衔接点 07 从分式，根式的意义到函数的定义域

【基础内容与方法】

1.分式的的意义和根式的意义在专题三已有详述.

2.函数的概念：设 A，B 是非空数集，如果按照某种对应关系 f，使对于集合 A 中任意一个数 x，在集合 B 中都有唯一确定的数 $f(x)$和它对应，那么就称 f：$A\to B$ 为从集合 A 到集合 B 的一个函数，记法为：$y=f(x)$，$x\in$A.

3.定义域：x 叫做自变量，x 的取值范围 A 叫做函数的定义域.

这里要指出，函数定义中强调“三性”----任意性、存在性、唯一性，即对于非空数集 A 中的任意一个(任意性)元素 x，在非空数集 B 中都有(存在性)唯一(唯一性)的元素 y 与之对应．这三性只要有一个不满足，便不能构成函数.

4.方法指引

(1)要明确使各函数表达式有意义的条件是什么，函数有意义的准则一般有：

①分式的分母不为 0；②偶次根式的被开方数非负；③$y=x^0$ 要求 $x\neq0$；

(2)不对解析式化简变形，以免定义域变化；

(3)当一个函数由两个或两个以上代数式的和、差、积、商的形式构成时，定义域是使得各式子都有意义的公共部分的集合；

(4)定义域是一个集合，要用集合或区间表示，若用区间表示数集，不能用“或”连接，而应该用并集符号“∪”连接.

类型一：依据函数形式结构来进行定义域的求取

方法：利用函数的形式结构，从分式，根式的意义来找限定条件.

例 1：求下列函数的定义域：

(1)$y=\frac{1}{x+1}-\sqrt{1-x}$；(2)$y=\frac{\sqrt{5-x}}{|x|-3}$.

解析：(1)要使函数有意义，自变量 x 的取值必须满足$\begin{cases}x+1\neq0,\\1-x\geq0.\end{cases}$

解得 $x\leq1$ 且 $x\neq-1$，

即函数定义域为$\{x|x\leq1$，且 $x\neq-1\}$.

(2)要使函数有意义，自变量 x 的取值必须满足$\begin{cases}5-x\geq0,\\|x|-3\neq0,\end{cases}$

解得 $x\leq5$ 且 $x\neq\pm3$，

即函数定义域为$\{x|x\leq5$，且 $x\neq\pm3\}$.

类型二：已知 $f(x)$ 的定义域，求 $f[\varphi(x)]$ 的定义域

方法：指出:若已知 $f(x)$ 的定义域 $x\in(a,b)$，求 $f[\varphi(x)]$ 的定义域，其方法是：由 $a<\varphi(x)<b$ 求得 x 的范围，即为 $f[\varphi(x)]$ 的定义域.

例 2：已知函数 $f(x)$ 的定义域为[1, 4]，求 $f(\frac{1}{x}+2)$ 的定义域.

解析：由 $1\le\frac{1}{x}+2\le4$，得 $-1\le\frac{1}{x}\le2$，即 $-1\le\frac{1}{x}<0$ 或 $0<\frac{1}{x}\le2$，解得 $x\le1$，或 $x\ge\frac{1}{2}$.

∴函数的定义域为(- ∞, - 1]∪[$\frac{1}{2}$, +∞).

考点练习一：

1．函数 $y=\frac{\sqrt{1-x^2}}{2x^2-3x-2}$ 的定义域为(　　)

A．(－∞，1]　　B．[－1,1]

C．[1,2)∪(2，＋∞)　　D.$\left[-1,-\frac{1}{2}\right)\cup\left(-\frac{1}{2},1\right]$

解析：选 D　由题意得 $\begin{cases}1-x^2\ge0,\\2x^2-3x-2\neq0,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}-1\le x\le1,\\x\neq2\text{ 且 }x\neq-\frac{1}{2},\end{cases}$　即 $-1\le x\le1$ 且 $x\neq-\frac{1}{2}$,

所以函数的定义域为$\left[-1,-\frac{1}{2}\right)\cup\left(-\frac{1}{2},1\right]$.故选 D.

2．函数 $f(x)=\frac{\sqrt{1-|x-1|}}{a^x-1}$($a>0$ 且 $a\neq1$)的定义域为_____.

解析：由题意得 $\begin{cases}1-|x-1|\ge0,\\a^x-1\neq0,\end{cases}$　解得 $\begin{cases}0\le x\le2,\\x\neq0,\end{cases}$　即 $0<x\le2$，故所求函数的定义域为(0,2].

答案：(0,2] .

3．求下列函数的定义域：

(1)$y=2+\frac{3}{x-2}$；(2)$y=\sqrt{3-x}\cdot\sqrt{x-1}$；(3)$y=(x-1)^0+\sqrt{\frac{2}{x+1}}$.

解：(1)当且仅当 $x-2\neq0$，即 $x\neq2$ 时，函数 $y=2+\frac{3}{x-2}$ 有意义，所以这个函数的定义域为{$x|x\neq2$}.

(2)函数有意义，当且仅当 $\begin{cases}3-x\ge0,\\x-1\ge0.\end{cases}$　解得 $1\le x\le3$，所以这个函数的定义域为{$x|1\le x\le3$}.

(3)函数有意义，当且仅当$\begin{cases}x-1\neq0,\\ \dfrac{2}{x+1}\geq0,\\ x+1\neq0.\end{cases}$　　解得 $x>-1$，且 $x\neq1$，

所以这个函数的定义域为$\{x|x>-1$，且 $x\neq1\}$.

4．试求下列函数的定义域：

(1)$f(x)=(x-1)^2+1$；(2)$f(x)=\dfrac{5x+4}{x-1}$；(3)$f(x)=x-\sqrt{x+1}$.

解析：(1) 函数的定义域为 $\boldsymbol{R}$.

(2)函数的定义域是$\{x|x\neq1\}$，$y=\dfrac{5x+4}{x-1}=5+\dfrac{9}{x-1}$，所以函数的值域为$\{y|y\neq5\}$.

(3)要使函数式有意义，需 $x+1\geq0$，即 $x\geq-1$，故函数的定义域是$\{x|x\geq-1\}$.

5．记函数 $f(x)=\sqrt{2-\dfrac{x+3}{x+1}}$ 的定义域为 A，求 A.

解析：由 $2-\dfrac{x+3}{x+1}\geq0$，得 $\dfrac{x-1}{x+1}\geq0$,

它等价于 $\begin{cases}(x-1)(x+1)\geq0,\\ x+1\neq0.\end{cases}$ 即 $x<-1$ 或 $x\geq1$　　$\therefore A=(-\infty,-1)\cup[1,+\infty]$.

考点练习二

6. 若函数 $f(x)=\sqrt{mx^2+mx+1}$的定义域为一切实数，则实数 m 的取值范围是(　　)

A．[0,4)　　B．(0,4)　　C．[4，+∞)　　D．(0,4]

解析：由题意得 $mx^2+mx+1\geq0$，当 $m=0$ 时，$1\geq0$ 恒成立；

当 $m\neq0$ 时，则$\begin{cases}m>0,\\ \Delta=m^2-4m\leq0,\end{cases}$ 解得 $0<m\leq4$,故选 D.

7．已知函数 $y=f(x^2-1)$的定义域为$[-\sqrt{3}，\sqrt{3}\ ]$，则函数 $y=f(x)$的定义域为_____.

解析：$\because y=f(x^2-1)$的定义域为$[-\sqrt{3}，\sqrt{3}\ ]$，$\therefore x\in[-\sqrt{3}，\sqrt{3}\ ]$，$x^2-1\in[-1,2]$，$\therefore y=f(x)$的定义域为$[-1,2]$.

答案：$[-1,2]$.

8．若函数 $f(x)=\sqrt{ax^2+abx+b}$的定义域为$\{x|1\leq x\leq2\}$，则 $a+b$ 的值为_____.

解析：函数 $f(x)$的定义域为不等式 $ax^2+abx+b\geq0$ 的解集，不等式 $ax^2+abx+b\geq0$ 的解集$\{x|1\leq x\leq2\}$,

则$\begin{cases}a<0,\\ 1+2=-b,\\ 1\times2=\dfrac{b}{a}\end{cases}$，解得$\begin{cases}a=-\dfrac{3}{2},\\ b=-3\end{cases}$，$\therefore a+b=-\dfrac{9}{2}$.

9．若函数 f（2x）的定义域是[-2，2]，则函数 $y=f$（x+1）的定义域是 _____.

解析：由函数 f（2x）的定义域是[-2，2]，得-2≤x≤2.

∴-4≤2x≤4，即函数f（x）的定义域是[-4，4]，

再由-4≤x+1≤4，得：-5≤x≤3．

∴函数y=f（x+1）的定义域是[-5，3]．

故答案为：[-5，3]．

10．若函数$f(x)=\frac{\sqrt[3]{x-1}}{mx^2+x+3}$的定义域为$\boldsymbol{R}$，则$m$的取值范围为多少？

解析：要使原函数有意义，必须$mx^2+x+3\neq0$，由于函数的定义域是$\boldsymbol{R}$，故$mx^2+x+3\neq0$对一切实数x恒成立．

当$m=0$时，$x+3\neq0$，即$x\neq-3$，与$f(x)$的定义域为$\boldsymbol{R}$矛盾，所以$m=0$不合题意．

当$m\neq0$时，有$\Delta=1^2-12m<0$，解得$m>\frac{1}{12}$．

故综上可知，m的取值范围是$\{m|m>\frac{1}{12}\}$．

答案：$\{m|m>\frac{1}{12}\}$．

11．已知函数$f(x)$的定义域为[-1, 2]，求$g(x)=f(x)+f(-x)$的定义域．

解析：　由题意得$\begin{cases}-1\le x\le 2\\ -1\le -x\le 2\end{cases}$，即$\begin{cases}-1\le x\le 2\\ -2\le x\le 1\end{cases}$，解得：$-1\le x\le 1$．∴定义域为[-1, 1]．

12．已知f（x+1）的定义域为（2，4），

（1）求f（x）的定义域；

（2）求f（2x）的定义域．

解：（1）∵f（x+1）的定义域为（2，4），

∴2＜x＜4，则3＜x+1＜5，

即f（x）的定义域为（3，5）；

（2）∵f（x）的定义域为（3，5）；

∴由3＜2x＜5得$\frac{3}{2}<x<\frac{5}{2}$，

即f（2x）的定义域为（$\frac{3}{2}$，$\frac{5}{2}$）．