衔接点 20 二次函数与一元二次方程、不等式

1．若 $m,n\in R$, 且 $m+n>0$, 则关于 x 的不等式 $(m-x)(n+x)>0$ 的解集为（　　）

A．$\{x|x<-n或x>m\}$　B．$\{x|-n<x<m\}$

C．$\{x|-m<x<n\}$　D．$\{x|x<-m或x>n\}$

【答案】B

【解析】$(m-x)(n+x)>0$，则 $(x-m)(n+x)<0$，

因为 $m+n>0$，则 $m>-n$，$(x-m)(n+x)<0$ 的解集为 $\{x|-n<x<m\}$，选 B．

【点睛】解一元二次不等式要注意不等式中二次项系数的符号.

2．不等式 $x(x-1)<0$ 的解集是（　　）

A．$(-\infty,0)\cup(1,+\infty)$　B．$(0,1)$　C．$(-\infty,0)$　D．$(1,+\infty)$

【答案】B

【解析】解不等式 $x(x-1)<0$，得 $0<x<1$，则不等式的解集是 $(0,1)$

故选：B

3．若不等式 $ax^2+bx+2>0$ 的解集 $\{x|-1<x<2\}$，则 $a+b$ 值是（　　）

A．0　B．-1　C．1　D．2

【答案】A

【解析】由题意，可得不等式 $ax^2+bx+2<0$ 的解集是 $\{x|-1<x<2\}$，

所以 $-1,2$ 是方程 $ax^2+bx+2=0$ 的两个根，

所以可得 $-1+2=-\frac{b}{a}$，$-1\times2=\frac{2}{a}$，解得 $a=-1$，$b=1$，所以 $a+b=0$，故选：A.

4．若关于 x 的不等式 $mx-2>0$ 的解集是 $\{x|x>2\}$，则实数 m 等于（　　）

A．-1　B．-2　C．1　D．2

【答案】C

【解析】由题意不等式 $mx-2>0$ 的解集是 $\{x|x>2\}$，

所以方程 $mx-2=0$ 的解是 2，则 $2m-2=0$，解得 $m=1$，故选 C.

5．已知不等式 $(x+my)(\frac{1}{x}+\frac{1}{y})\geq 9$ 对任意正实数 x，y 恒成立，则正实数 m 的最小值是（　　）

A．2　　B．4　　C．6　　D．8

【答案】B

【解析】不等式 $(x+my)(\frac{1}{x}+\frac{1}{y})\geq 9$ 对任意的正实数 x，y 恒成立，

则 $\frac{x}{y}+\frac{my}{x}+1+m\geq 9$ 对任意的正实数 x，y 恒成立，又 $\frac{x}{y}+\frac{my}{x}\geq 2\sqrt{m}$，

$\therefore 2\sqrt{m}+1+m\geq 9$，解得 $\sqrt{m}\geq 2$ 或 $\sqrt{m}\leq -4$（不合题意，舍去），

$\therefore m\geq 4$，即正实数 m 的最小值是 4．故选：B.

6．不等式 $kx^2+kx-1<0$ 对一切实数 x 都成立，则 k 的取值范围为（　　）

A．$(-\infty,-4)$　　B．$(-4,0)$　　C．$(-\infty,-4)\cup(0,+\infty)$　　D．$(-4,0]$

【答案】D

【解析】当 $k=0$ 时，$-1<0$ 恒成立，则 $k=0$；

当 $k\neq 0$ 时，则有 $\begin{cases}k<0\\ \Delta=k^2+4k<0\end{cases}$ 解得 $-4<k<0$．综上：$-4<k\leq 0$．故选：D.

7．已知函数 $h(x)=4x^2-kx-8$ 在 $[5,\ 20]$ 上是单调函数，则 k 的取值范围是（　　）

A．$(-\infty,\ 40]$　　B．$[160,\ +\infty)$

C．$(-\infty,\ 40]\bigcup[160,\ +\infty)$　　D．$\varnothing$

【答案】C

【解析】函数 $h(x)=4x^2-kx-8$ 的对称轴为 $x=\frac{k}{8}$，

若函数 $h(x)=4x^2-kx-8$ 在 $[5,20]$ 上是单调函数，

则 $\frac{k}{8}\leq 5$ 或 $\frac{k}{8}\geq 20$，解得 $k\leq 40$ 或 $k\geq 160$，

故 k 的取值范围是 $(-\infty,40]\cup[160,+\infty)$，故选：$C$.

8．若对任意 $x\in[1,2]$ 且 $y\in[2,3]$，不等式 $xy\leq ax^2+2y^2$ 恒成立，则实数 a 的取值范围是_____.

【答案】$[-1,+\infty)$

【解析】$\because xy,\ ax^2+2y^2, \therefore a\geq\dfrac{xy-2y^2}{x^2}=\dfrac{y}{x}-\dfrac{2y^2}{x^2}=\dfrac{y}{x}-2(\dfrac{y}{x})^2$

设$\dfrac{y}{x}=t$ ，$\therefore a\geq t-2t^2$

$\because x\in[1,2]$且$y\in[2,3]$，$\therefore 1\leq t\leq 3$，$\therefore (t-2t^2)_{\max}=-1$ $\therefore a\geq -1$，故答案为：$[-1,+\infty)$

9．一元二次不等式$x^2-2x+5<-4x+13$的解集是_____.

【答案】$(-4,2)$

【解析】整理$x^2-2x+5<-4x+13$可得$x^2+2x-8<0$，

因式分解可得：$(x-2)(x+4)<0$，可得：$-4<x<2$，故答案为：$(-4,2)$.

10．不等式$(x-2)\sqrt{x^2-x-6}\geq 0$的解集是_____.

【答案】$\{x|x=-2$或$x\geq 3\}$

【解析】因为$(x-2)\sqrt{x^2-x-6}\geq 0$，

所以$\begin{cases}x-2\geq 0\\ x^2-x-6>0\end{cases}$或$x^2-x-6=0$，即$\begin{cases}x\geq 2\\ x>3\end{cases}$或$\begin{cases}x\geq 2\\ x<-2\end{cases}$或$x=-2$或$x=3$

解得$x=-2$或$x\geq 3$，故答案为：$\{x|x=-2$或$x\geq 3\}$

11．不等式$\dfrac{1}{x}-2>0$的解集是_____.

【答案】$\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$

【解析】由$\dfrac{1}{x}-2=\dfrac{1-2x}{x}>0$，则$\begin{cases}x(1-2x)>0\\ x\neq 0\end{cases}$，解得$0<x<\dfrac{1}{2}$故答案为：$\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$

12．解关于x的不等式$2x^2+ax+2>0$.

【解析】对于方程$2x^2+ax+2=0$，其判别式$\Delta=a^2-16=(a+4)(a-4)$，

①当$\Delta>0$时，即$a>4$或$a<-4$时，方程$2x^2+ax+2=0$的两根为

$x_1=\dfrac{1}{4}(-a-\sqrt{a^2-16})$，$x_2=\dfrac{1}{4}(-a+\sqrt{a^2-16})$

$\therefore$原不等式的解集为$\left\{x\,|\,x<\dfrac{1}{4}(-a-\sqrt{a^2-16}\text{或}x>\dfrac{1}{4}(-a+\sqrt{a^2-16})\right\}$

②当$\Delta=0$时，即$a=\pm4$，当$a=4$时，方程有两个相等实根，$x_1=x_2=-1$，∴原不等式的解集为$\{x\mid x\neq-1\}$；当$a=-4$时，方程有两个相等实根，$x_1=x_2=1$，∴原不等式的解集为$\{x\mid x\neq1\}$

③当$\Delta<0$时，即$-4<a<4$时，方程无实根，∴原不等式的解集为R

综上，当$a>4$或$a<-4$时原不等式的解集为$\left\{x\mid x<\frac{1}{4}(-a-\sqrt{a^2-16}或x>\frac{1}{4}(-a+\sqrt{a^2-16})\right\}$；

当$a=4$时，原不等式的解集为$\{x\mid x\neq-1\}$；当$a=-4$时，原不等式的解集为$\{x\mid x\neq1\}$；当$-4<a<4$时原不等式的解集为R

13．若不等式$(a-2)x^2+2(a-2)x-4<0$对一切$x\in\mathbf{R}$恒成立，则实数a取值的集合（　　）

A．$\{a\mid a\leq2\}$　　B．$\{a\mid-2<a<2\}$　　C．$\{a\mid-2<a\leq2\}$　　D．$\{a\mid a\leq-2\}$

【答案】C

【解析】①$a=2$时，不等式化为$-4<0$对一切$x\in\mathbf{R}$恒成立，因此$a=2$满足题意；

②$a\neq2$时，要使不等式$(a-2)x^2+2(a-2)x-4<0$对一切$x\in\mathbf{R}$恒成立，则必有

$\begin{cases}a-2<0\\4(a-2)^2+16(a-2)<0\end{cases}$解得$-2<a<2$．

综上①②可知：实数a取值的集合是$\{a\mid-2<a\leqslant2\}$．故选：C．

14．若正实数x、y满足$x-2\sqrt{y}=\sqrt{2x-y}$，则x的取值范围是（　　）

A．$[4,20]$　　B．$[16,20]$　　C．$(2,10]$　　D．$\left(2,2\sqrt{5}\right]$

【答案】C

【解析】∵正实数x、y满足$x-2\sqrt{y}=\sqrt{2x-y}$

∵保证$\sqrt{2x-y}$有意义，则$2x-y\geq0$——①

令$t=\sqrt{y}\,(t>0)$，将t代入①可得：$t^2\leq2x$，结合$t>0$

解得：$0<t\leq\sqrt{2x}$，将$x-2\sqrt{y}=\sqrt{2x-y}$平方可得：

整理可得：$x^2-4x\pi+4y=2x-y$

故$5(\sqrt{y})^2-4x\sqrt{y}+x^2-2x=0$ ——②

将$t=\sqrt{y}$代入②，可得：$5t^2-4xt+x^2-2x=0$

这是一个关于t的一元二次方程，则方程有两个正根(含相等)

$$\begin{cases}\Delta=16x^2-20\left(x^2-2x\right)\geq 0\\ t_1t_2=\dfrac{1}{5}\left(x^2-2x\right)>0\end{cases}$$ 解得：$2<x\leq 10$，故$x\in(2,10]$，故选：C

15．已知不等式$ax^2+bx+c>0$的解集为$\left\{x\mid -\dfrac{1}{3}<x<2\right\}$，则不等式$cx^2+bx+a<0$的解为（　　）

A．$\left\{x\mid -3<x<\dfrac{1}{2}\right\}$　　B．$\left\{x\middle| x<-3\text{或}x>\dfrac{1}{2}\right\}$

C．$\left\{x\mid -2<x<\dfrac{1}{3}\right\}$　　D．$\left\{x\middle| x\leq -2\text{或}x>\dfrac{1}{3}\right\}$

【答案】A

【解析】由题意知，$ax^2+bx+c=0$的两根为$x_1=-\dfrac{1}{3},x_2=2$，且$a<0$，则$\begin{cases}\dfrac{a}{9}-\dfrac{b}{3}+c=0\\ 4a+2b+c=0\end{cases}$，

解得$\begin{cases}a=-\dfrac{3}{2}c\\ b=\dfrac{5}{2}c\end{cases}$，则代入$cx^2+bx+a<0$得$cx^2+\dfrac{5}{2}cx-\dfrac{3}{2}c<0$.因为$a<0$，则$c>0$，

所以$cx^2+\dfrac{5}{2}cx-\dfrac{3}{2}c<0$可化为$2x^2+5x-3<0$，解得$\left\{x\mid -3<x<\dfrac{1}{2}\right\}$.故选：A.

16．已知函数$y=-x^2+x$，那么使$y<-2$成立时x的取值范围是（　　）

A．(－1，2)　　B．(－∞，－1)∪(2，＋∞)

C．(－2，1)　　D．(－∞，－2)∪(1，＋∞)

【答案】B

【解析】由题意$-x^2+x<-2$，即$x^2-x-2>0$，

即$(x-2)(x+1)>0,\therefore x>2$或$x<-1$.

\ x的取值范围为$(-\infty,-1)\cup(2,+\infty)$.故选：$B$.

17．关于 x 的不等式 $\dfrac{(x-1)(-x-1)}{(x-1)^4}\geq 0$ 的解集是（　　）

A．$(-1,1)$　　B．$[-1,1)$　　C．$(-1,1]$　　D．$[-1,1]$

【答案】B

【解析】由题意，原不等式的解等价于不等式组 $\begin{cases}(x-1)(-x-1)\geq 0\\ x-1\neq 0\end{cases}$ 的解，

而 $\begin{cases}(x-1)(-x-1)\geq 0\\ x-1\neq 0\end{cases}$ 的解为 $-1\leq x<1$，所以原不等式的解集为 $[-1,1)$.故选：B

18．若方程 $x^2+(m-2)x+5-m=0$ 的两根都大于 2，则实数 m 的取值范围是（　　）

A．$(-\infty,-5)\cup(-5,-4]$　　B．$(-\infty,-4]$　　C．$(-\infty,-2]$　　D．$(-5,-4]$

【答案】D

【解析】设 $f(x)=x^2+(m-2)x+5-m$，由题意得：$\begin{cases}\Delta=(m-2)^2-4(5-m)\geq 0\\ f(2)>0\\ \dfrac{2-m}{2}>2\end{cases}$，解之得实数 m 的取值范围为：$(-5,-4]$.故选 D.

19．对任意的实数 x，不等式 $ax(x-1)<1$ 恒成立，则实数 a 的取值范围是（　　）.

A．$(-\infty,0)$　　B．$[-4,0)$　　C．$(-4,0]$　　D．$(-\infty,-4]$

【答案】C

【解析】当 $a=0$ 时，$ax^2-ax-1=-1<0$，不等式成立；

设 $f(x)=ax^2-ax-1$，

当 $a\neq 0$ 时．函数 $f(x)$ 为二次函数，$f(x)$ 要恒小于 0，抛物线开口向下且与 x 轴没有交点，即 $\begin{cases}a<0\\ \triangle=a^2+4a<0\end{cases}$，解得 $-4<a<0$，综上：实数 $a\in(-4,0]$．故选：C

20．若不等式 $kx^2+2kx+2<0$ 的解集为空集，则实数 k 的取值范围是（　　）

A．$(0,2)$　　B．$[0,2)$　　C．$[0,2]$　　D．$(2,+\infty)$

【答案】C

【解析】当$k=0$时，不等式化为$2<0$，无解，符合题意；

当$k\neq 0$时，∵不等式$kx^2+2kx+2<0$的解集为空集，

$\therefore \begin{cases} k>0 \\ \Delta=(2k)^2-4k\times 2\leq 0 \end{cases}$，解得$0<k\leq 2$.综上，$0\leq k\leq 2$.故选：$C$.

21．不等式$x^2+a|x|+4\geq 0$对一切实数x恒成立，则实数a的取值范围为（　　）

A．$[0,+\infty)$　　B．$[-4,+\infty)$　　C．$[-4,4]$　　D．$(-\infty,-4]$

【答案】B

【解析】$f(x)=x^2+a|x|+4$为偶函数，

当$a\geq 0$，$x>0$时，函数转化为$f(x)=x^2+ax+4$，

对称轴$x=-\frac{a}{2}<0$，$f(0)=4>0$，不等式恒成立；

当$a<0$，$x>0$时，函数转化为$f(x)=x^2+ax+4$，

可得$\Delta=a^2-16\leq 0$，解得$-4\leq a<0$，综上，$a\in[-4,+\infty)$.故选：B.

22．已知不等式$x^2+bx-b-\frac{3}{4}>0$的解集为R，则b的取值范围是_____.

【答案】$(-3,-1)$

【解析】∵不等式$x^2+bx-b-\frac{3}{4}>0$的解集为R，

$\therefore \Delta<0$，即$b^2-4\left(-b-\frac{3}{4}\right)<0$，即$b^2+4b+3<0$，所以$-3<b<-1$.故答案为：$(-3,-1)$.

23．设关于x的不等式$ax^2+8(a+1)x+7a+16\geq 0,(a\in Z)$，只有有限个整数解，且 0 是其中一个解，则全部不等式的整数解的和为_____

【答案】-10

【解析】设$y=ax^2+8(a+1)x+7a+16$，其图象为抛物线，

对于任意一个给定的a值其抛物线只有在开口向下的情况下才能满足$y\geqslant 0$而整数解只有有限个，所以$a<0$，

因为 0 为其中一个解可以求得 $a \geq -\frac{16}{7}$，

又 $a \in Z$，所以 $a=-2$ 或 $a=-1$，

则不等式为 $-2x^2-8x+2 \geq 0$ 和 $-x^2+9 \geq 0$，

可分别求得 $-2-\sqrt{5} \leq x \leq \sqrt{5}-2$ 和 $-3 \leqslant x \leqslant 3$，

因为 x 位整数，所以 $x=-4,-3,-2,-1$ 和 $x=-3,-2,-1,0,1,2,3$，

所以全部不等式的整数解的和为 -10.故答案为：-10.

24．若关于 x 的不等式 $x^2+2x+a>0$ 的解集为 R，则实数 a 的取值范围是_____.

【答案】$(1,+\infty)$

【解析】关于 x 的不等式 $x^2+2x+a>0$ 的解集为 R，

$f(x)=x^2+2x+a$ 的图象在 x 轴上方，

所以 $\Delta<0$，即 $4-4a<0$，解得 $a>1$，所以实数 a 的取值范围是 $(1,+\infty)$.故答案为：$(1,+\infty)$

25．关于 x 的不等式 $x^2-(a+1)x+a<0$ 的解集中恰有 3 个整数，则 a 的取值范围是_____.

【答案】$[-3,-2)\cup(4,5]$

【解析】由题可知，不等式 $x^2-(a+1)x+a=(x-a)(x-1)<0$，

当 $a<1$ 时，解集为 $x \in (a,1)$，期内恰有 3 个整数即为 $\{-2,-1,0\}$，故 $-3 \leq a<-2$；

当 $a>1$ 时，解集为 $x \in (1,a)$，期内恰有 3 个整数即为 $\{2,3,4\}$，故 $4<a \leq 5$；

当 $a=1$ 时，解集为空集不符合题意，

故 a 的取值范围是 $[-3,-2)\cup(4,5]$.故答案为：$[-3,-2)\cup(4,5]$

26．不等式 $(a^2-1)x^2-(a-1)x-1 \leq 0$ 对任意实数 x 都成立，则实数 a 的取值范围____

【答案】$\left[-\frac{3}{5},1\right]$

【解析】根据题意，分 2 种情况讨论：

1° 若 $a^2-1=0$，则 $a=\pm 1$，

当 $a=1$ 时，不等式 $(a^2-1)x^2+(a-1)x-1 \leqslant 0$ 为：$-1 \leqslant 0$，

满足对任意实数 x 都成立，则 $a=1$ 满足题意，

当 $a=-1$ 时，不等式 $(a^2-1)x^2+(a-1)x-1\leqslant 0$ 为：$-2x\leqslant 0$，

不满足对任意实数 x 都成立，则 $a=-1$ 不满足题意，

2° 若 $a^2-1\neq 0$，不等式 $(a^2-1)x^2+(a-1)x-1\leqslant 0$ 为二次不等式，

要保证 $(a^2-1)x^2+(a-1)x-1\leqslant 0$ 对任意实数 x 都成立，

必须有 $\begin{cases}a^2-1<0\\ \Delta=(a-1)^2+4(a^2-1)\leq 0\end{cases}$，

解可得：$-\frac{3}{5}\leq a<1$，综合可得 $-\frac{3}{5}\leq a\leqslant 1$，故答案为：$\left[-\frac{3}{5},1\right]$

27．十九大以来，国家深入推进精准脱贫，加大资金投入，强化社会帮扶，为了更好的服务于人民，派调查组到某农村去考察和指导工作.该地区有 200 户农民，且都从事水果种植，据了解，平均每户的年收入为 3 万元.为了调整产业结构，调查组和当地政府决定动员部分农民从事水果加工，据估计，若能动员 $x(x>0)$ 户农民从事水果加工，则剩下的继续从事水果种植的农民平均每户的年收入有望提高 $4x\%$，而从事水果加工的农民平均每户收入将为 $3\left(a-\frac{3x}{50}\right)(a>0)$ 万元.

（1）若动员 x 户农民从事水果加工后，要使从事水果种植的农民的总年收入不低于动员前从事水果种植的农民的总年收入，求 x 的取值范围；

（2）在（1）的条件下，要使这 200 户农民中从事水果加工的农民的总收入始终不高于从事水果种植的农民的总收入，求 a 的最大值.

【解析】（1）动员 x 户农民从事水果加工后，要使从事水果种植的农民的总年收入不低于动员前从事水果种植的农民的总年收入，则 $(200-x)\times\left[3\times(1+0.04x)\right]\geq 200\times 3$，解得 $0<x\leq 175$.

（2）由于从事水果加工的农民的总收入始终不高于从事水果种植的农民的总收入，则

$3\left(a-\frac{3x}{50}\right)\cdot x\leq(200-x)\times\left[3\times(1+0.04x)\right]$，（$0<x\leq 175$），

化简得 $a\leq 0.02x+\frac{200}{x}+7$，（$a>0$）.

由于 $0.02x+\frac{200}{x}+7\geq 2\sqrt{0.02x\cdot\frac{200}{x}}+7=11$，当且仅当 $0.02x=\frac{200}{x}\Rightarrow x=100$ 时等号成立，所以 $0<a\leq 11$，所以 a 的最大值为 11.

28．已知不等式 $x^2+bx+c>0$ 的解集为 $\{x|x\rangle 2或x<1\}$.

（1）求 b 和 c 的值；

（2）求不等式 $cx^2+bx+1\le 0$ 的解集.

【答案】(1) $b=-3$， $c=2$；(2) $\left\{x|\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 1\right\}$.

【解析】（1）由不等式的解集为 $\{x|x\rangle 2或x<1\}$ ，

可知 2 和 1 是一元二次方程 $x^2+bx+c=0$ 的两根，

所以 $\begin{cases}2+1=-b\\2\times 1=c\end{cases}$ ，即 $b=-3$， $c=2$

（2）由（1）知所求不等式即为 $2x^2-3x+1\le 0$

方程式 $2x^2-3x+1=0$ 的两根分别是 1 和 $\frac{1}{2}$ ，

所以所求不等式的解集为 $\left\{x|\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 1\right\}$

29．解关于 x 的不等式： $ax^2-(a+1)x+1>0$

（Ⅰ）若 $a=2$，解上述关于 x 的不等式；

（Ⅱ）若 $a\in R$，解上述关于 x 的不等式.

【解析】（Ⅰ）把 $a=2$ 代入，得 $2x^2-3x+1>0$，化简得 $(x-1)(2x-1)>0$，

该不等式的解为： $\left\{x\middle|x<\frac{1}{2}或x>1\right\}$

（Ⅱ）把 $ax^2-(a+1)x+1>0$ 化简得， $(x-1)(ax-1)>0$，

①当 $a=0$ 时，不等式的解为 $\{x|x<1\}$

②$\frac{1}{a}>1$，即 $\frac{a-1}{a}<0$，得 $0<a<1$，$\therefore$ 此时，不等式的解为 $\left\{x\middle|x>\frac{1}{a}或x<1\right\}$

③$\frac{1}{a}<1$，即 $\frac{a-1}{a}>0$，得 $a>1$ 或 $a<0$，

当 $a>1$ 时，不等式的解为 $\left\{x\middle|x>1或x<\frac{1}{a}\right\}$，

当$a<0$时，不等式的解为$\left\{x\middle|1>x>\frac{1}{a}\right\}$，

④$\frac{1}{a}=1$，得$a=1$，此时，$(x-1)^2>0$，解得$\{x|x\in R$且$x\neq 1\}$

综上所述，当$a<0$时，不等式的解为$\left\{x\middle|1>x>\frac{1}{a}\right\}$，

当$a=0$时，不等式的解为$\{x|x<1\}$

当$0<a<1$时，不等式的解为$\left\{x\middle|x>\frac{1}{a}\text{或}x<1\right\}$，

当$a=1$时，不等式的解为$\{x|x\in R$且$x\neq 1\}$

当$a>1$时，不等式的解为$\left\{x\middle|x>1\text{或}x<\frac{1}{a}\right\}$