成绩 X 服从正态分布 $N(90,\sigma^2)$，

∴考试的成绩 X 关于 $X=90$ 对称，

∵ $P(60<X<90)=0.35$，

∴ $P(90<X<120)=P(60<X<90)=0.35$，

∴ $P(X>120)=\dfrac{1-P(90<X<120)-P(60<X<90)}{2}=0.15$，

∴该班数学成绩在 120 分以上的人数约为 $40\times0.15=6$.

故填6.

7.从一批含有13只正品,2只次品的产品中,不放回地抽取3次,每次抽一只,设抽取次品数为ξ,则$E\left(5\xi+1\right)=$_____

【答案】3

【解析】抽取次品数ξ满足超几何分布：$p\left(\xi=k\right)=\frac{C_2^kC_{13}^{3-k}}{C_{15}^3}$，故$p\left(\xi=0\right)=\frac{C_2^0C_{13}^3}{C_{15}^3}=\frac{22}{35}$，

$p\left(\xi=1\right)=\frac{C_2^1C_{13}^2}{C_{15}^3}=\frac{12}{35}$，$p\left(\xi=2\right)=\frac{C_2^2C_{13}^1}{C_{15}^3}=\frac{1}{35}$，其期望$E\left(\xi\right)=0\times\frac{22}{35}+1\times\frac{12}{35}+2\times\frac{1}{35}=\frac{2}{5}$，故$E\left(5\xi+1\right)=5\times E\left(\xi\right)+1=3$.

故填3

8．一个袋中装有大小相同的5个白球和3个红球，现在不放回的取2次球，每次取出一个球，记“第1次拿出的是白球”为事件A，“第2次拿出的是白球”为事件B，则$P\left(B\middle|A\right)$是_____

【答案】$\frac{4}{7}$

【解析】由题可知：$P\left(A\right)=\frac{5}{8},P\left(AB\right)=\frac{5\times4}{8\times7}=\frac{5}{14}$

所以$P\left(B\middle|A\right)=\frac{P\left(AB\right)}{P\left(A\right)}=\frac{4}{7}$

故填$\frac{4}{7}$

三、解答题

9．在某次投篮测试中，有两种投篮方案：方案甲：先在A点投篮一次，以后都在B点投篮；方案乙：始终在B点投篮.每次投篮之间相互独立.某选手在A点命中的概率为$\frac{3}{4}$，命中一次记3分，没有命中得0分；在B点命中的概率为$\frac{4}{5}$，命中一次记2分，没有命中得0分，用随机变量ξ表示该选手一次投篮测试的累计得分，如果ξ的值不低于3分，则认为其通过测试并停止投篮，否则继续投篮，但一次测试最多投篮3次.

（1）若该选手选择方案甲，求测试结束后所得分ξ的分布列和数学期望.

（2）试问该选手选择哪种方案通过测试的可能性较大？请说明理由.

【解析】（1）在 A 点投篮命中记作 A，不中记作 $\overline{A}$，在 B 点投篮命中记作 B，不中记作 $\overline{B}$，

其中 $P(A)=\frac{3}{4},P(\overline{A})=1-\frac{3}{4}=\frac{1}{4},P(B)=\frac{4}{5},P(\overline{B})=1-\frac{4}{5}=\frac{1}{5}$，

ξ 的所有可能取值为 $0,2,3,4$，

则 $P(\xi=0)=P(\overline{A}\overline{B}\overline{B})=P(\overline{A})P(\overline{B})P(\overline{B})=\frac{1}{4}\times\frac{1}{5}\times\frac{1}{5}=\frac{1}{100}$，

$P(\xi=2)=P(\overline{A}B\overline{B})+P(\overline{A}\overline{B}B)\ =2\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{5}\times\frac{4}{5}=\frac{8}{100}$，

$P(\xi=3)=P(A)=\frac{3}{4}=\frac{75}{100}$，

$P(\xi=4)=P(\overline{A}BB)=P(\overline{A})P(B)P(B)=\frac{1}{4}\times\frac{4}{5}\times\frac{4}{5}=\frac{16}{100}$.

ξ 的分布列为：$P(\xi=0)=\frac{1}{100}$，$P(\xi=2)=\frac{2}{25}$，$P(\xi=3)=\frac{3}{4}$，$P(\xi=4)=\frac{4}{25}$.

所以 $E(\xi)=0\times\frac{1}{100}+2\times\frac{8}{100}+3\times\frac{75}{100}+4\times\frac{16}{100}=\frac{305}{100}=3.05$，

所以，ξ 的数学期望为 3.05；

（2）选手选择方案甲通过测试的概率为 $P_1=P(\xi\geq3)=\frac{75}{100}+\frac{16}{100}=\frac{91}{100}=0.91$，

选手选择方案乙通过测试的概率为

$P_2=P(\xi\geq3)\ =2\times\frac{1}{5}\times\frac{4}{5}\times\frac{4}{5}+\frac{4}{5}\times\frac{4}{5}\ =\frac{112}{125}=\frac{896}{1000}=0.896$，

因为 $P_2<P_1$，所以该选手应选择方案甲通过测试的概率更大.

10．现有 4 个人去参加某娱乐活动，该活动有甲、乙两个游戏可供参加者选择.为增加趣味性，约定：每个人通过掷一枚质地均匀的骰子决定自己去参加哪个游戏，掷出点数为 1 或 2 的人去参加甲游戏，掷出点数大于 2 的人去参加乙游戏.

（1）求这 4 个人中恰有 2 人去参加甲游戏的概率；

（2）求这 4 个人中去参加甲游戏的人数大于去参加乙游戏的人数的概率；

（3）用 X，Y 分别表示这 4 个人中去参加甲、乙游戏的人数，记 $\xi=|X-Y|$，求随机变量 ξ 的分布列与数学期望 $E\xi$.

【解析】依题意，这 4 个人中，每个人去参加甲游戏的概率为 $\frac{1}{3}$，去参加乙游戏的概率为 $\frac{2}{3}$.

设“这 4 个人中恰有 i 人去参加甲游戏”为事件 A_i (i＝0,1,2,3,4)，则 $P(A_i)=C_4^i(\frac{1}{3})^i(\frac{2}{3})^{4-i}$

（1）这 4 个人中恰有 2 人去参加甲游戏的概率 $P(A_2)=C_4^2(\frac{1}{3})^2(\frac{2}{3})^2=\frac{8}{27}$

（2）设“这 4 个人中去参加甲游戏的人数大于去参加乙游戏的人数”为事件 B，则 $B=A_3\cup A_4$，

由于 A_3 与 A_4 互斥，故 $P(B)=P(A_3)+P(A_4)=C_4^3(\frac{1}{3})^3(\frac{2}{3})+C_4^4(\frac{1}{3})^4=\frac{1}{9}$

所以，这 4 个人去参加甲游戏的人数大于去参加乙游戏的人数的概率为 $\frac{1}{9}$

（3）ξ的所有可能取值为 0,2,4.由于 A_1 与 A_3 互斥， A_0 与 A_4 互斥，故

$P(\xi=0)=P(A_2)=\frac{8}{27}$， $P(\xi=2)=P(A_1)+P(A_3)=\frac{40}{81}$

$P(\xi=4)=P(A_0)+P(A_4)=\frac{17}{81}$.

所以ξ的分布列是

ξ	0	2	4
P	$\frac{8}{27}$	$\frac{40}{81}$	$\frac{17}{81}$

随机变量ξ的数学期望 $\mathrm{E}\xi=0\times\frac{8}{27}+2\times\frac{40}{81}+4\times\frac{17}{81}=\frac{148}{81}$.

一、选择题

11．预测人口的变化趋势有多种方法，“直接推算法”使用的公式是 $P_n=P_0(1+k)^n$（$k>-1$），P_n 为预测人口数，P_0 为初期人口数，k 为预测期内年增长率，n 为预测期间隔年数．如果在某一时期有 $-1<k<0$，那么在这期间人口数（　　）

A．呈下降趋势　　B．呈上升趋势　　C．摆动变化　　D．不变

【答案】A

【解析】当 $-1<k<0$ 时，$0<1+k<1,0<(1+k)^n<1$，

所以 $P_n=P_0(1+k)^n<P_0$，呈下降趋势．

故选 A

12．某工厂生产的零件外直径（单位：cm）服从正态分布 $N(10,0.04)$，今从该厂上、下午生产的零件中各随机取出一个，测得其外直径分别为 9.75cm 和 9.35cm，则可认为（　　）

A．上午生产情况异常，下午生产情况正常

B．上午生产情况正常，下午生产情况异常

C．上、下午生产情况均正常

D．上、下午生产情况均异常

【答案】B

【解析】因为服从正态分布 $N(10,0.04)$，

所以 $\mu=10,\sigma=0.2\therefore x\in(10-0.2\times3,10+0.2\times3)=(9.4,10.6)$

所以上午生产情况正常，下午生产情况异常,

故选 B.

二、填空题

13．设 $0<P<1$，若随机变量 ξ 的分布列是：

ξ	0	1	2
P	$\frac{P}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1-P}{2}$

则当 P 变化时，$D(\xi)$ 的极大值是_____.

【答案】$\frac{1}{2}$.

【解析】因为 $E(\xi)=0\times\frac{p}{2}+1\times\frac{1}{2}+2\times\frac{1-p}{2}=\frac{3-2p}{2}$，

所以 $D(\xi)=\frac{p}{2}(0-\frac{3-2p}{2})^2+\frac{1}{2}(1-\frac{3-2p}{2})^2+\frac{1-p}{2}(2-\frac{3-2p}{2})^2=\frac{1}{4}[2-(2p-1)^2]\le\frac{1}{2}$，

当且仅当 $p=\frac{1}{2}$ 时取等号，因此 $D(\xi)$ 的极大值是 $\frac{1}{2}$.

故填 $\frac{1}{2}$

14．在一个均匀小正方体的六个面中,三个面上标以数字 0,两个面上标以数字 1,一个面上标以数字 2,将这个小正方体抛掷 2 次,则向上一面上的数字之积的均值是____.

【答案】$\frac{4}{9}$

【解析】$P(x=0)=\frac{3\times3+2\times3\times2+1\times3\times2}{36}=\frac{27}{36}$，$P(x=1)=\frac{2\times2}{36}=\frac{1}{9}$，

$P(x=2)=\frac{2\times 2}{36}=\frac{1}{9}$，$P(x=4)=\frac{1}{36}$，列表

x	0	1	2	4
P	$\frac{27}{36}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{36}$

所以 $EX=0\times\frac{27}{36}+1\times\frac{1}{9}+2\times\frac{1}{9}+4\times\frac{1}{36}=\frac{4}{9}$.

故填 $\frac{4}{9}$

三、解答题

15．为了更好地贯彻党的“五育并举”的教育方针，某市要对全市中小学生“体能达标”情况进行了解，决定通过随机抽样选择几个样本校对学生进行体能达标测试，并规定测试成绩低于 60 分为不合格，否则为合格，若样本校学生不合格人数不超过其总人数的 5%，则该样本校体能达标为合格.已知某样本校共有 1000 名学生，现从中随机抽取 40 名学生参加体能达标测试，首先将这 40 名学生随机分为甲、乙两组，其中甲乙两组学生人数的比为 3:2，测试后，两组各自的成绩统计如下：甲组的平均成绩为 70，方差为 16，乙组的平均成绩为 80，方差为 36.

（1）估计该样本校学生体能测试的平均成绩；

（2）求该样本校 40 名学生测试成绩的标准差 s；

（3）假设该样本校体能达标测试成绩服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，用样本平均数 $\overline{x}$ 作为 μ 的估计值 $\hat{\mu}$，用样本标准差 s 作为 σ 的估计值 $\hat{\sigma}$，利用估计值估计该样本校学生体能达标测试是否合格？

（注：1.本题所有数据的最后结果都精确到整数；2 若随机变量 z 服从正态分布，则

$p(\mu-\sigma<Z<\mu+\sigma)=0.6826$，$p(\mu-2\sigma<Z<\mu+2\sigma)=0.9544$，

$p(\mu-3\sigma<Z<\mu+3\sigma)=0.9974$）

【解析】（1）由题知，甲、乙两组学生数分别为 24 和 16，

则这 40 名学生测试成绩的平均分 $\overline{x}=\frac{70\times 24+80\times 16}{40}=74$

故可估计该样本校学生体能测试的平均成绩为 74，.

（2）由 $s^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2$ 变形得 $s^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i^2-n\overline{x}^2)$

设第一组学生的测试成绩分别为 $x_1,x_2,x_3,\ldots,x_{24}$，

第二组学生的测试成绩分别为 $x_{25},x_{26},x_{27},\ldots,x_{40}$，

则第一组的方差为

$s_1^2=\frac{1}{24}\left[\left(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_{24}^2\right)-24\times70^2\right]=4^2$，

解得 $x_1^2+x_2^2+\ldots+x_{24}^2=24\times\left(16+70^2\right)$.

第二组的方差为

$s_2^2=\frac{1}{16}\left[\left(x_{25}^2+x_{26}^2+\cdots+x_{40}^2\right)-16\times80^2\right]=6^2$

解得 $x_{25}^2+x_{26}^2+\cdots+x_{40}^2=16\times\left(36+80^2\right)$.

这 40 名学生的方差为

$s^2=\frac{1}{40}\left[\left(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_{24}^2\right)+\left(x_{25}^2+x_{26}^2+\ldots+x_{40}^2\right)-40\times\overline{x}^2\right]$

$=\frac{1}{40}\left[24\times\left(16+70^2\right)+16\times\left(36+80^2\right)-40\times74^2\right]=48$，

所以 $s=\sqrt{48}=4\sqrt{3}\approx7$.

综上，标准差 $s=7$.

（3）由 $\overline{x}=74$， $s\approx7$，得 μ 的估计值为 $\hat{\mu}=74$， σ 的估计值 $\hat{\sigma}=7$

由 $P\left(\mu-2\sigma<X<\mu+2\sigma\right)=0.9544$，

得 $P\left(74-2\times7<X<74+2\times7\right)=0.9544$，

即 $P\left(60<X<88\right)=0.9544$

所以 $P\left(X<60\right)=P\left(X\geq88\right)=\frac{1}{2}\left[1-P\left(60<X<88\right)\right]=\frac{1}{2}\left(1-0.9544\right)=0.0228$.

从而，在全校 1000 名学生中，“不合格”的有 $1000\times0.0228=22.8\approx23$（人）

而 $\frac{23}{1000}<\frac{50}{1000}=5\%$，

故可估计该样本校学生“体能达标”测试合格.