衔接点 13 集合的概念、表示、常用数集、空集

1.下列各组对象中能构成集合的是（　　）

A．充分接近 $\sqrt{3}$ 的实数的全体　　B．数学成绩比较好的同学

C．小于 20 的所有自然数　　D．未来世界的高科技产品

【答案】C

【解析】选项 A、B、D 中集合的元素均不满足确定性，

只有 C 中的元素是确定的，满足集合的定义，故选 C.

2．设不等式 $x^2-2x-8<0$ 的解集为 M，下列正确的是（　　）

A．$-1\notin M,4\notin M$　　B．$-1\in M,4\notin M$

C．$-1\notin M,4\in M$　　D．$-1\in M,4\in M$

【答案】B

【解析】解不等式：$x^2-2x-8<0$，可得：$-2<x<4$，

所以 $M=\{x|-2<x<4\}$，显然 $-1\in M,4\notin M$，故选 B.

3．直线 $y=2x$ 与 $y=x+3$ 的交点组成的集合是（　　）

A．$\{3,6\}$　　B．$3,6$　　C．$x=3,y=6$　　D．$\{(3,6)\}$

【答案】D

【解析】联立 $\begin{cases}y=2x\\y=x+3\end{cases}$，可得 $x=3$，$y=6$，写成点集为 $\{(3,6)\}$.故选 D.

4．已知集合 $A=\{x\in N\,|\,\ln^2 x<1\}$，则 $A=$（　　）

A．$\left\{x\,|\,\frac{1}{e}<x<e\right\}$　　B．$\{1\}$　　C．$\{2\}$　　D．$\{1,2\}$

【答案】D

【解析】由 $\ln^2 x<1$，可得：$-1<\ln x<1$，所以 $\frac{1}{e}<x<e$，

又因为：$x\in\mathbf{N}$，所以 $A=\{1,2\}$，故选：D

5．已知集合 $M=\{1，m+2，m^2+4\}$，且 $5\in M$，则 m 的值为

A．1 或－1　　B．1 或 3

C．－1 或 3　　D．1，－1 或 3

【答案】B

【解析】因为 5∈{1，m+2，m^2+4}，所以 m+2=5 或 m^2+4=5，即 m=3 或 m=±1.当 m=3 时，M={1，5，13}；当 m=1 时，M={1，3，5}；当 m=－1 时，不满足互异性．所以 m 的值为 3 或 1.

6．方程的解集为$\{x \in R \mid 2x^2-3x-2=0\}$，用列举法表示为_____.

【答案】$\{-\frac{1}{2},2\}$.

【解析】方程 $2x^2-3x-2=0$ 得 $x=-\frac{1}{2}$ 或 $x=2$，故答案为 $\{-\frac{1}{2},2\}$.

【点睛】本题考查集合的表示方法，属于基础题.

7．已知集合 $A=\{x \mid ax^2-3x+2=0\}$，若 A 中至少有一个元素，则 a 的取值范围是_____；

【答案】$a \le \frac{9}{8}$

【解析】若 A 中至少有一个元素，则方程 $ax^2-3x+2=0$ 至少有一个解.

当 $a=0$ 时，方程 $ax^2-3x+2=0$ 等价为 $-3x+2=0$，即 $x=\frac{2}{3}$，满足条件.

当 $a \ne 0$，判别式 $\Delta=9-8a \ge 0$，解得 $a \le \frac{9}{8}$ 且 $a \ne 0$.

综上所述，a 的取值范围为 $a \le \frac{9}{8}$，即 $a \in \left(-\infty,\frac{9}{8}\right]$

故答案为：$\left(-\infty,\frac{9}{8}\right]$

【点睛】本题主要考查元素和集合之间关系的应用，利用一元二次方程根与判别式之间的关系是解决本题的关键，属于基础题.

8. 已知集合 A 含有两个元素 a 和 a^2，若 1∈A，求实数 a 的值.

【答案】a＝－1.

【解析】若 1∈A，则 a＝1 或 a^2＝1，即 a＝±1.

当 a＝1 时，集合 A 有重复元素，∴a≠1；

当 a＝－1 时，集合 A 含有两个元素 1，－1，符合互异性. ∴a=-1.



9．设集合 $M=\{x\mid x\geq 4\}, a=\sqrt{11}$，则下列关系中正确的是（　　）

A．$a\in M$　　B．$a\notin M$　　C．$\{a\}\in M$　　D．$\{a\}\notin M$

【答案】B

【解析】$\because 4>\sqrt{11}, \therefore a\notin M$，故选 B.

【点睛】本题考查了元素与集合的关系，属于简单题..

10．已知集合 $A=\{-1,0,1\}$，$B=\left\{(x,y)\mid x\in A, y\in A, \frac{x}{y}\in \mathbf{N}\right\}$，则集合 B 中所含元素的个数为（　　）

A．3　　B．4　　C．6　　D．9

【答案】B

【解析】因为 $x\in A$，$y\in A$，$\frac{x}{y}\in \mathbf{N}$，

所以满足条件的有序实数对为 $(-1,-1)$，$(0,-1)$，$(0,1)$，$(1,1)$．故选:B.

11．已知集合 $A=\{1,2,3\}$，集合 $B=\{z\mid z=x-y, x\in A, y\in A\}$，则集合 B 中元素的个数为（　　）

A．4　　B．5　　C．6　　D．7

【答案】B

【解析】$\because A=\{1,2,3\}$，$B=\{z\mid z=x-y, x\in A, y\in A\}$，

$\therefore x=1,2,3$，$y=1,2,3$

当 $x=1$ 时，$x-y=0,-1,-2$

当 $x=2$ 时，$x-y=1,0,-1$

当 $x=3$ 时，$x-y=2,1,0$

即 $x-y=-2,-1,0,1,2$，即 $B=\{-2,-1,0,1,2\}$ 共有 5 个元素本题正确选项：B

【点睛】本题主要考查集合元素个数的判断，利用条件求出 $x-y$ 的值是解决本题的关键.

12．已知集合 $A=\{a-2,2a^2+5a,12\}$，且 $-3\in A$，则 a 等于（　　）

A．-1　　B．$-\frac{2}{3}$　　C．$-\frac{3}{2}$　　D．$-\frac{3}{2}$ 或-1

【答案】C

【解析】$\because -3\in A\therefore -3=a-2$ 或 $-3=2a^2+5a\therefore a=-1$ 或 $a=-\frac{3}{2}$

$\therefore$ 当 $a=-1$ 时，$a-2=-3,2a^2+5a=-3$ ，不符合集合中元素的互异性，

故 $a=-1$ 应舍去

当 $a=-\frac{3}{2}$ 时，$a-2=-\frac{7}{2},2a^2+5a=-3$，满足题意 $\therefore a=-\frac{3}{2}$．故选 C．

【点睛】本题主要考察了集合中元素的互异性，较难．解题的关键是求出 a 的值后要回代到集合中利用集合中元素的互异性进行检验．

13．方程组 $\begin{cases}x+y=0\\x^2-4=0\end{cases}$ 的解组成的集合为_____.

【答案】$\{(2,-2),(-2,2)\}$

【解析】由 $x^2-4=0$，解得 $x=2$ 或 $x=-2$，代入 $x+y=0$，

解得 $\begin{cases}x=2\\y=-2\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=-2\\y=2\end{cases}$，

所以方程组 $\begin{cases}x+y=0\\x^2-4=0\end{cases}$ 的解组成的集合为 $\{(2,-2),(-2,2)\}$，故答案为 $\{(2,-2),(-2,2)\}$.

14．甲、乙两人同时参加一次数学测试,共有 20 道选择题,每题均有 4 个选项,答对得 3 分,答错或不答得 0 分,甲和乙都解答了所有的试题,经比较,他们只有 2 道题的选项不同,如果甲最终的得分为 54 分,那么乙的所有可能的得分值组成的集合为_____.

【答案】$\{48,51,54,57,60\}$

【解析】因为 20 道选择题每题 3 分, 甲最终的得分为 54 分, 所以甲答错了 2 道题, 又因为甲和乙有两道题的选项不同, 则他们最少有 16 道题的答案相同, 设剩下的 4 道题正确答案为 $AAAA$, 甲的答案为 $BBAA$, 因为甲和乙有两道题的选项不同, 所以乙可能的答案为 $BBCC$, $BCBA$, $CCAA$, $CAAA$, $AAAA$ 等, 所以乙的所有可能的得分值组成的集合为 $\{48,51,54,57,60\}$, 故答案为 $\{48,51,54,57,60\}$.

【点睛】本题考查了集合的性质、分类讨论方法，考查了推理能力与计算能力，属于基础题.

15．含有三个实数的集合既可表示成$\left\{a,\frac{b}{a},1\right\}$又可表示成$\left\{a^2,a+b,0\right\}$，$a^{2014}+b^{2015}=$_____.

【答案】1

【解析】由题意可知，两个集合相等，$\left\{a,\frac{b}{a},1\right\}=\left\{a^2,a+b,0\right\}$，

由$a\neq 0$所以只能是$\frac{b}{a}=0$，即$b=0$，所以$\left\{a,0,1\right\}=\left\{a^2,a,0\right\}$，

由集合互异性可知$a\neq 1$，则$a^2=1$，解得$a=-1$，符合题意，

所以$a^{2014}+b^{2015}=1+0=1$，故答案为：1.

16．已知集合$A=\left\{m+1,(m-1)^2\right\}$，若$1\in A$，则$m=$_____.

【答案】2

【解析】依题意$m+1=1$或$(m-1)^2=1$，解得$m=0$或$m=2$；

由集合中元素的互异性可知当$m=0$时，集合的两个元素相等，不合题意；所以$m=2$.故答案为：2.

17．已知$A=\{a-1,2a^2+5a+1,a^2+1\}$，$-2\in A$,求实数$a$的值.

【解析】因为$-2\in A$，所以有$a-1=-2$,或$2a^2+5a+1=-2$，显然$a^2+1\neq -2$，

当$a-1=-2$时，$a=-1$，此时$a-1=2a^2+5a+1=-2$不符合集合元素的互异性，故舍去；

当$2a^2+5a+1=-2$时，解得$a=-\frac{3}{2}$，$a=-1$由上可知不符合集合元素的互异性，舍去，故$a=-\frac{3}{2}$.

【点睛】本题考查了元素与集合之间的关系，考查了集合元素的互异性，考查了解方程、分类讨论思想.

18．若集合$A=\{x\,|\,ax^2-3x+2=0,a\in R\}$有且仅有两个子集，求实数$a$的取值范围.

【解析】依题意A中只有一个元素.

（1）当$a=0$时，方程$-3x+2=0$只有一解，$\therefore a=0$，

（2）当$a\neq 0$时，由$\begin{cases}a\neq 0\\ \Delta=0\end{cases}$得$a=\frac{9}{8}$，综上，$a=0$或$a=\frac{9}{8}$.

19．求下列方程或方程组的解集.

（1）$6x^4-17x^2+12=0$

（2）$\begin{cases}x^2+y^2=13\\ x-2y=1\end{cases}$

【解析】（1）$6x^4-17x^2+12=(3x^2-4)(2x^2-3)=0$

$\therefore 3x^2-4=0$ 或 $2x^2-3=0$

$\therefore x^2=\frac{4}{3}$ 或 $x^2=\frac{3}{2}$

$\therefore x_1=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，$x_2=-\frac{2\sqrt{3}}{3}, x_3=\frac{\sqrt{6}}{2}, x_4=-\frac{\sqrt{6}}{2}$.

解集为 $\{\frac{2\sqrt{3}}{3},-\frac{2\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{6}}{2},-\frac{\sqrt{6}}{2}\}$

（2）$x-2y=1$ 即 $y=\frac{x}{2}-\frac{1}{2}$ 代入 $x^2+y^2=13$

$x^2+(\frac{x}{2}-\frac{1}{2})^2=13 \therefore 5x^2-2x-51=0 \therefore (x+3)(5x-17)=0$

$\therefore \begin{cases} x_1=-3 \\ y_1=-2 \end{cases}, \begin{cases} x_2=\frac{17}{5} \\ y_2=\frac{6}{5} \end{cases}$，解集为：$\{(-3,-2),(\frac{17}{5},\frac{6}{5})\}$

【点睛】本题考查了二次方程和方程组的解法，考查了学生转化与划归，数学运算的能力，属于中档题.

20．用合适的方法表示下列集合，并说明是有限集还是无限集.

（1）到 A、B 两点距离相等的点的集合

（2）满足不等式 $x^2>1$ 的 x 的集合

（3）全体偶数

（4）被 5 除余 1 的数

（5）20 以内的质数

（6）$\{(x,y)\,|\,x+y=6, x\in N^*, y\in N^*\}$

（7）方程 $x(x-a)=0, a\in R$ 的解集

【解析】（1）因为到 A、B 两点距离相等的点 P 满足 $PA=PB$，所以集合 $A=\{$点 $P\,|\,PA=PB\}$，无限集.

（2）由题意可知，集合 $B=\{x\,|\,x^2>1\}$，无限集.

（3）因为偶数 x 能被 2 整除，所以集合 $C=\{x\,|\,x=2k, k\in Z\}$，无限集.

（4）由题意可知，集合 $D=\{x\,|\,x=5k+1, k\in Z\}$，无限集.

（5）因为20以内的质数有2，3，5，7，11，13，17，19.

所以集合$E=\{2,3,5,7,11,13,17,19\}$，有限集.

（6）因为$x+y=6,x\in N^*,y\in N^*$，所以方程的解为$\begin{cases}x=1\\y=5\end{cases}$，$\begin{cases}x=2\\y=4\end{cases}$，$\begin{cases}x=3\\y=3\end{cases}$，$\begin{cases}x=4\\y=2\end{cases}$，$\begin{cases}x=5\\y=1\end{cases}$，所以集合$F=\{(1,5),(2,4),(3,3),(4,2),(5,1)\}$，有限集.

（7）由题意可知，集合$G=\{x|x(x-a)=0,a\in R\}$，有限集.

【点睛】本题考查集合的表示方法，属于较易题.

21．用列举法表示下列集合：

(1) $A=\{x\,|\,x^2=9\}$；

(2) $B=\{x\in N\,|\,1\le x\le 2\}$；

(3) $C=\{x\,|\,x^2-3x+2=0\}$.

【答案】(1) $\{3,-3\}$ (2) $\{1,2\}$ (3) $\{1,2\}$

【解析】 (1)由$x^2=9$得$x=\pm3$，因此$A=\{x\,|\,x^2=9\}=\{3,-3\}$.

(2)由$x\in\mathbf{N}$，且$1\le x\le 2$，得$x=1,2$，因此$B=\{x\in N\,|\,1\le x\le 2\}=\{1,2\}$.

(3)由$x^2-3x+2=0$得$x=1,2$.因此$C=\{x\,|\,x^2-3x+2=0\}=\{1,2\}$.