衔接点 18 等式与不等式的性质

1．已知 $a>b>0$，则下列不等式中正确的是

A．$|a|<|b|$　　B．$\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$　　C．$-a>-b$　　D．$a^2<b^2$

【答案】B

【解析】$\because a>b>0$，$\therefore |a|>|b|$，$\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$，$-a<-b$，$a^2>b^2$，只有 B 正确．故选 B．

2．若 $a>b>0,c>d>0$，则一定有

A．$\frac{a}{c}>\frac{b}{d}$　　B．$\frac{a}{c}<\frac{b}{d}$　　C．$\frac{a}{d}>\frac{b}{c}$　　D．$\frac{a}{d}<\frac{b}{c}$

【答案】C

【解析】由题可得 $cd>0$，则 $\frac{1}{cd}>0$，因为 $a>b$，$c>d>0$ 则 $ac>bc$，$bc>bd$，则有 $ac>bd$，所以 $ac\cdot\frac{1}{cd}>bd\cdot\frac{1}{cd}$，即 $\frac{a}{d}>\frac{b}{c}$，故选 C．

3．下列命题中，不正确的是

A．若 $a>b$，$c>d$，则 $a-d>b-c$　　B．若 $a^2x>a^2y$，则 $x>y$

C．若 $a>b$，则 $\frac{1}{a-b}>\frac{1}{a}$　　D．若 $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}<0$，则 $ab<b^2$

【答案】C

【解析】对于 A 选项，$\because c>d$，$\therefore -d>-c$，又 $\because a>b$，由不等式的性质得 $a-d>b-c$，A 选项中的不等式正确；

对于 B 选项，若 $a^2x>a^2y$，则 $a^2>0$，$\therefore x>y$，B 选项中的不等式正确；

对于 C 选项，取 $b=0$，则 $\frac{1}{a-b}=\frac{1}{a}$，C 选项中的不等式不成立；

对于 D 选项，$\because \frac{1}{a}<\frac{1}{b}<0$，$\therefore -\frac{1}{a}>-\frac{1}{b}>0$，则 $-b>-a>0$，则 $b<a<0$，

$\therefore b^2>ab$，D 选项中的不等式正确．故选 C．

4．若 $b<a<0$，则下列不等式不成立的是

A．$\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$　　B．$ab<b^2$　　C．$-\frac{1}{a}<-\frac{1}{b}$　　D．$-ab<-a^2$

【答案】C

【解析】A 中，$\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=\frac{b-a}{ab}<0$，$\therefore \frac{1}{a}<\frac{1}{b}$，A 对；

B 中，$ab-b^2=b(a-b)<0$，$\therefore ab<b^2$，B 对；

C 中，$-\frac{1}{a}-\left(-\frac{1}{b}\right)=\frac{a-b}{ab}>0$，$\therefore -\frac{1}{a}>-\frac{1}{b}$，C 错；

D 中，$-ab-\left(-a^2\right)=a(a-b)<0$，$\therefore -ab<-a^2$，D 对．故选 C.

5．设 a，b 是实数，则“$a+b>0$”是“$ab>0$”的

A．充分不必要条件　　B．必要不充分条件

C．充分必要条件　　D．既不充分也不必要条件

【答案】D

【解析】本题采用特殊值法：当 $a=3,b=-1$ 时，$a+b>0$，但 $ab<0$，故是不充分条件；当 $a=-3,b=-1$ 时，$ab>0$，但 $a+b<0$，故是不必要条件．所以“$a+b>0$”是“$ab>0$”的既不充分也不必要条件．故选 D.

6.下列说法正确的是(　)

A.某人月收入 x 不高于 2000 元可表示为"$x<2\ 000$"

B.小明的身高 x，小华的身高 y，则小明比小华矮表示为"$x>y$"

C.某变量 x 至少是 a 可表示为"$x\geq a$"

D.某变量 y 不超过 a 可表示为"$y\geq a$"

【答案】C

【解析】对于 A,x 应满足 $x\leq 2\ 000$，故 A 错；对于 B,x,y 应满足 $x<y$，故 B 不正确；C 正确；

对于 D,y 与 a 的关系可表示为 $y\leq a$，故 D 错误.

7.已知 $a_1,a_2\in(0,1)$，记 $M=a_1a_2$，$N=a_1+a_2-1$，则 M 与 N 的大小关系是(　)

A. $M<N$　　B. $M>N$

C. $M=N$.　　D.不确定

【答案】B

【解析】由题意得 $M-N=a_1a_2-a_1-a_2+1=(a_1-1)(a_2-1)>0$，故 $M>N$.故选 B

8.某同学参加期末模拟考试，考后对自己的语文和数学成绩进行了如下估计：语文成绩 (x) 高于 85 分，数

学成绩(y)不低于80分，用不等式组可以表示为(　　)

A．$\begin{cases}x>85\\ y..80\end{cases}$　　B．$\begin{cases}x<85\\ x..80\end{cases}$

C．$\begin{cases}x,,85\\ y>80\end{cases}$　　D．$\begin{cases}x>85\\ y<80\end{cases}$

【答案】A

【解析】∵语文成绩(x)高于85分，数学成绩(y)不低于80分，

$\therefore\begin{cases}x>85\\ y..80\end{cases}$，故选：$A$．

9.有一家三口的年龄之和为65岁，设父亲、母亲和小孩的年龄分别为x、y、z，则下列选项中能反映x、y、z关系的是(　　)

A．$x+y+z=65$　　B．$\begin{cases}x+y+z=65\\ x>z\\ y>z\end{cases}$

C．$\begin{cases}x+y+z=65\\ x>z>0\\ y>z>0\end{cases}$　　D．$\begin{cases}x+y+z=65\\ x<65\\ y<65\\ z<65\end{cases}$

【答案】C

【解析】∵一家三口的年龄之和为65岁，设父亲、母亲和小孩的年龄分别为x、y、z，

$\therefore x+y+z=65$，$x>z>0$，$y>z>0$．故选：C．

10.若$x\neq-2$且$y\neq1$,则$M=x^2+y^2+4x-2y$的值与-5的大小关系是(　)

A．$M>-5$　　B．$M<-5$

C．$M\geq-5$　　D．$M\leq-5$

【答案】A

【解析】$M-(-5)=x^2+y^2+4x-2y+5=(x+2)^2+(y-1)^2$,

∵$x\neq-2,y\neq1$,$\therefore(x+2)^2>0$,$(y-1)^2>0$,因此$(x+2)^2+(y-1)^2>0$.故$M>-5$.

11．已知$a+b>0,b<0$，那么a，b，$-a$，$-b$的大小关系是_____．（用“>”号连接）

【答案】$a>-b>b>-a$

【解析】$\because a+b>0, b<0$，$\therefore a>-b>0, -a<b<0$，$\therefore a>-b>0>b>-a$，

即 $a>-b>b>-a$．故答案为：$a>-b>b>-a$．

12．$3\le x\le 5, -2\le y\le -1$，则 $x-y$ 的取值范围是_____

【答案】$[4,7]$

【解析】$3\le x\le 5, -2\le y\le -1$，则 $3\le x\le 5, 1\le -y\le 2 \therefore 4\le x-y\le 7$，故答案为：$[4,7]$．

13．已知 $12<x<60$，$15<y<36$，则 $x-y$ 的取值范围是_____．

【答案】$(-24,45)$

【解析】$15<y<36 \Rightarrow -36<-y<-15$，根据同向可加性，$x+(-y)$ 满足

$-36+12<x-y<-15+60$，即 $x-y\in(-24,45)$．

14．已知 $a>b>c>d>0$，$ad=bc$．

（1）证明：$a+d>b+c$；

（2）证明：$a^a b^b c^c > a^b b^c c^a$．

【答案】（1）见解析；（2）见解析．

【解析】（1）由 $a>b>c>d>0$ 得 $a-d>b-c>0$，即 $(a-d)^2>(b-c)^2$，

由 $ad=bc$ 得 $(a-d)^2+4ad>(b-c)^2+4bc$，即 $(a+d)^2>(b+c)^2$，故 $a+d>b+c$．

（2）$\dfrac{a^a b^b c^c}{a^b b^c c^a}=a^{a-b}\cdot b^{b-c}\cdot c^{c-a}=(\dfrac{a}{b})^{a-b}\cdot(\dfrac{b}{c})^{b-c}$．

因为 $a>b>0$，所以 $\dfrac{a}{b}>1, a-b>0$，故 $(\dfrac{a}{b})^{a-b}>1$．同理，$(\dfrac{b}{c})^{b-c}>1$．

从而 $(\dfrac{a}{b})^{a-b}\cdot(\dfrac{b}{c})^{b-c}>1$．即 $a^a b^b c^c > a^b b^c c^a$．

15.若 a>b，c>d，下列不等式正确的是（　　）

A．$c-b>d-a$　　B．$ac>bd$　　C．$a-c>b-d$　　D．$\dfrac{a}{d}>\dfrac{b}{c}$

【答案】A

【解析】由题意，因为 $a>b$，所以 $-a<-b$，即 $-b>-a$，

又因为$c>d$，所以$c-b>d-a$， 故选：A.

16.若$a>b>c,ac<0$，则下列不等式一定成立的是

A．$ab>0$　　B．$bc<0$　　C．$ab>ac$　　D．$b(a-c)>0$

【答案】C

【解析】取$a=1,b=0,c=-1$代入，排除 A、B、D，故选：C。

17.设$-1<b<1<a$，则下列不等式恒成立的是（　　）

A．$\frac{1}{b}>\frac{1}{a}$　　B．$\frac{1}{b}<\frac{1}{a}$　　C．$2b<a^2$　　D．$b^2<a$

【答案】D

【解析】因为$-1<b<1<a$，所以$b^2<1<a$

当$b=0$时，A,B 不成立，当$b=0.9,a=1.1$时，C 不成立，综上选 D.

18.已知a,b为非零实数，且$a<b$，则下列不等式成立的是（　）

A．$a^2<b^2$　　B．$\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$　　C．$\frac{1}{ab^2}<\frac{1}{a^2b}$　　D．$\frac{1}{a-b}>\frac{1}{a}$

【答案】C

【解析】对于 A，若$a<b<0$，则$-a>-b>0$，两边平方得到$a^2>b^2$，故 A 不正确；

对于 B，若$a<0<b$，则$\frac{1}{a}<0$，$\frac{1}{b}>0$，则$\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$，故 B 不正确；

对于 C，$\frac{1}{ab^2}-\frac{1}{a^2b}=\frac{a-b}{a^2b^2}$，由于$a,b$为非零数，$a<b$，则$a-b<0$，$a^2b^2>0$，故$\frac{1}{ab^2}-\frac{1}{a^2b}=\frac{a-b}{a^2b^2}<0$，即$\frac{1}{ab^2}<\frac{1}{a^2b}$，所以 C 正确。

对于 D，若$b>a>0$，则$a-b<0$，$\frac{1}{a-b}<0$，$\frac{1}{a}>0$，则$\frac{1}{a-b}<\frac{1}{a}$，故 D 不正确；

19.已知实数a,b,c满足$c<b<a$且$ac<0$，则下列选项中不一定成立的是（　）

A．$ab>ac$　　B．$c(b-a)>0$　　C．$ac(a-c)<0$　　D．$cb^2<ab^2$

【答案】D

【解析】因为$c<b<a$且$ac<0$，故$c<0,a>0$，所以$ab>ac$，故 A 正确；

又$b-a<0$，故$c(b-a)>0$，故 B 正确；

而 $a-c>0, ac<0$，故 $ac(a-c)<0$，故 C 正确；

当 $b=0$ 时，$cb^2=ab^2$，当 $b\neq 0$ 时，有 $cb^2<ab^2$，故 $cb^2<ab^2$ 不一定成立，

综上，选 D.

20.已知实数 x，y 满足 $-4\le x-y\le -1$，$-1\le 4x-y\le 5$，则 $9x-y$ 的取值范围是（　　）

A．$[-7,26]$　　B．$[-1,20]$

C．$[4,15]$　　D．$[1,15]$

【答案】B

【解析】令 $m=x-y$，$n=4x-y$，$\Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{n-m}{3}, \\ y=\dfrac{n-4m}{3} \end{cases}$，

则 $z=9x-y=\dfrac{8}{3}n-\dfrac{5}{3}m$ ∵ $-4\le m\le -1$ ∴ $\dfrac{5}{3}\le -\dfrac{5}{3}m\le \dfrac{20}{3}$，

又∵ $-1\le n\le 5$ ∴ $-\dfrac{8}{3}\le \dfrac{8}{3}n\le \dfrac{40}{3}$，因此 $-1\le z=9x-y=\dfrac{8}{3}n-\dfrac{5}{3}m\le 20$，故本题选 B.

21.已知不等式：①$a^2b<b^3$；②$\frac{1}{a}>0>\frac{1}{b}$；③$a^3<ab^2$，如果$a>0>b$且$a^2>b^2$，则其中正确不等式的个数是_____；

【答案】2

【解析】因为$a>0>b$且$a^2>b^2$，所以$a>|b|>0$，①$a^2b<b^3$化简后是$a^2>b^2$，显然正确；②$\frac{1}{a}>0>\frac{1}{b}$显然正确；③$a^3<ab^2$化简后是$a^2<b^2$，显然不正确．故正确的不等式是①②，共 2 个．故答案为 2.

22.已知 a，b，x 均为正数，且 a>b，则 $\dfrac{b}{a}$____$\dfrac{b+x}{a+x}$（填“>”、“<”或“=”）.

【答案】<

【解析】由题得 $\dfrac{b}{a}-\dfrac{b+x}{a+x}=\dfrac{ab+bx-ab-ax}{a(a+x)}=\dfrac{(b-a)x}{a(x+a)}$，

因为 a>0,x+a>0,b-a<0,x>0,所以 $\dfrac{(b-a)x}{a(x+a)}<0$, 所以 $\dfrac{b}{a}<\dfrac{b+x}{a+x}$.

23.若 $x\in\mathbf{R}$，则$\dfrac{x}{1+x^2}$与$\dfrac{1}{2}$的大小关系为_____.

【答案】 $\frac{x}{1+x^2}\leq\frac{1}{2}$

【解析】$\because \frac{x}{1+x^2}-\frac{1}{2}=\frac{2x-1-x^2}{2(1+x^2)}=\frac{-(x-1)^2}{2(1+x^2)}\leq 0$，$\therefore \frac{x}{1+x^2}\leq\frac{1}{2}$.

24.一辆汽车原来每天行驶 xkm，如果该汽车每天行驶的路程比原来多 $19km$，那么在 8 天内它的行程将超过 $2200km$，用不等式表示为____.

【答案】$8(x+19)>2200$

【解析】$\because$ 汽车原来每天行驶 xkm，该汽车每天行驶的路程比原来多 $19km$，

$\therefore$ 现在汽车行驶的路程为 $x+19km$，

则 8 天内它的行程为 $8(x+19)km$，

若 8 天内它的行程将超过 $2200km$，

则满足 $8(x+19)>2200$； 故答案为：$8(x+19)>2200$；

25.已知 $12<a<60,15<b<36$,则 $\frac{a}{b}$ 的取值范围为_____.

【答案】$(\frac{1}{3},4)$

【解析】$0<15<b<36\Rightarrow 0<\frac{1}{36}<\frac{1}{b}<\frac{1}{15}$，而 $0<12<a<60$，

根据不等式的性质可得 $12\times\frac{1}{36}<a\cdot\frac{1}{b}<\frac{1}{15}\times 60\Rightarrow\frac{1}{3}<\frac{a}{b}<4$，所以 $\frac{a}{b}$ 的取值范围为 $(\frac{1}{3},4)$.

26.已知 $1\leq a\leq 2,3\leq b\leq 6$，则 $3a-2b$ 的取值范围为_____.

【答案】$[-9,0]$

【解析】$\because$1≤a≤2，3≤b≤6，$\therefore$3≤3a≤6，－12≤－2b≤－6，由不等式运算的性质得－9≤3a－2b≤0，

即 3a－2b 的取值范围为[－9，0].故答案为：[－9，0]

27.已知下列三个不等式：

①$ab>0$；②$\frac{c}{a}>\frac{d}{b}$；③$bc>ad$，

以其中两个作为条件，余下一个作为结论，则可组成几个正确命题？

【答案】可组成 3 个正确命题.

【解析】（1）对②变形得 $\frac{c}{a}>\frac{d}{b}\Leftrightarrow\frac{bc-ad}{ab}>0$，

由$ab>0,bc>ad$得②成立，即①③⇒②.

（2）若$ab>0,\frac{bc-ad}{ab}>0$，则$bc>ad$，即①②⇒③.

（3）若$bc>ad$，$\frac{bc-ad}{ab}>0$，则$ab>0$，即②③⇒①.

综上所述，可组成 3 个正确命题.

28.已知$f(x)=ax^2-c$,且－4≤f(1)≤－1,－1≤f(2)≤5,求 f(3)的取值范围.

【答案】$[-1,20]$

【解析】由题意得$\begin{cases}f(1)=a-c,\\f(2)=4a-c,\end{cases}$

解得$\begin{cases}a=\frac{f(2)-f(1)}{3},\\c=-\frac{4}{3}f(1)+\frac{1}{3}f(2),\end{cases}$

所以$f(3)=9a-c=-\frac{5}{3}f(1)+\frac{8}{3}f(2),$

因为$-4\le f(1)\le -1$，所以$\frac{5}{3}\le -\frac{5}{3}f(1)\le \frac{20}{3}$;

因为$-1\le f(2)\le 5$，所以$-\frac{8}{3}\le \frac{8}{3}f(2)\le \frac{40}{3}$。

两式相加得$-1\le f(3)\le 20$，故$f(3)$的取值范围是$[-1,20]$.