衔接点 01 十字相乘法因式分解的强化

【基础内容与方法】

二次三项式的概念

（1）多项式ax^2+bx+c，称为字母x的二次三项式，其中ax^2称为二次项，bx为一次项，c为常数项.

例如：x^2-2x-3和x^2+5x+6都是关于x的二次三项式.

（2）在多项式$x^2-6xy+8y^2$中，如果把y看作常数，就是关于x的二次三项式；如果把x看作常数，就是关于y的二次三项式.

（3）在多项式$2a^2b^2-7ab+3$中，把ab看作一个整体，即$2(ab)^2-7(ab)+3$，就是关于ab的二次三项式. 同样，多项式$(x+y)^2+7(x+y)+12$，把$x+y$看作一个整体，就是关于$x+y$的二次三项式.

类型一：对于二次项系数为 1 的二次三项式$x^2+(p+q)x+pq=(x+p)(x+q)$

例 1：分解因式：x^2+5x+6

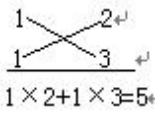
【答案】$(x+2)(x+3)$

【解析】将 6 分成两个数相乘，且这两个数的和要等于 5.

由于 6=2×3=(-2)×(-3)=1×6=(-1)×(-6)，从中可以发现只有 2×3 的分解适合，即 2+3=5.

解：$x^2+5x+6=x^2+(2+3)x+2\times3$

$=(x+2)(x+3)$

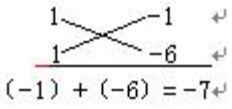


例 2：分解因式：x^2-7x+6

【答案】$(x-1)(x-6)$

【解析】解：原式=$x^2+[(-1)+(-6)]x+(-1)(-6)$

$=(x-1)(x-6)$



考点练习：分解因式

1. $x^2+14x+24$

解：原式=$(x+12)(x+2)$

2. $a^2-15a+36$

原式=$(a-12)(a-3)$

3. x^2+4x-5

原式=$(x+5)(x-1)$

4. $x^2+5x-24$

原式=$(x+8)(x-3)$

5. x^2+x-2

原式=$(x+2)(x-1)$

6. $y^2-2y-15$

原式=$(y-5)(x+3)$

7. $x^2-10x-24$

原式=$(x-12)(x+2)$

8. $x^2+2x-24$

原式=$(x+6)(x-4)$

类型二：对于二次项系数不是 1 的二次三项式

$$ax^2+bx+c=a_1a_2x^2+(a_1c_2+a_2c_1)x+c_1c_2=(a_1x+c_1)(a_2x+c_2)$$

如：二次项系数不为 1 的二次三项式 ax^2+bx+c.

条件：（1）$a=a_1a_2$ a_1 c_1，

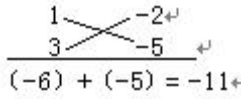
（2）$c=c_1c_2$ a_2 c_2，

（3）$b=a_1c_2+a_2c_1$ $b=a_1c_2+a_2c_1$.

分解结果：$ax^2+bx+c=(a_1x+c_1)(a_2x+c_2)$.

例 3：分解因式 $3x^2-11x+10$.

分析：



解：$3x^2-11x+10=(x-2)(3x-5)$.

考点练习：分解因式

1. $5x^2+7x-6$　　2. $3x^2-7x+2$　　3. $10x^2-17x+3$

解：原式=$(5x-3)(x+2)$　原式=$(3x-1)(x-2)$　原式=$(5x-1)(2x-3)$

4. $-6y^2+11y+10$　　5. $5x^2-17xy-12y^2$　　6. $15x^2+7xy-4y^2$

原式=$(3x+2)(-2x+5)$　原式=$(5x+3y)(x-4y)$　原式=$(3x-y)(5x+4y)$

7. $\frac{1}{4}x^2-\frac{3}{4}xy-\frac{5}{2}y^2$　　8. $2x^2-(2a+1)x+a$

原式=$\frac{1}{4}(x-5y)(x+2y)$　原式=$(2x-1)(x-a)$

9. $2(6x^2+x)-11(6x^2+x)+5$

原式=$(12x^2+2x-1)(6x-5)(x+1)$

类型三：十字相乘法的进阶

（一）换元法与十字相乘法综合

例 4：分解因式 $2x^4-x^3-6x^2-x+2$

解：原式=$x^2(2x^2-x-6-\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2})=x^2[2(x^2+\frac{1}{x^2})-(x+\frac{1}{x})-6]$

设 $x+\frac{1}{x}=t$，则 $x^2+\frac{1}{x^2}=t^2-2$

∴原式=$x^2[2(t^2-2)-t-6]$

$=x^2(2t^2-t-10)$

$=x^2(2t-5)(t+2)$

$$=x^2\left(2x+\frac{2}{x}-5\right)\left(x+\frac{1}{x}+2\right)$$
$$=x\cdot\left(2x+\frac{2}{x}-5\right)\cdot x\left(x+\frac{1}{x}+2\right)$$
$$=\left(2x^2-5x+2\right)\left(x^2+2x+1\right)$$
$$=(x+1)^2(2x-1)(x-2)$$

考点练习：选用适当的方法分解因式

1. $6x^4+7x^3-36x^2-7x+6$

解：原式$=x^2(6x^2+7x-36-\frac{7}{x}+\frac{6}{x^2})$

$$=x^2\left[\left(6(x^2+\frac{1}{x^2})\right)+7\left(x-\frac{1}{x}\right)-36\right]$$

设$x-\frac{1}{x}=y$，则$x^2+\frac{1}{x^2}=y^2+2$

∴原式$=x^2(6y^2-7y-24)$

$$=x^2(3y-8)(2y+3)$$
$$=x^2(3x-\frac{3}{x}-8)(2x-\frac{2}{x}+3)$$
$$=\left(3x^2-8x-3\right)\left(2x^2+3x-2\right)$$
$$=(3x+1)(2x-1)(x+2)(x-3)$$

2. $x^4+2x^3+x^2+1+2(x+x^2)$

解：原式$=x^2(x^2+2x+3+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2})=x^2\left[(x^2+\frac{1}{x^2})+2(x+\frac{1}{x})+3\right]$

设$x+\frac{1}{x}=t$，则$x^2+\frac{1}{x^2}=t^2-2$

∴原式$=x^2\left[(t^2-2)+2t+3\right]$

$$=x^2\left(t^2+2t+1\right)$$
$$=x^2(t+1)^2$$
$$=x^2\left(x+\frac{1}{x}+1\right)^2$$
$$=\left(x^2+x+1\right)^2$$

3. $x^4-4x^3+x^2+4x+1$

解：原式$=x^2(x^2-4x+1+\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2})=x^2\left[\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-4\left(x-\frac{1}{x}\right)+1\right]$

设$x-\frac{1}{x}=y$，则$x^2+\frac{1}{x^2}=y^2+2$

∴原式$=x^2(y^2-4y+3)$

$$=x^2(y-1)(y-3)$$

$$=x^2\left(x-\frac{1}{x}-1\right)\left(x-\frac{1}{x}-3\right)$$
$$=\left(x^2-x-1\right)\left(x^2-3x-1\right)$$

（二）待定系数法

例 5：如果 x^3+ax^2+bx+8 有两个因式为 $x+1$ 和 $x+2$，求 $a+b$ 的值.

【答案】解：设 $x^3+ax^2+bx+8=(x+1)(x+2)(x+c)$，

则 $x^3+ax^2+bx+8=x^3+(3+c)x^2+(2+3c)x+2c$.

$$\therefore \begin{cases} a=3+c \\ b=2+3c \\ 2c=8 \end{cases} \quad \text{解得} \begin{cases} a=7 \\ b=14 \\ c=4 \end{cases},$$

$\therefore a+b=21$.

【解析】x^3+ax^2+bx+8 是一个三次式，所以它应该分成三个一次式相乘，因此第三个因式必为形如 $x+c$ 的一次二项式.

例 6：分解因式 $x^2+xy-6y^2+x+13y-6$.

【答案】解：设 $x^2+xy-6y^2+x+13y-6=(x+3y+m)(x-2y+n)$，

$\because (x+3y+m)(x-2y+n)=x^2+xy-6y^2+(m+n)x+(3n-2m)y-mn$，

$\therefore x^2+xy-6y^2+x+13y-6=x^2+xy-6y^2+(m+n)x+(3n-2m)y-mn$，

对比左右两边相同项的系数可得 $\begin{cases} m+n=1 \\ 3n-2m=13 \\ mn=-6 \end{cases}$，解得 $\begin{cases} m=-2 \\ n=3 \end{cases}$.

$\therefore$ 原式$=(x+3y-2)(x-2y+3)$.

【解析】原式的前 3 项 $x^2+xy-6y^2$ 可以分为 $(x+3y)(x-2y)$，则原多项式必定可分为 $(x+3y+m)(x-2y+n)$.

考点练习：

1.选用适当的方法分解因式

（1）$x^2-3xy-10y^2+x+9y-2$；　　（2）$x^2+3xy+2y^2+5x+7y+6$.

解：原式$=(x-5y+2)(x+2y-1)$　　原式$=(x+2y+3)(x+y+2)$

2.当 m 为何值时，多项式 $x^2-y^2+mx+5y-6$ 能分解因式，并分解此多项式.

【答案】解：设 $x^2-y^2+mx+5y-6=(x+y+a)(x-y+b)$，

$\because (x+y+a)(x-y+b)=x^2-y^2+(a+b)x+(b-a)y+ab$，

$\therefore x^2-y^2+mx+5y-6=x^2-y^2+(a+b)x+(b-a)y+ab$，

对比左右两边相同项的系数可得 $\begin{cases} a+b=m \\ b-a=5 \\ ab=-6 \end{cases}$，解得 $\begin{cases} a=-3 \\ b=2 \\ m=-1 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a=-2 \\ b=3 \\ m=1 \end{cases}$.

$\therefore$ 当 m=-1 时，$x^2-y^2+mx+5y-6=x^2-y^2-x+5y-6=(x+y-3)(x-y+2)$；

当 m=1 时，$x^2-y^2+mx+5y-6=x^2-y^2+x+5y-6=(x+y-2)(x-y+3)$.

【解析】原式的前 2 项 x^2-y^2 可以分为 $(x+y)(x-y)$，则原多项式必定可分为 $(x+y+a)(x-y+b)$.

3．已知：$x^2-2xy-3y^2+6x-14y+p$ 能分解成两个一次因式之积，求常数 p 并且分解因式.

【答案】解：设 $x^2-2xy-3y^2+6x-14y+p=(x+y+a)(x-3y+b)$，

$\because (x+y+a)(x-3y+b)=x^2-2xy-3y^2+(a+b)x+(b-3a)y+ab$，

$\therefore x^2-2xy-3y^2+6x-14y+p=x^2-y^2+(a+b)x+(b-3a)y+ab$，

对比左右两边相同项的系数可得 $\begin{cases}a+b=6\\ b-3a=-14\\ ab=p\end{cases}$，解得 $\begin{cases}a=5\\ b=1\\ p=5\end{cases}$.

$\therefore$ 当 $p=5$ 时，$x^2-2xy-3y^2+6x-14y+p=(x+y+5)(x-3y+1)$.

【解析】原式的前 3 项 $x^2-2xy-3y^2$ 可以分为 $(x+y)(x-3y)$，则原多项式必定可分为 $(x+y+5)(x-3y+1)$.