专题 4.2 静力学正交分解与临界现象（精讲精练）

第一部分基础知识快速过

一、什么是正交分解

①正交分解的定义：将一个力分解为 Fx 和 Fy 两个相互垂直的分力的方法，叫作力的正交分解。

②从力的矢量性来看，是力 F 的分矢量；从力的计算来看，力的方向可以用正负号来表示，分量为正值表示分矢量的方向跟规定的正方向相同，分量为负值表示分矢量的方向跟规定的正方向相反．这样，就可以把力的矢量运算转变成代数运算．所以，力的正交分解法是处理力的合成分解问题的最重要的方法，是一种解析法．特别是多力作用于同一物体时。它是力的合成的逆运算。

二、正交分解解题的基本步骤：

第一步，选定研究对象.并以质点的形式对进行表示。

第二步，对选定的研究对象进行受力分析。

第三步，建立直角坐标系.一般来讲在水平面内可以任意建立坐标系，但是在斜面上最好沿物体下滑的方向建立 x 轴，然后建立 y 轴。

第四步，分析加速度方向。必要时也可将加速度进行正交分解，以便于做题。

第五步，表达合外力。

第六步，列出 x 方向，与 y 方向上的牛顿第二定律方程。

第七步，若需其他方程，也要列出需要的方程，然后求解。

第八步，检验是否符合实际情况。

三、应用正交分解的方法处理问题时的注意要点：

1.力是矢量 F′在 X 轴 Y 轴上的分矢量 F′x 和 F′y 是矢量，分量为正值表示分矢量的方向跟坐标轴的方向相同，分量为负值表示分矢量的方向跟坐标轴的方向相反。

2．确定矢量正交分量的坐标轴，不一定是取竖直方向和水平方向。例如，分析物体在斜面上的受力情况，一般选取 x 轴与斜面平行，y 轴与斜面垂直。坐标轴的选取是以使问题的分析简化为原则。通常选取坐标轴的方法是：选取一条坐标轴与物体运动的加速度的方向相同（包括处理物体在斜面上运动的问题），以求使物体沿另一条坐标轴的加速度为零，这样就可得到外力在该坐标轴上的分量之和为零，从而给解题带来方便。

题型一、利用正交分解法处理静力学平衡问题

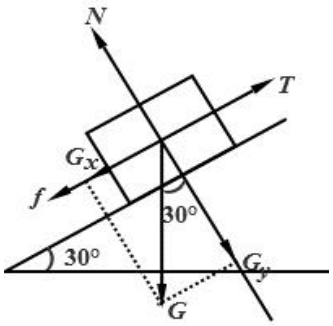
1.（2019 全国 2）物块在轻绳的拉动下沿倾角为 30°的固定斜面向上匀速运动，轻绳与斜面平行。已知物块

与斜面之间的动摩擦因数为$\frac{\sqrt{3}}{3}$，重力加速度取 10m/s²。若轻绳能承受的最大张力为 1500 N，则物块的质量最大为

A. 150kg　　B. $100\sqrt{3}$ kg　　C. 200 kg　　D. $200\sqrt{3}$ kg

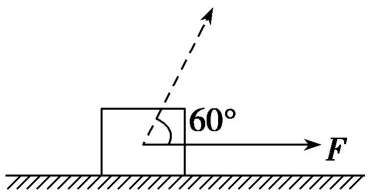
【答案】A

【解析】$T=f+mg\sin\theta$，$f=\mu N$，$N=mg\cos\theta$，带入数据解得：m=150kg，故 A 选项符合题意



2.(2017·高考全国卷Ⅱ)如图，一物块在水平拉力 F 的作用下沿水平桌面做匀速直线运动．若保持 F 的大小不变，而方向与水平面成 60°角，物块也恰好做匀速直线运动．物块与桌面间的动摩擦因数为(　　)

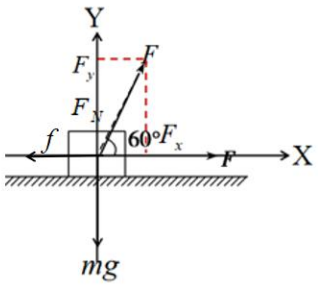
A．$2-\sqrt{3}$　　B.$\frac{\sqrt{3}}{6}$　　C.$\frac{\sqrt{3}}{3}$　　D.$\frac{\sqrt{3}}{2}$



【答案】C

【解析】开始时力 F 水平拉动物体匀速运动，可得：F＝μmg....(1)；

F 的大小不变方向与水平面成 60°角拉动物体时，仍然匀速直线运动　结合平衡关系，对物体受力分析，　如图所示利用正交分解的方法可知：



水平方向：F.cos60=f.....(2)

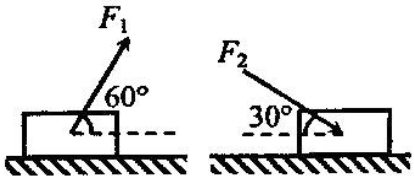
竖直方向：F.sin60+FN=mg...(3)

f=uFN.....(4)

联立可得：Fcos 60°＝μ(mg－Fsin 60°)

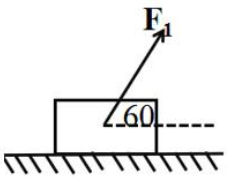
μ＝ $\frac{\sqrt{3}}{3}$，故选 C.

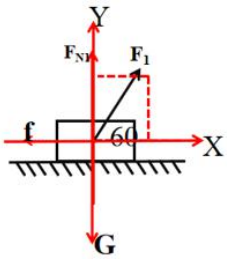
3.如图所示，一物块置于水平地面上.当用与水平方向成 60 角的力 F1 拉物块时，物块做匀速直线运动；当改用与水平方向成 30 角的力 F2 推物块时，物块仍做匀速直线运动.若力 F1 和 F2 的大小相等，则物块与地面之间的动摩擦因数为？



【答案】$\mu = 2-\sqrt{3}$

【解析】对物体进行受力分析，结合平衡关系，利用正交分解的方法处理如图所示：

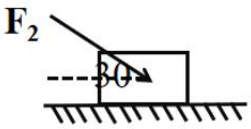


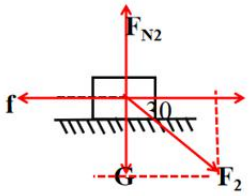


水平方向：$F1.\cos 60 - f_1 = 0(1)$

竖直方向：$FN_1 + F1.\sin 60 - G = 0(2)$

联立（1）、（2）可得：$F1.\cos 60 - \mu(G - F1.\sin 60) = 0$（5）





水平方向：$F2.\cos 30-f_2=0(3)$

竖直方向：$FN_2-F2.\sin 30-G=0(4)$

联立（3）（4）可得：$F2.\cos 30-\mu(G+F2.\sin 30)=0(6)$

令$F1=F2$,(5)(6)联立：得$\mu=2-\sqrt{3}$

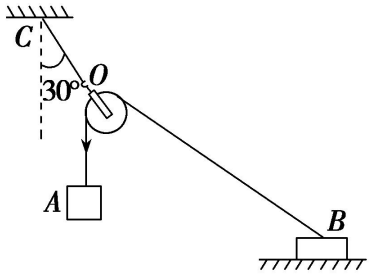
4.(多选)如图所示，细绳 CO 与竖直方向成 30°角，A、B 两物体用跨过轻质滑轮(可看成质点)的细绳相连．已知物体 B 的重力 m_Bg＝100 N，地面对物体 B 的支持力 F_N＝80 N．下列说法正确的是(　　)

A．物体 A 的重力为 40 N

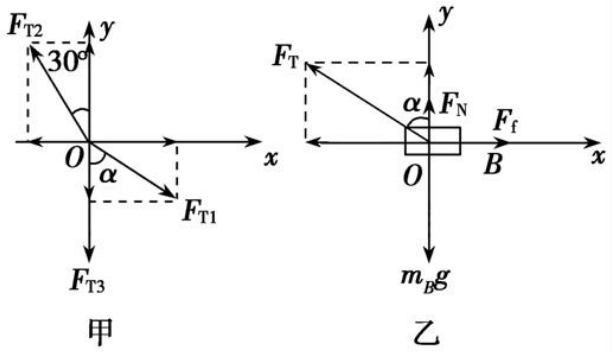
B．物体 B 与地面间的摩擦力大小为 20 N

C．细绳 CO 受到的拉力为 $40\sqrt{3}$ N

D．OB 与竖直方向的夹角为 60°



【答案】ACD



【解析】画出定滑轮的轴心 O 的受力分析示意图，选取直角坐标系，如图甲所示，根据平衡条件得 $F_{T1}\sin\alpha-F_{T2}\sin 30°=0$，$F_{T2}\cos 30°-F_{T1}\cos\alpha-F_{T3}=0$，其中 $F_{T1}=F_{T3}=m_Ag$，联立解得$\alpha=60°$，选项 D 正确；画出物体 B 的受力分析示意图，选取直角坐标系，如图乙所示，根据平衡条件得 $F_f-F_{T1}\sin\alpha=0$，$F_N+F_{T1}\cos\alpha-m_Bg=0$，联立并代入数据解得 $F_{T1}=40$ N，$F_{T2}=40\sqrt{3}$ N，$F_f=20\sqrt{3}$ N，选项 B 错误，C 正确；$m_Ag=F_{T1}=40$ N，选项 A 正确．

方法总结：

当物体处于平衡状态时，如果物体的受力个数为三个力，尽量利用黄金三角形的方法处理；

当物体处于平衡状态时，受力的个数超过三个，一般使用万能方法“正交分解”；

利用正交分解法处理问题时，一般将物体所受的力分解为相互垂直的两组，每组力都满足平衡条件.

题型二、利用正交分解法处理静力学平衡的临界现象

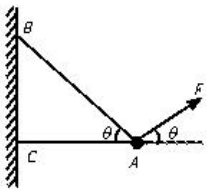
导入语：

当某物理量的变化达到某一值时，从而“恰能”使物体或者”恰好不能“使物体处于平衡状态。在问题的描述中常用“刚好”、“刚能”、“恰好”等语言叙述。

两种常见的模型：细绳模型、摩擦自锁型

解决方案：抓住平衡这一特点利用，矢量三角形法、相似三角形法、或正交分解处理。

5．物体 A 的质量为 2 kg，两根轻细绳 b 和 c 的一端连接于竖直墙上，另一端系于物体 A 上，在物体 A 上另施加一个方向与水平线成θ角的拉力 F，相关几何关系如图所示，θ＝60°。若要使两绳都能伸直，求拉力 F 的取值范围。(g 取 10 m/s2)



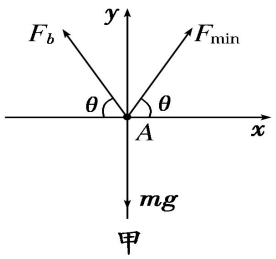
【答案】$\frac{20\sqrt{3}}{3} \le F \le \frac{40\sqrt{3}}{3}$

【解析】c 绳刚好伸直时，取临界点令 Fc=0，拉力 F 最小，物体 A 受力如图甲所示。

由正交分解法可得：

水平：$F_{\min}.\cos\theta = F_b.\cos\theta,$

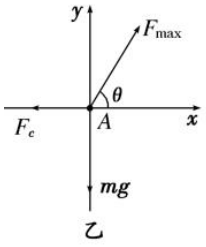
竖直：$F_{\min}.\sin\theta + F_b.\sin\theta = mg$

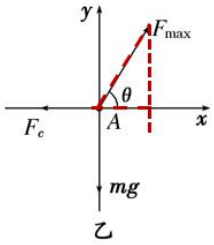


甲

代入相关参数联立解得解得 Fmin＝$\frac{20\sqrt{3}}{3}$

当 b 绳刚好拉直时，取临界点令 Fb=0，拉力最大，物体 A 受力如图乙所示，结合矢量三角形法即可求得：





$$\sin\theta = \frac{mg}{F_{MAX}}$$

$$F_{MAX} = \frac{mg}{\sin\theta} = \frac{40\sqrt{3}}{3}$$

故 F 的范围是：$\frac{20\sqrt{3}}{3} \le F \le \frac{40\sqrt{3}}{3}$

思考：为什么同样是三力平衡，乙图用的时矢量三角形法，甲图则用的是正交分解。

方法总结：

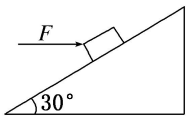
（1）注意：对于绳子类的问题所谓绳子伸直的临界条件是绳子上的张力为零；

（2）当物体处于三力平衡时绝大多数的问题可以通过三角形的原则处理，但有的题型尽管物体受力属于三力平衡态，因为题中所给出的条件不满足三角形法解题的基本要求；依然需要用正交分解法处理；所以说正交分解法是万能的；理论上来讲，但凡是处理矢量之间的关系，都可以用正交分解法；

6.如图所示，质量为 m 的物体放在一固定斜面上，当斜面倾角为 30°时恰能沿斜面匀速下滑。对物体施加一大小为 F 水平向右的恒力，物体可沿斜面匀速向上滑行。设最大静摩擦力等于滑动摩擦力，当斜面倾角增大并超过某一临界角α时，不论水平恒力 F 多大，都不能使物体沿斜面向上滑行，试求：

(1)物体与斜面间的动摩擦因数；

(2)这一临界角α的大小。



【答案】$\frac{\sqrt{3}}{3}$，α=60

【解析】

由题意可知：当$\theta = 30^{\circ}$是物体匀速下滑，由平衡关系可得：

$$mg\sin\theta = \mu mg\cos\theta$$

$$\mu = \tan\theta = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

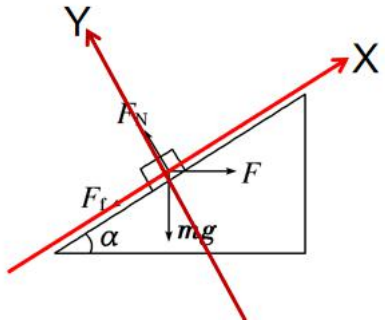
【解析】在处理该问时通过读题一定要挖掘出题干中设计的三个隐含条件是处理本题的关键：

（1）物体处于平衡态；

（2）物体所受的摩擦力达到最大静摩擦力；

（3）外力 F 趋于无穷大；

(2)设斜面倾角为α时，无论 F 多大都不能推动物块。受力情况如图所示，由平衡条件可得:



$F\cos\alpha = mg\sin\alpha + F_f(1);$

$F_N = mg\cos\alpha + F\sin\alpha(2);$

$F_f = \mu F_N(3);$

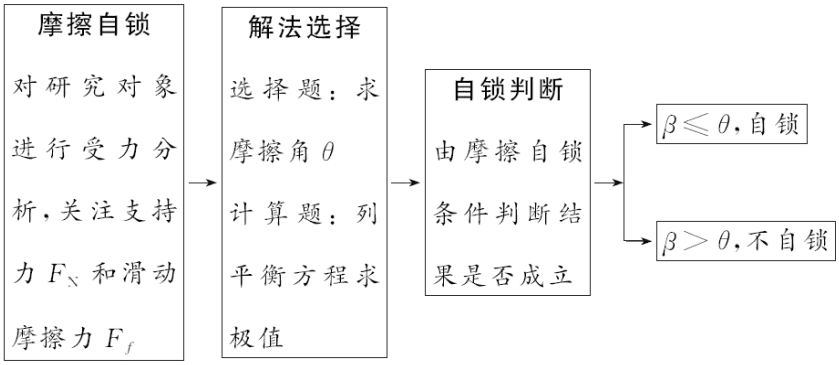
联立1,2,3式，可得：$F = \dfrac{mg\sin\alpha + \mu mg\cos\alpha}{\cos\alpha - \mu\sin\alpha}$

根据题据题意,当$\cos\alpha = \mu\sin\alpha$时；分式趋于无穷大，

F趋于无穷大；无论F为多大时都不能推动物体。

故$\mu = \dfrac{1}{\tan\alpha}$；$\mu = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$故$\alpha = 60^\circ$

方法总结：此类问题叫做摩擦自锁现象处理摩擦自锁类问题的解题步骤如下：



题型三、利用正交分解法解决动力学问题

7.（2013 年安徽）如图所示，细线的一端系一质量为 m 的小球，另一端固定在倾角为θ的光滑斜面体顶端，细线与斜面平行．在斜面体以加速度 a 水平向右做匀加速直线运动的过程中，小球始终静止在斜面上，小球

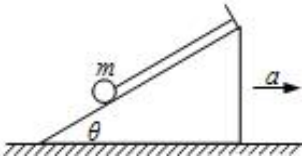
受到细线的拉力 T 和斜面的支持力为 FN 分别为（重力加速度为 g）

A:T=m（gsinθ+acosθ）FN=m（gcosθ-asinθ）

B:T=m（gsinθ+acosθ）FN=m（gsinθ-acosθ）

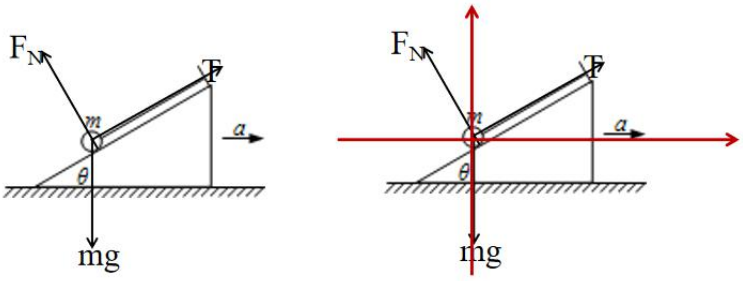
C:T=m（gsinθ+acosθ）FN=m（gsinθ-acosθ）

D:T=m（asinθ-gcosθ）FN=m（gsinθ+acosθ）



【答案】A

【解析】对小球受力分析如左图所示，建立水平竖直的直角坐标系，如右图所示；利用正交分解法可得：



水平：$T.\cos\theta - F_N.\sin\theta = ma$

竖直：$F_N.\cos\theta + T.\sin\theta = mg$

该方法虽然可以列出水平与竖直方向相应的独立方程式；但是在进行求解时，数学运算却非常困难；可见该方法不恰当，主要原因是，坐标系的建立不合理；

注意：进行正交分解时分解的不一定是力也有可能是加速度。

建立沿斜面与垂直于斜面方向的直角坐标系；如图所示：

沿斜面：$T - mg\sin\theta = ma.\cos\theta$

垂直斜面：$mg\cos\theta - F_N = ma\sin\theta$

沿斜面：$T = ma.\cos + mg\sin\theta$

垂直斜面：$mg\cos\theta - ma\sin\theta = F_N$

故本题的正确选项是 A

方法总结：

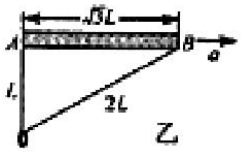
利用正交分解法处理力学问题，在直角坐标系的建立上原则上要让更多的矢量落在坐标轴上；但有时一共有 4 个矢量，沿不同的方向建立坐标系时分别只能让两个矢量落在坐标轴上，此时要注意：一定要保

证被求的矢量不要被分解掉，也就是说坐标轴要落在被求的矢量上。

8.质量为 M、长为 L 的杆水平放置，杆两端 A、B 系着长为 3L 的不可伸长且光滑的柔软轻绳，绳上套着一质量为 m 的小铁环。已知重力加速度为 g，不计空气影响。若杆与环保持相对静止，在空中沿 AB 方向水平向右做匀加速直线运动，此时环恰好悬于 A 端的正下方，如图乙所示。

①求此状态下杆的加速度大小 a；

②为保持这种状态需在杆上施加一个多大的外力方向如何？

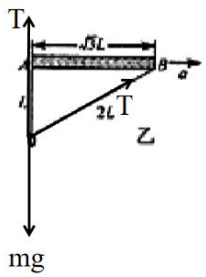


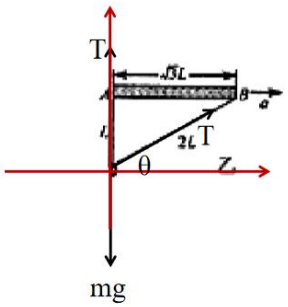
【答案】

(1) $a_{杆}=a_{环}=\frac{\sqrt{3}}{3}g$

（2）$F=\frac{2\sqrt{3}}{3}(m+M)g$ 与轻杆成 60 角

【解析】因为圆环、轻杆整体无相对运动具有共同大小的加速度，所以只要求得圆环的加速度大小即可，圆环受力比轻杆简单，如图所示，对圆环受力分析，结合正交分解找到相应参数之间的关系：



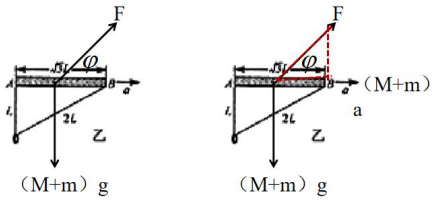


水平：$T.\cos 30=ma_{环}(1);$

竖直：$T.\sin 30+T=mg(2);$

$a_{环}=\frac{\sqrt{3}}{3}g$

选择轻杆和圆环整体分析：整体之所以能够维持现有的运动状态，需要施加一个斜向右上方的外力 F，假设该力与轻杆之间的夹角为　　，如图所示，对整体受力分析，结合矢量三角形法，将物体所受的外力与合外力放在一个封闭的三角形中，利用矢量三角法即可求得：



$$\tan\phi=\frac{(m+M)a}{(m+M)g}=\sqrt{3}$$

$$\phi=60;.....\sin 60=\frac{(m+M)g}{F};$$

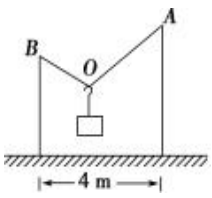
$$F=\frac{2\sqrt{3}}{3}(m+M)g$$

方法总结：根据物体的受力个数与状态不同选择合理的处理手段

体所处状态	平衡态		非平衡态	
受力个数	受三个力	受四个以上的力	受两个外力	受三个以上的外力
处理方法	黄金三角形法（矢量三角形与相似三角形）优先使用三角形法，如三角形法不能处理，则使用正交分解法处理。	正交分解法	黄金三角形法（矢量三角形与相似三角形）优先使用三角形法，如三角形法不能处理，则使用正交分解法处理。	正交分解法（将物体所受的外力与合外力放在封闭的三角形中处理）。

题型四、利用正交分解法处理动态平衡类问题

9.如图所示，长为 5 m 的细绳的两端分别系于竖立在地面上的相距为 4 m 的两杆的顶端 A、B，绳上挂一个光滑的轻质挂钩，其下连着一个重为 12 N 的物体，平衡时绳中的张力 FT 为多大？当 A 点向上移动少许，重新平衡后，绳与水平面夹角、绳中张力如何变化？



【答案】T=10N，绳子的拉力大小不变

【解析】

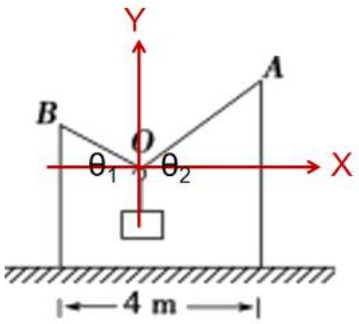
由正交分解可知：

$T_1.\cos\theta_1 = T_2.\cos\theta_2(1)$

$T_1.\sin\theta_1 + T_2.\sin\theta_2 = mg(2)$

因$T_1 = T_2$故$\theta_1 = \theta_2$故（2）式可演变为：

$2T\sin\theta = mg(3)$



设：OB的长度为$l_1$$OA$的、长度为$l_2$，

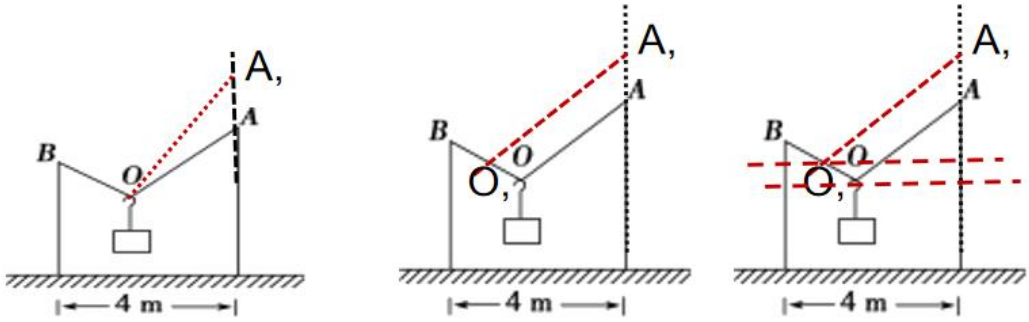
有几何关系得：$OB.\cos\theta + OA.\cos\theta = d(4)$

$\cos\theta(OA+OB) = d \Rightarrow \cos\theta = \frac{d}{l} = \frac{4}{5}(5)$

故$\theta = 37(6)$

将（6）式代入（3）式,物体重 12N,可得：T=10N

当 A 点向上移动少许，重新平衡后，绳与水平面夹角、绳中张力如何变化？



当 A 点上移后，结点 O 的位置不可能像左图一样保持不变，如果保持 O 的位置不变就不可能平衡。所以 O 点的位置一定要上移；因此 O 点的位置要上移到达 O，因为绳子的总长度 l 不变，d 也不变；

由几何关系：$l_1.\cos\theta + l_2\cos\theta = d$ 所以：θ角不变，又因为 O 点属于活结，所以 O 点两侧绳子的拉力大小相等，根据正交分解结果：$2T.\sin\theta = mg$ 故移动前后绳子的拉力大小不变。

方法总结：

1、动态平衡分析类问题的两种分析思路；

当物体处于三力平衡时，用矢量三角形或相似三角形法；

当物体处于多力平衡时，用正交分解法处理；

2、活结死结

“活结”与“死结”绳是物体间连接的一种方式，当多个物体用绳连接的时候，其间必然有“结”的出现，根据“结”的形式不同，可以分为“活结”和“死结”两种。“活结”是绳子间的一种光滑连接，其特点是结的两端同一绳上的张力相等；而“死结”是绳子间的一种固定连接，结的两端绳子上的张力不一定相等。

本题的 O 点属于活结，不会破坏绳子的整体性，结点 O 两端的拉力大小是相等的。处理死结类的动态平衡一般使用三角形法，处理活结类的动态问题一般采用正交分解；

3、活结类动态分析的重要结论：

（1）研究方法用的是正交分解结合几何关系处理。

（2）研究显示活结在进行动态变化时有三个特点：

1、结点的位置发生改变。

2、线与水平方向的夹角大小不变。

3、细 线的拉力大小也不变。

4、细线的总长度与合外力大小都不变。

简称：活结三不变、一变。