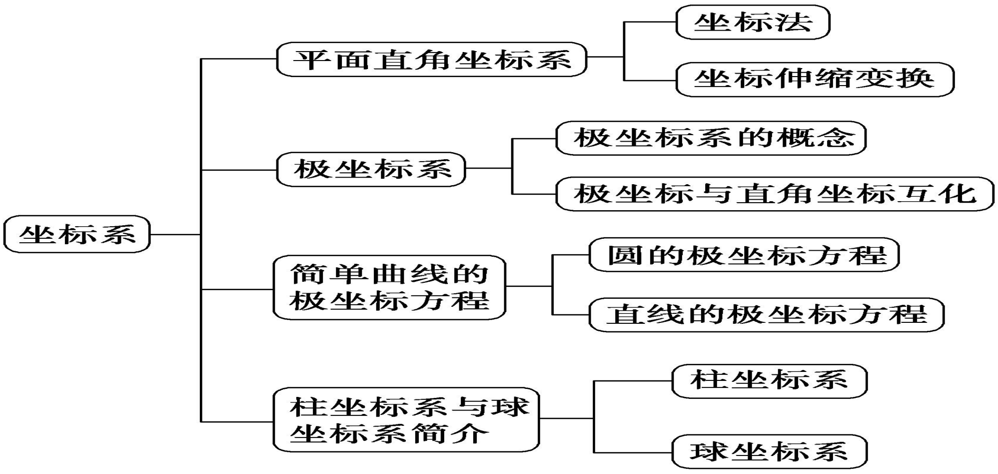
数学选修 4-4 坐标系与参数方程知识点总结

第一讲



一　平面直角坐标系

1．平面直角坐标系

(1)数轴：规定了原点，正方向和单位长度的直线叫数轴．数轴上的点与实数之间可以建立一一对应关系．

(2)平面直角坐标系：

①定义：在同一个平面上互相垂直且有公共原点的两条数轴构成平面直角坐标系，简称为直角坐标系；

②数轴的正方向：两条数轴分别置于水平位置与竖直位置，取向右与向上的方向分别为两条数轴的正方向；

③坐标轴水平的数轴叫做 x 轴或横坐标轴，竖直的数轴叫做 y 轴或纵坐标轴，x 轴或 y 轴统称为坐标轴；

④坐标原点：它们的公共原点称为直角坐标系的原点；

⑤对应关系：平面直角坐标系上的点与有序实数对$(x，y)$之间可以建立一一对应关系．

(3)距离公式与中点坐标公式：设平面直角坐标系中，点 $P_1(x_1，y_1)$，$P_2(x_2，y_2)$，线段 P_1P_2 的中点为 P，填表：

两点间的距离公式	中点 P 的坐标公式
$\lvert P_1P_2\rvert=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$	$\begin{cases}x=\dfrac{x_1+x_2}{2}\\y=\dfrac{y_1+y_2}{2}\end{cases}$

2.平面直角坐标系中的伸缩变换

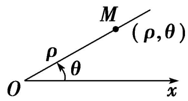
设点 $P(x，y)$是平面直角坐标系中的任意一点，在变换φ：$\begin{cases}x'=\lambda x\ (\lambda>0)\\y'=\mu y\ (\mu>0)\end{cases}$的作用下，点 $P(x，y)$对应到点 $P'(x'，y')$，称φ为平面直角坐标系中的坐标伸缩变换，简称伸缩变换．

二　极坐标系

(1)定义：在平面内取一个定点 O，叫做极点；自极点 O 引一条射线 Ox 叫做极轴；再选定一个长度单位、一个角度单位(通常取弧度)及其正方向(通常取逆时针方向)，这样就建立了一个极坐标系．

(2)极坐标系的四个要素：①极点；②极轴；③长度单位；④角度单位及它的方向．

(3)图示



2．极坐标

(1)极坐标的定义：设 M 是平面内一点，极点 O 与点 M 的距离$|OM|$叫做点 M 的极径，记为ρ；以极轴 Ox 为始边，射线 OM 为终边的角 xOM 叫做点 M 的极角，记为θ.有序数对$(\rho，\theta)$叫做点 M 的极坐标，记作 $M(\rho，\theta)$．

(2)极坐标系中的点与它的极坐标的对应关系：在极坐标系中，极点 O 的极坐标是$(0，\theta)$，$(\theta\in\mathbf{R})$，若点 M 的极坐标是 $M(\rho，\theta)$，则点 M 的极坐标也可写成 $M(\rho，\theta+2k\pi)$，$(k\in\mathbf{Z})$．

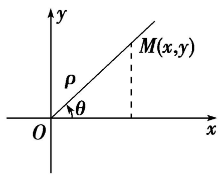
若规定$\rho>0$，$0\leq\theta<2\pi$，则除极点外极坐标系内的点与有序数对$(\rho，\theta)$之间才是一一对应关系．

3．极坐标与直角坐标的互化公式

如图所示，把直角坐标系的原点作为极点，x 轴的正半轴作为极轴，且长度单位相同，设任意一点 M 的直角坐标与极坐标分别为$(x，y)$，$(\rho，\theta)$．

(1)极坐标化直角坐标

$$\begin{cases}x=\rho\cos\theta，\\ y=\rho\sin\theta\end{cases}$$W．



(2)直角坐标化极坐标

$$\begin{cases}\rho^2=x^2+y^2，\\ \tan\theta=\dfrac{y}{x}（x\neq0）\end{cases}．$$

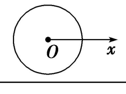
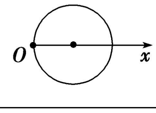
三　简单曲线的极坐标方程

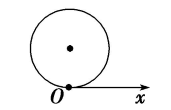
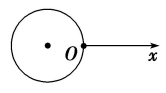
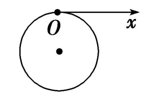
1．曲线的极坐标方程

一般地，在极坐标系中，如果平面曲线 C 上任意一点的极坐标中至少有一个满足方程 $f(\rho，\theta)=0$，并且坐标适合方程 $f(\rho，\theta)=0$ 的点都在曲线 C 上，那么方程 $f(\rho，\theta)=0$ 叫做曲线 C 的极坐标方程．

2．圆的极坐标方程

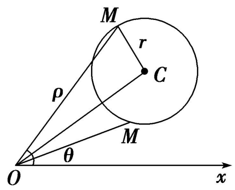
(1)特殊情形如下表：

圆心位置	极坐标方程	图　形
圆心在极点(0，0)	$\rho=r$ $(0\leq\theta<2\pi)$	
圆心在点$(r，0)$	$\rho=2r\cos\theta$ $(-\frac{\pi}{2}\leq\theta<\frac{\pi}{2})$	

圆心在点$(r,\ \frac{\pi}{2})$	$\rho=2r\sin\ \theta$ $(0\leqslant\theta<\pi)$	
圆心在点$(r,\ \pi)$	$\rho=-2r\cos\ \theta$ $(\frac{\pi}{2}\leqslant\theta<\frac{3\pi}{2})$	
圆心在点$(r,\ \frac{3\pi}{2})$	$\rho=-2r\sin\ \theta$ $(-\pi<\theta\leqslant 0)$	

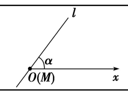
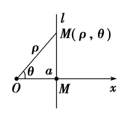
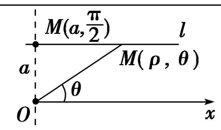
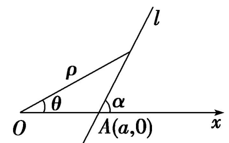
(2)一般情形：设圆心$C(\rho_0,\ \theta_0)$，半径为r，$M(\rho,\ \theta)$为圆上任意一点，则$|CM|=r$，$\angle COM=|\theta-\theta_0|$，根据余弦定理可得圆$C$的极坐标方程为$\rho^2-2\rho_0\rho\cos(\theta-\theta_0)+\rho_0^2-r^2=0$即

$$r^2=\rho^2+\rho_0^2-2\rho\rho_0\cos(\theta-\theta_0)$$

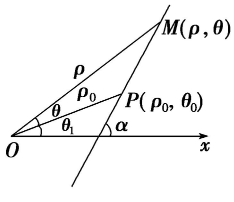


3．**直线的极坐标方程**

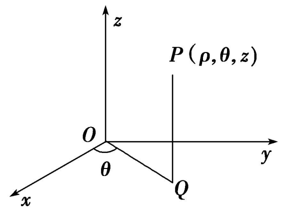
(1)特殊情形如下表：

直线位置	极坐标方程	图　形
过极点，倾斜角为α	(1)$\theta=\alpha(\rho\in\mathbf{R})$ 或$\theta=\alpha+\pi(\rho\in\mathbf{R})$ (2)$\theta=\alpha(\rho\geqslant 0)$ 和$\theta=\pi+\alpha(\rho\geqslant 0)$	
过点$(a,\ 0)$，且与极轴垂直	$\rho\cos\ \theta=a$ $\left(-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$	
过点$\left(a,\ \frac{\pi}{2}\right)$，且与极轴平行	$\rho\sin\ \theta=a$ $(0<\theta<\pi)$	
过点$(a,\ 0)$倾斜角为α	$\rho\sin(\alpha-\theta)=a\sin\alpha$ $(0<\theta<\pi)$	

(2)一般情形，设直线l过点$P(\rho_0,\ \theta_0)$，倾斜角为α，$M(\rho,\ \theta)$为直线l上的动点，则在$\triangle OPM$中利用正弦定理可得直线l的极坐标方程为 $\boldsymbol{\rho\sin(\alpha-\theta)=\rho_0\sin(\alpha-\theta_0)}$.



四　柱坐标系与球坐标系简介（了解）

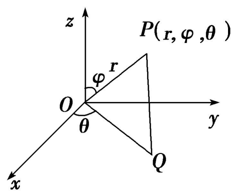


1．柱坐标系

(1)定义：一般地，如图建立空间直角坐标系 $Oxyz$.设 P 是空间任意一点，它在 Oxy 平面上的射影为 Q，用$(\rho，\theta)$$(\rho\geqslant 0，0\leqslant\theta<2\pi)$表示点 Q 在平面 Oxy 上的极坐标，这时点P的位置可用有序数组（ρ，θ，z）$(z\in\mathbf{R})$表示．这样，我们建立了空间的点与有序数组$(\rho，\theta，z)$之间的一种对应关系．把建立上述对应关系的坐标系叫做柱坐标系，有序数组$(\rho，\theta，z)$叫做点 P 的柱坐标，记作 $P(\rho，\theta，z)$，其中 $\rho\geqslant 0，0\leqslant\theta<2\pi，z\in\mathbf{R}$.

(2)空间点 P 的直角坐标$(x，y，z)$与柱坐标$(\rho，\theta，z)$之间的变换公式为$\begin{cases}x=\rho\cos\theta\\y=\rho\sin\theta\\z=z\end{cases}$.

2．球坐标系



(1)定义：一般地，如图建立空间直角坐标系 $Oxyz$.设 P 是空间任意一点，连接 OP，记$|OP|=r$，OP 与 Oz 轴正向所夹的角为 ϕ，设 P 在 Oxy 平面上的射影为 Q，Ox 轴按逆时针方向旋转到 OQ 时所转过的最小正角为θ，这样点 P 的位置就可以用有序数组$(r，\phi，\theta)$表示，这样，空间的点与有序数组$(r，\phi，\theta)$之间建立了一种对应关系．把建立上述对应关系的坐标系叫做球坐标系(或空间极坐标系)，有序数组$(r，\phi，\theta)$，叫做点 P 的球坐标，记作$P(r，\phi，\theta)$，其中 $r\geqslant 0，0\leqslant\phi\leqslant\pi，0\leqslant\theta<2\pi$.

(2)空间点 P 的直角坐标(x,y,z)与球坐标$(r，\phi，\theta)$之间的变换公式为$\begin{cases}x=r\sin\phi\cos\theta\\y=r\sin\phi\sin\theta\\z=r\cos\phi\end{cases}$.