

第二章 参数方程

第一课时 参数方程的概念

一、教学目标：

1. 通过分析抛物运动中时间与运动物体位置的关系，写出抛物运动轨迹的参数方程，体会参数的意义。
2. 分析曲线的几何性质，选择适当的参数写出它的参数方程。

二、教学重点：根据问题的条件引进适当的参数，写出参数方程，体会参数的意义。

教学难点：根据几何性质选取恰当的参数，建立曲线的参数方程。

三、教学方法：启发诱导，探究归纳

四、教学过程

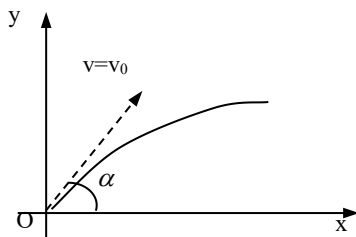
(一). 参数方程的概念

1. 问题提出：铅球运动员投掷铅球，在出手的一刹那，铅球的速度为 v_0 ，与地面成 α 角，如何来刻画铅球运动的轨迹呢？

2. 分析探究理解：

(1)、斜抛运动：

$$\begin{cases} x = v_0 \cos \alpha \cdot t \\ y = v_0 \sin \alpha \cdot t - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases} (t \text{ 为参数})$$

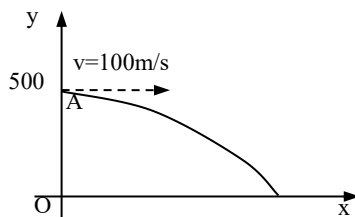


(2)、抽象概括：参数方程的概念。说明：(1) 一般来说，参数的变化范围是有限制的。

(2) 参数是联系变量 x , y 的桥梁，可以有实际意义，也可无实际意义。

(3) 平抛运动：

$$\begin{cases} x = 100t \\ y = 500 - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases} (t \text{ 为参数})$$



(4) 思考交流：把引例中求出的铅球运动的轨迹的参数方程消去参数 t 后，再将所得方程与原方程进行比较，体会参数方程的作用。

(二)、应用举例：

例 1、已知曲线 C 的参数方程是 $\begin{cases} x = 3t \\ y = 2t^2 + 1 \end{cases}$ (t 为参数) (1) 判断点 $M_1(0, 1)$,

$M_2(5, 4)$ 与曲线 C 的位置关系; (2) 已知点 $M_3(6, a)$ 在曲线 C 上, 求 a 的值。

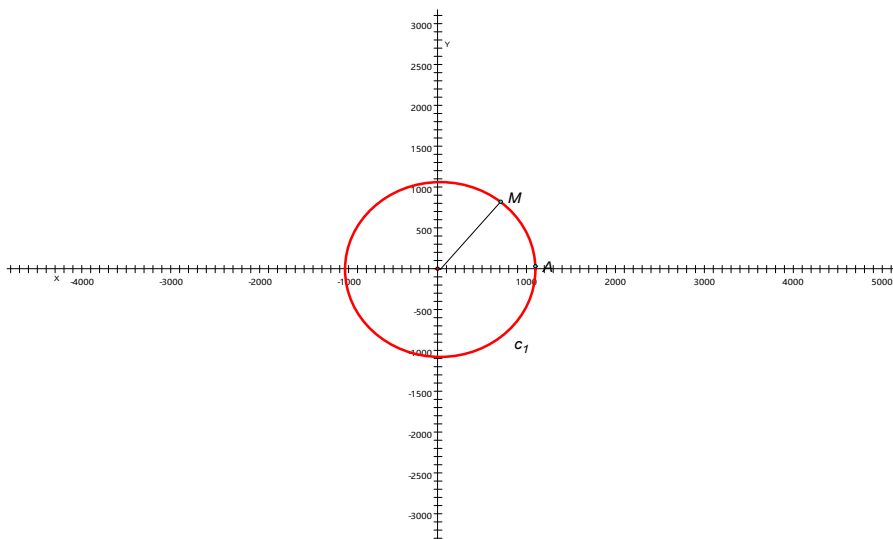
分析: 只要把参数方程中的 t 消去化成关于 x, y 的方程问题易于解决。学生练习。

反思归纳: 给定参数方程要研究问题可化为关于 x, y 的方程问题求解。

例 2、设质点沿以原点为圆心, 半径为 2 的圆做匀速 (角速度) 运动, 角速度为 $\frac{\pi}{60}$ rad/s, 试以时间 t 为参数, 建立质点运动轨迹的参数方程。

解析: 如图, 运动开始时质点位于 A 点处, 此时 $t=0$, 设动点 $M(x, y)$ 对应时刻 t , 由图

可知 $\begin{cases} x=2\cos\theta \\ y=2\sin\theta \end{cases}$ 又 $\theta = \frac{\pi}{60}t$, 得参数方程为 $\begin{cases} x=2\cos\frac{\pi}{60}t \\ y=2\sin\frac{\pi}{60}t \end{cases} (t \geq 0)$ 。



反思归纳: 求曲线的参数方程的一般步骤。

(三)、课堂练习:

(四)、作业:

补充: 设飞机以匀速 $v=150\text{m/s}$ 作水平飞行, 若在飞行高度 $h=588\text{m}$ 处投弹 (设投弹的初速度等于飞机的速度, 且不计空气阻力)。(1) 求炸弹离开飞机后的轨迹方程; (2) 试问飞机在离目标多远 (水平距离) 处投弹才能命中目标。简解: (1)

$$\begin{cases} x=150t \\ y=588-4.9t^2 \end{cases} (t \text{ 为参数}). (2) 1643\text{m}.$$

五、教学反思: 1. 本节学习的数学知识; 2、本节学习的数学方法。学生自我反思、教师引导, 抓住重点知识和方法共同小结归纳、进一步深化理解。

第二课时 圆的参数方程及应用

一、教学目标：

1. 分析圆的几何性质，选择适当的参数写出它的参数方程。利用圆的几何性质求最值（数形结合）

2. 能选取适当的参数，求圆的参数方程

3. 通过观察、探索、发现的创造性过程，培养创新意识。

二、重难点：教学重点：能选取适当的参数，求圆的参数方程

教学难点：选择圆的参数方程求最值问题。

三、教学方法：启发、诱导发现教学。

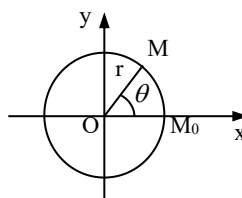
四、教学过程：

（一）、圆的参数方程探求

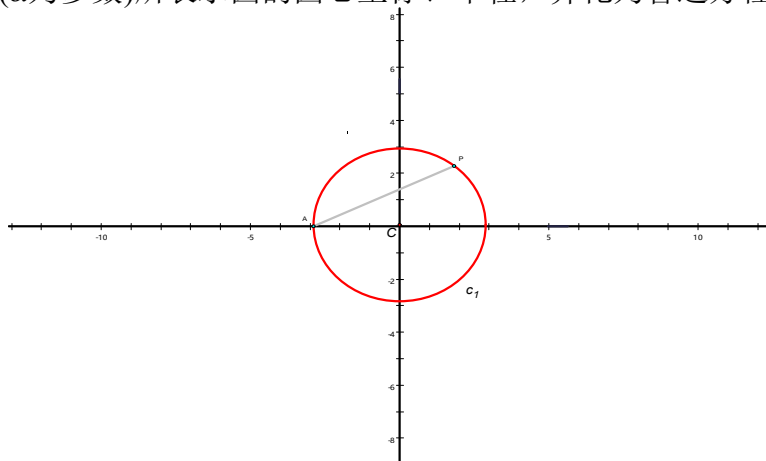
1、根据图形求出圆的参数方程，教师准对问题讲评。

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases} \quad (\theta \text{ 为参数}) \text{ 这就是圆心在原点、半径为 } r \text{ 的圆的参数方程。}$$

说明：（1）参数 θ 的几何意义是 OM 与 x 轴正方向的夹角。（2）随着选取的参数不同，参数方程形式也有不同，但表示的曲线是相同的。（3）在建立曲线的参数方程时，要注明参数及参数的取值范围。



2、指出参数方程 $\begin{cases} x = 2 \cos \alpha - 5 \\ y = 3 + 2 \sin \alpha \end{cases}$ (α 为参数) 所表示圆的圆心坐标、半径，并化为普通方程。



3、若如图取 $\angle PAX = \theta$ ，AP 的斜率为 K ，如何建立圆的参数方程，同学们讨论交流，自我解决。

结论：参数取的不同，可以得到圆的不同形式的参数方程。

4, 反思归纳：求参数方程的方法步骤。 ▶

(二)、应用举例

例 1、已知两条曲线的参数方程

$$C_1: \begin{cases} x=5\cos\theta \\ y=5\sin\theta \end{cases} (\theta \text{ 为参数}) \text{ 和 } C_2: \begin{cases} x=4+t\cos 45^\circ \\ y=3+t\sin 45^\circ \end{cases} (t \text{ 为参数})$$

(1)、判断这两条曲线的形状；(2)、求这两条曲线的交点坐标。学生练习，教师准对问题讲评。

(三)、最值问题：利用圆的几何性质和圆的参数方程求最值（数形结合）

例 2、1、已知点 P (x, y) 是圆 $x^2 + y^2 - 6x - 4y + 12 = 0$ 上动点，求 (1) $x^2 + y^2$ 的最值，

(2) $x+y$ 的最值，

(3) P 到直线 $x+y-1=0$ 的距离 d 的最值。

解：圆 $x^2 + y^2 - 6x - 4y + 12 = 0$ 即 $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 1$ ，用参数方程表示为 $\begin{cases} x=3+\cos\theta \\ y=2+\sin\theta \end{cases}$

由于点 P 在圆上，所以可设 P (3+cos θ, 2+sin θ)，

$$(1) \quad x^2 + y^2 = (3 + \cos \theta)^2 + (2 + \sin \theta)^2 = 14 + 4\sin \theta + 6\cos \theta = 14 + 2\sqrt{13} \sin(\theta + \varphi)$$

(其中 $\tan \varphi = \frac{3}{2}$) $\therefore x^2 + y^2$ 的最大值为 $14+2\sqrt{13}$ ，最小值为 $14-2\sqrt{13}$ 。

(2) $x+y = 3+\cos \theta + 2+\sin \theta = 5+\sqrt{2} \sin(\theta + \frac{\pi}{4})$ $\therefore x+y$ 的最大值为 $5+\sqrt{2}$ ，最小值为 $5-\sqrt{2}$ 。

$$(3) \quad d = \frac{|3 + \cos \theta + 2 + \sin \theta - 1|}{\sqrt{2}} = \frac{|4 + \sqrt{2} \sin(\theta + \frac{\pi}{4})|}{\sqrt{2}}$$

显然当 $\sin(\theta + \frac{\pi}{4}) = \pm 1$ 时，d 取最大值，最小值，分别为 $1+2\sqrt{2}$ ， $1-2\sqrt{2}$ 。

2、过点 (2, 1) 的直线中，被圆 $x^2 + y^2 - 2x + 4y = 0$ 截得的弦：为最长的直线方程是_____；

为最短的直线方程是_____；

3、若实数 x, y 满足 $x^2 + y^2 - 2x + 4y = 0$, 则 $x - 2y$ 的最大值为_____。

(三)、课堂练习：学生练习：1、2

(四)、作业：

1、方程 $x^2 + y^2 - 4tx - 2ty + 5t^2 - 4 = 0$ (t 为参数) 所表示的一族圆的圆心轨迹是 (D)

A. 一个定点 B. 一个椭圆 C. 一条抛物线 D. 一条直线

2、已知 $\begin{cases} x = 2 + \cos \theta \\ y = \sin \theta \end{cases}$ (θ 为参数), 则 $\sqrt{(x-5)^2 + (y+4)^2}$ 的最大值是 6。

8. 曲线 $x^2 + y^2 = 2y$ 的一个参数方程为 $\begin{cases} x = \cos \theta \\ y = 1 + \sin \theta \end{cases}$ (θ 为参数)

五、教学反思：

1、本课我们分析圆的几何性质，选择适当的参数求出圆的参数方程。2、参数取的不同，可以得到圆的不同形式的参数方程。从中体会参数的意义。3、利用参数方程求最值。要求大家掌握方法和步骤。

第三课时 圆锥曲线的参数方程

一、教学目标：

1. 了解圆锥曲线的参数方程及参数的意义
2. 能选取适当的参数，求简单曲线的参数方程
3. 通过观察、探索、发现的创造性过程，培养创新意识。

二、重难点：教学重点：圆锥曲线参数方程的定义及方法

教学难点：选择适当的参数写出曲线的参数方程。

三、教学方法：启发、诱导发现教学。

四、教学过程：

(一)、复习引入：

1. 写出圆方程的标准式和对应的参数方程。

$$(1) \text{ 圆 } x^2 + y^2 = r^2 \text{ 参数方程 } \begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases} \quad (\theta \text{ 为参数})$$

(2) 圆 $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$ 参数方程为:
$$\begin{cases} x = x_0 + r \cos \theta \\ y = y_0 + r \sin \theta \end{cases} \quad (\theta \text{ 为参数})$$

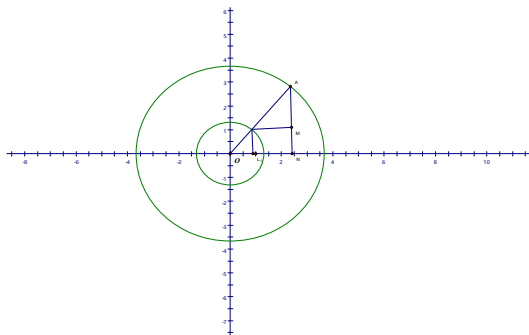
2. 写出椭圆、双曲线和抛物线的标准方程。

3. 能模仿圆参数方程的推导，写出圆锥曲线的参数方程吗？

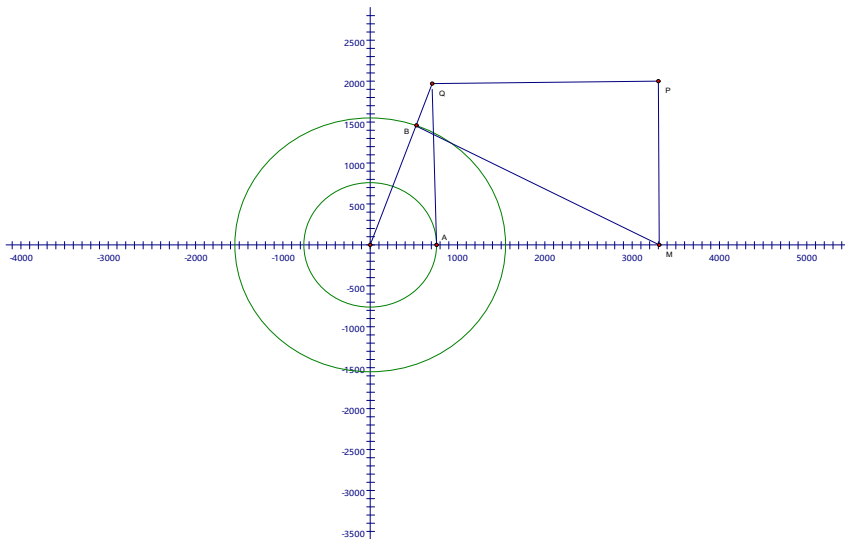
(二)、讲解新课:

1. 椭圆的参数方程推导: 椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 参数方程
$$\begin{cases} x = a \cos \theta \\ y = b \sin \theta \end{cases} \quad (\theta \text{ 为参数}),$$

数 θ 的几何意义是以 a 为半径所作圆上一点和椭圆中心的连线与 X 轴正半轴的夹角。



2. 双曲线的参数方程的推导: 双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 参数方程
$$\begin{cases} x = a \sec \theta \\ y = b \tan \theta \end{cases} \quad (\theta \text{ 为参数})$$



参数 θ 几何意义为以 a 为半径所作圆上一点和椭圆中心的连线与 X 轴正半轴的夹角。

3. 抛物线的参数方程: 抛物线 $y^2 = 2Px$ 参数方程
$$\begin{cases} x = 2Pt^2 \\ y = 2Pt \end{cases} \quad (t \text{ 为参数}),$$
 t 为以抛物

线上一点 (X, Y) 与其顶点连线斜率的倒数。

(1)、关于参数几点说明:

- A. 参数方程中参数可以有物理意义, 几何意义, 也可以没有明显意义。
- B. 同一曲线选取的参数不同, 曲线的参数方程形式也不一样
- C. 在实际问题中要确定参数的取值范围

(2)、参数方程的意义:

参数方程是曲线点的位置的另一种表示形式, 它借助于中间变量把曲线上的动点的两个坐标间接地联系起来, 参数方程与普通方程同等地描述, 了解曲线, 参数方程实际上是一个方程组, 其中 x , y 分别为曲线上点 M 的横坐标和纵坐标。

(3)、参数方程求法: (A) 建立直角坐标系, 设曲线上任一点 P 坐标为 (x, y) ; (B) 选取适当的参数; (C) 根据已知条件和图形的几何性质, 物理意义, 建立点 P 坐标与参数的函数式; (D) 证明这个参数方程就是所求的曲线的方程

(4)、关于参数方程中参数的选取: 选取参数的原则是曲线上任一点坐标当参数的关系比较明显关系相对简单。与运动有关的问题选取时间 t 做参数; 与旋转的有关问题选取角 θ 做参数; 或选取有向线段的数量、长度、直线的倾斜斜角、斜率等。

4、椭圆的参数方程常见形式: (1)、椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 参数方程 $\begin{cases} x = a \cos \theta \\ y = b \sin \theta \end{cases}$ (θ 为

参数); 椭圆 $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 (b > a > 0)$ 的参数方程是 $\begin{cases} x = b \cos \theta \\ y = a \sin \theta \end{cases}$ (θ 为参数, 且 $0 \leq \theta < 2\pi$) .

(2)、以 (x_0, y_0) 为中心焦点的连线平行于 x 轴的椭圆的参数方程是

$\begin{cases} x = x_0 + a \cos \theta \\ y = y_0 + b \sin \theta \end{cases}$ (θ 为参数)。(3) 在利用 $\begin{cases} x = a \cos \theta \\ y = b \sin \theta \end{cases}$ 研究椭圆问题时, 椭圆上的点的

坐标可记作 $(a \cos \theta, b \sin \theta)$ 。

(三)、巩固训练

1、曲线 $\begin{cases} x = t + \frac{1}{t} \\ y = t - \frac{1}{t} \end{cases}$ (t 为参数) 的普通方程为 $x^2 - y^2 = 4$ 。

2、曲线 $\begin{cases} x = \cos \theta \\ y = \sin \theta \end{cases}$ (θ 为参数) 上的点到两坐标轴的距离之和的最大值是 (D)

- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ C. 1 D. $\sqrt{2}$

3、已知椭圆 $\begin{cases} x = 3\cos\theta \\ y = 2\sin\theta \end{cases}$ (θ 为参数) 求 (1) $\theta = \frac{\pi}{6}$ 时对应的点 P 的坐标

(2) 直线 OP 的倾斜角

(四)、作业：学习辅导 p20-22

五、教学反思：

本课要求大家了解圆锥曲线的参数方程及参数的意义，能选取适当的参数，求简单曲线的参数方程，通过推到椭圆及双曲线的参数方程，体会求曲线的参数方程方法和步骤，对椭圆的参数方程常见形式要理解和掌握。

第四课时 圆锥曲线参数方程的应用

一、教学目标：

1. 利用圆锥曲线的参数方程来确定最值，解决有关点的轨迹问题
2. 选择适当的参数方程求最值。
3. 通过观察、探索、发现的创造性过程，培养创新意识。

二、重难点：教学重点：选择适当的参数方程求最值。

教学难点：正确使用参数式来求解最值问题

三、教学模式：讲练结合，探析归纳

四、教学过程：

(一)、复习引入：

通过参数 θ 简明地表示曲线上任一点坐标将解析几何中以计算问题化为三角问题，从而运用三角性质及变换公式帮助求解诸如最值，参数取值范围等问题。

(二)、讲解新课：

例 1、双曲线 $\begin{cases} x = 2\sqrt{3}\tan\alpha \\ y = 6\sec\alpha \end{cases}$ (α 为参数) 的两焦点坐标是_____。

答案: $(0, -4\sqrt{3})$, $(0, 4\sqrt{3})$ 。学生练习。

例 2、方程 $\begin{cases} x = e^t + e^{-t} \\ y = e^t - e^{-t} \end{cases}$ (t 为参数) 的图形是 双曲线右支。

学生练习, 教师准对问题讲评。反思归纳: 判断曲线形状的方法。

例 3、设 P 是椭圆 $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{4} = 1$ 在第一象限部分的弧 AB 上的一点, 求使四边形 $OAPB$ 的面积最大的点 P 的坐标。

分析: 本题所求的最值可以有几个转化方向, 即转化为求 $S_{\Delta POA} + S_{\Delta POB}$, S_{OAPB} 的最大值或者求点 P 到 AB 的最大距离, 或者求四边形 $OAPB$ 的最大值。

学生练习, 教师准对问题讲评。【 $\theta = \frac{\pi}{4}$ 时四边形 $OAPB$ 的最大值 $= 6\sqrt{2}$, 此时点 P 为 $(3\sqrt{2}, 2)$ 。】

(三)、巩固训练

1、直线 $\begin{cases} x = t \cos \theta \\ y = t \sin \theta \end{cases}$ (θ 为参数) 与圆 $\begin{cases} x = 4 + 2 \cos \varphi \\ y = 2 \sin \varphi \end{cases}$ (φ 为参数) 相切, 那么直线的倾斜角为 (A)

A. $\frac{\pi}{6}$ 或 $\frac{5\pi}{6}$ B. $\frac{\pi}{4}$ 或 $\frac{3\pi}{4}$ C. $\frac{\pi}{3}$ 或 $\frac{2\pi}{3}$ D. $-\frac{\pi}{6}$ 或 $-\frac{5\pi}{6}$

2、椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 与 x 轴正向交于点 A , 若这个椭圆上存在点 P , 使 $OP \perp AP$, (O 为原点), 求离心率 e 的范围。

3、抛物线 $y^2 = 4x$ 的内接三角形的一个顶点在原点, 其重心恰是抛物线的焦点, 求内接三角形的周长。

4、设 P 为等轴双曲线 $x^2 - y^2 = 1$ 上的一点, F_1, F_2 为两个焦点, 证明 $|F_1P| \cdot |F_2P| = |OP|^2$

5、求直线 $\begin{cases} x = 1+t \\ y = 1-t \end{cases}$ (t 为参数) 与圆 $x^2 + y^2 = 4$ 的交点坐标。

解: 把直线的参数方程代入圆的方程, 得 $(1+t)^2 + (1-t)^2 = 4$, 得 $t = \pm 1$, 分别代入直线方程, 得交点为 $(0, 2)$ 和 $(2, 0)$ 。

(四)、作业:

练习: 在抛物线 $y^2 = 4ax$ ($a > 0$) 的顶点, 引两互相垂直的两条弦 OA, OB , 求顶

点 O 在 AB 上射影 H 的轨迹方程。

五、教学反思：

本节课我们利用圆锥曲线的参数方程来确定最值，解决有关点的轨迹问题，选择适当的参数方程正确使用参数式来求解最值问题，要求理解和掌握求解方法。

第五课时 直线的参数方程

一、教学目标：

1. 了解直线参数方程的条件及参数的意义
2. 能根据直线的几何条件, 写出直线的参数方程及参数的意义
3. 通过观察、探索、发现的创造性过程, 培养创新意识。

二重难点：教学重点：曲线参数方程的定义及方法

教学难点：选择适当的参数写出曲线的参数方程.

三、教学方法：启发、诱导发现教学.

四、教学过程

(一)、复习引入：

1. 写出圆方程的标准式和对应的参数方程。

$$\text{圆 } x^2 + y^2 = r^2 \text{ 参数方程 } \begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases} \quad (\theta \text{ 为参数})$$

$$(2) \text{ 圆 } (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2 \text{ 参数方程为: } \begin{cases} x = x_0 + r \cos \theta \\ y = y_0 + r \sin \theta \end{cases} \quad (\theta \text{ 为参数})$$

2. 写出椭圆参数方程.

3. 复习方向向量的概念. 提出问题: 已知直线的一个点和倾斜角, 如何表示直线的参数方程?

(二)、讲解新课:

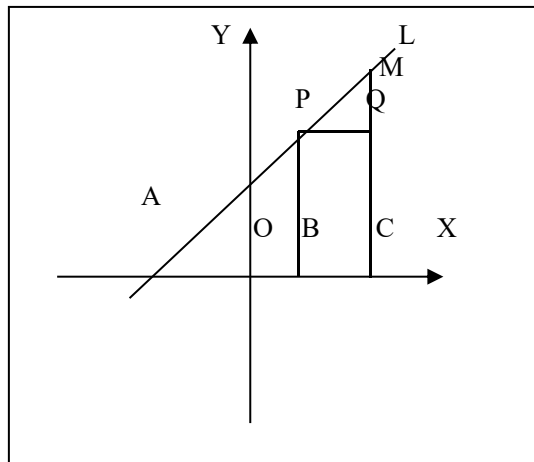
1、问题的提出: 一条直线 L 的倾斜角是 30° , 并且经过点 $P(2, 3)$, 如何描述直线 L 上任意点的位置呢?

如果已知直线 L 经过两个定点 $Q(1, 1)$, $P(4, 3)$, 那么又如何描述直线 L 上任意点的位置呢?

2、教师引导学生推导直线的参数方程:

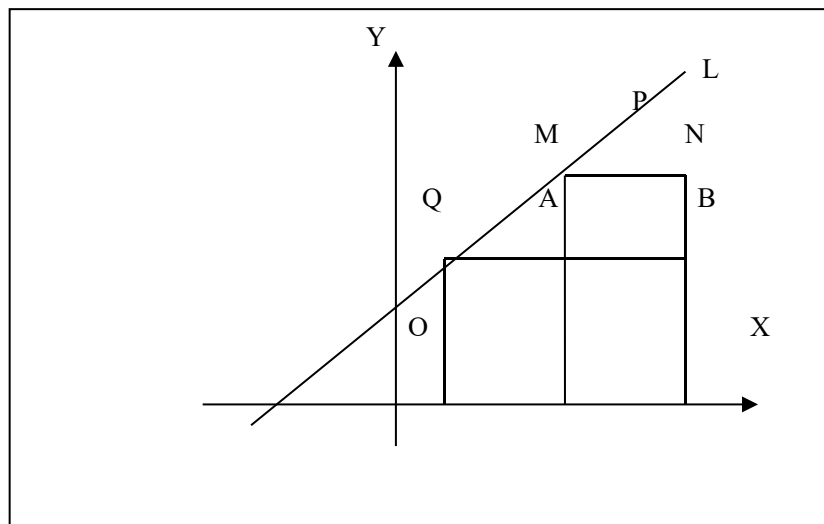
(1) 过定点 $P(x_0, y_0)$ 倾斜角为 α 的直线的参数方程

$$\begin{cases} x = x_0 + t \cos \alpha \\ y = y_0 + t \sin \alpha \end{cases} \quad (t \text{ 为参数})$$



【辨析直线的参数方程】: 设 $M(x, y)$ 为直线上的任意一点, 参数 t 的几何意义是指从点 P 到点 M 的位移, 可以用有向线段 $\overrightarrow{PM}$ 数量来表示。带符号.

(2)、经过两个定点 $Q(x_1, y_1)$, $P(x_2, y_2)$ (其中 $x_1 \neq x_2$) 的直线的参数方程为



$\begin{cases} x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda} \\ y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda} \end{cases}$ (λ 为参数, $\lambda \neq -1$)。其中点 $M(X, Y)$ 为直线上的任意一点。这里

参数 λ 的几何意义与参数方程(1)中的 t 显然不同, 它所反映的是动点 M 分有向线段 $\overline{QP}$ 的数量比 $\frac{QM}{MP}$ 。当 $\lambda > 0$ 时, M 为内分点; 当 $\lambda < 0$ 且 $\lambda \neq -1$ 时, M 为外分点; 当 $\lambda = 0$ 时, 点 M 与 Q 重合。

(三)、直线的参数方程应用, 强理解。

1、例题:

学生练习, 教师准对问题讲评。反思归纳: 1、求直线参数方程的方法; 2、利用直线参数方程求交点。

2、巩固导练:

补充: 1、直线 $\begin{cases} x = t \cos \theta \\ y = t \sin \theta \end{cases}$ (θ 为参数) 与圆 $\begin{cases} x = 4 + 2 \cos \varphi \\ y = 2 \sin \varphi \end{cases}$ (φ 为参数) 相切, 那么直线的倾斜角

为 (A)

- A. $\frac{\pi}{6}$ 或 $\frac{5\pi}{6}$ B. $\frac{\pi}{4}$ 或 $\frac{3\pi}{4}$ C. $\frac{\pi}{3}$ 或 $\frac{2\pi}{3}$ D. $-\frac{\pi}{6}$ 或 $-\frac{5\pi}{6}$

2、(2009 广东理) (坐标系与参数方程选做题) 若直线 $l_1: \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 2 + kt \end{cases}$ (t 为参数) 与直线

$$l_2: \begin{cases} x=s, \\ y=1-2s. \end{cases} \quad (s \text{ 为参数}) \text{ 垂直, 则 } k = \underline{\hspace{2cm}}.$$

解: 直线 $l_1: \begin{cases} x=1-2t, \\ y=2+kt. \end{cases} (t \text{ 为参数})$ 化为普通方程是 $y-2 = -\frac{k}{2}(x-1)$,

该直线的斜率为 $-\frac{k}{2}$,

直线 $l_2: \begin{cases} x=s, \\ y=1-2s. \end{cases} (s \text{ 为参数})$ 化为普通方程是 $y = -2x + 1$,

该直线的斜率为 -2 ,

则由两直线垂直的充要条件, 得 $\left(-\frac{k}{2}\right) \cdot (-2) = -1$, $\underline{k = -1}$ 。

(四)、作业:

补充: (2009 天津理) 设直线 l_1 的参数方程为 $\begin{cases} x=1+t \\ y=1+3t \end{cases}$ (t 为参数), 直线 l_2 的

方程为 $y=3x+4$ 则 l_1 与 l_2 的距离为 w. w. w. k. s. 5. u. c. o. m

【考点定位】本小题考查参数方程化为普通方程、两条平行线间的距离, 基础题。

解析: 由题直线 l_1 的普通方程为 $3x - y - 2 = 0$, 故它与 l_2 的距离为 $\frac{|4+2|}{\sqrt{10}} = \frac{3\sqrt{10}}{5}$ 。

五、教学反思:

(1) 直线参数方程求法; (2) 直线参数方程的特点; (3) 根据已知条件和图形的几何性质, 注意参数的意义。

第六课时 参数方程与普通方程互化

一、教学目标:

1. 掌握参数方程化为普通方程几种基本方法
2. 选取适当的参数化普通方程为参数方程
3. 通过观察、探索、发现的创造性过程, 培养创新意识。

二、重难点: 教学重点: 参数方程与普通方程的互化

教学难点：参数方程与普通方程的等价性

三、教学方法：启发、诱导发现教学.

四、教学过程：

(一)、复习引入：

- (1)、圆的参数方程；
- (2)、椭圆的参数方程；
- (3)、直线的参数方程；
- (4)、双曲线的参数方程。

(二)、新课探究：

1、参数方程化为普通方程的过程就是消参过程常见方法有三种：

- (1) 代入法：利用解方程的技巧求出参数 t ，然后代入消去参数
- (2) 三角法：利用三角恒等式消去参数
- (3) 整体消元法：根据参数方程本身的结构特征，从整体上消去。

化参数方程为普通方程为 $F(x, y) = 0$ ：在消参过程中注意变量 x 、 y 取值范围的一致性，必须根据参数的取值范围，确定 $f(t)$ 和 $g(t)$ 值域得 x 、 y 的取值范围。

2、探析常见曲线的参数方程化为普通方程的方法，体会互化过程，归纳方法。

(1) 圆 $x^2 + y^2 = r^2$ 参数方程
$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases} \quad (\theta \text{ 为参数})$$

(2) 圆 $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$ 参数方程为：
$$\begin{cases} x = x_0 + r \cos \theta \\ y = y_0 + r \sin \theta \end{cases} \quad (\theta \text{ 为参数})$$

(3) 椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 参数方程
$$\begin{cases} x = a \cos \theta \\ y = b \sin \theta \end{cases} \quad (\theta \text{ 为参数})$$

(4) 双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 参数方程
$$\begin{cases} x = a \sec \theta \\ y = b \tan \theta \end{cases} \quad (\theta \text{ 为参数})$$

(5) 抛物线 $y^2 = 2Px$ 参数方程
$$\begin{cases} x = 2Pt^2 \\ y = 2Pt \end{cases} \quad (t \text{ 为参数})$$

(6) 过定点 $P(x_0, y_0)$ 倾斜角为 α 的直线的参数方程

$$\begin{cases} x = x_0 + t \cos \alpha \\ y = y_0 + t \sin \alpha \end{cases} \quad (t \text{ 为参数})$$

3、理解参数方程与普通方程的区别于联系及互化要求。

(二)、例题探析

例 1、将下列参数方程化为普通方程

$$(1) \begin{cases} x = t^2 - 2t \\ y = t^2 + 2 \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} x = \sin \theta + \cos \theta \\ y = \sin 2\theta \end{cases}$$

$$(3) \begin{cases} x = \frac{t+1}{t+2} \\ y = \frac{2t}{t+2} \end{cases}$$

$$(4) \begin{cases} x = \frac{2}{1+t^2} \\ y = \frac{2t}{1+t^2} \end{cases}$$

$$(5) \begin{cases} x = 2(t + \frac{1}{t}) \\ y = 3(t^2 + \frac{1}{t^2}) \end{cases}$$

学生练习，教师准对问题讲评，反思归纳方法。

例 2 化下列曲线的参数方程为普通方程，并指出它是什么曲线。

$$(1) \begin{cases} x = 1 - 2\sqrt{t} \\ y = 3 - 4\sqrt{t} \end{cases}$$

(t 是参数)

$$(2) \begin{cases} x = 2\cos \theta \\ y = \cos 2\theta \end{cases}$$

(θ 是参数)

$$(3) \begin{cases} x = \frac{t}{1-2t^2} \\ y = \frac{1-2t^2}{1+2t^2} \end{cases}$$

(t 是参数)

学生练习，教师准对问题讲评，反思归纳方法。

例 3、已知圆 O 半径为 1，P 是圆上动点，Q (4, 0) 是 x 轴上的定点，M 是 PQ 的中点，当点 P 绕 O 作匀速圆周运动时，求点 M 的轨迹的参数方程。

学生练习，教师准对问题讲评，反思归纳方法。

(三)、巩固导练：

1、(1) 方程 $\begin{cases} x = t + \frac{1}{t} \\ y = 2 \end{cases}$ 表示的曲线 ()。

A、一条直线

B、两条射线

C、一条线段

D、抛物线的一部分

(2) 下列方程中，当方程 $y^2 = x$ 表示同一曲线的点

A、 $\begin{cases} x = t \\ y = t^2 \end{cases}$

B、 $\begin{cases} x = \sin^2 t \\ y = \sin t \end{cases}$

$$C、\begin{cases} x = \sqrt{1+t} \\ y = t \end{cases}$$

$$D、\begin{cases} x = \frac{1 - \cos 2t}{1 + \cos 2t} \\ y = \tan t \end{cases}$$

2、P 是双曲线 $\begin{cases} x = 4 \sin \theta \\ y = 3 \tan \theta \end{cases}$ (θ 是参数) 上任一点, F_1, F_2 是该焦点:

求 $\triangle F_1 F_2$ 的重心 G 的轨迹的普通方程。

3、已知 $P(x, y)$ 为圆 $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 4$ 上任意一点, 求 $x+y$ 的最大值和最小值。

(五)、作业: 学习辅导 p18-20

五、教学反思:

本节课学习了以下内容: 熟练理解和掌握把参数方程化为普通方程的几种方法。抓住重点题目反思归纳方法, 进一步深化理解。

第七课时 圆的渐开线与摆线

一、教学目标:

1. 了解圆的渐开线的参数方程, 了解摆线的生成过程及它的参数方程.
2. 学习用向量知识推导运动轨迹曲线的方法和步骤
3. 通过观察、探索、发现的创造性过程, 培养创新意识。

二、重难点: **教学重点:** 圆的渐开线的参数方程, 摆线的参数方程

教学难点: 用向量知识推导运动轨迹曲线的方法

三、教学方法：讲练结合，启发、诱导发现教学.

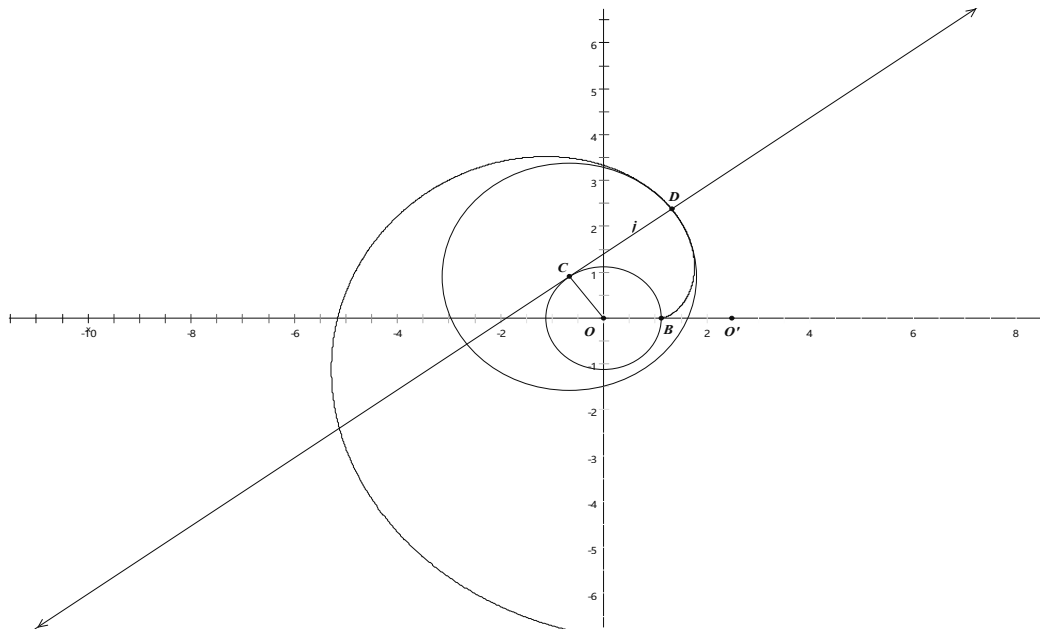
四、教学过程：

(一)、复习引入：复习：圆的参数方程

(二)、新课探析：

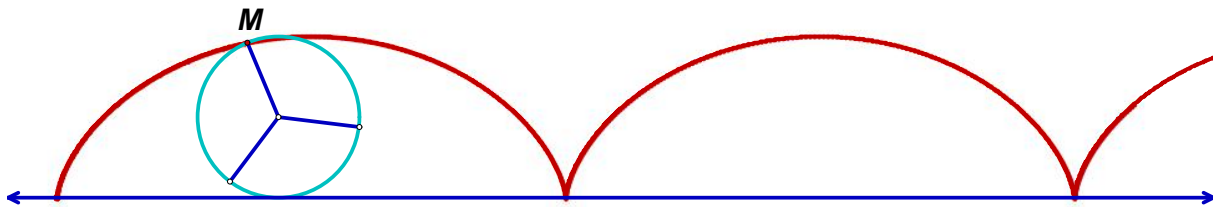
1、以基圆圆心 O 为原点，直线 OA 为 x 轴，建立平面直角坐标系，可得圆渐开线的

参数方程为
$$\begin{cases} x = r(\cos \varphi + \varphi \sin \varphi) \\ y = r(\sin \varphi - \varphi \cos \varphi) \end{cases} \quad (\varphi \text{ 为参数})$$



2、在研究平摆线的参数方程中，取定直线为 x 轴，定点 M 滚动时落在直线上的一个位置为原点，建立直角坐标系，设圆的半径为 r ，可得摆线的参数方程为。

$$\begin{cases} x = r(\varphi - \sin \varphi) \\ y = r(1 - \cos \varphi) \end{cases} \quad (\varphi \text{ 为参数})$$



(三)、例题与训练题：

例 1 求半径为 4 的圆的渐开线参数方程

变式训练 1 当 $\varphi = \frac{\pi}{2}, \pi$ 时, 求圆渐开线 $\begin{cases} x = \cos \varphi + \varphi \sin \varphi \\ y = \sin \varphi - \varphi \cos \varphi \end{cases}$ 上对应点 A、B 坐标并求出 A、B 间的距离。

变式训练 2 求圆的渐开线 $\begin{cases} x = \sqrt{2}(\cos t + t \sin t) \\ y = \sqrt{2}(\sin t - t \cos t) \end{cases}$ 上当 $t = \frac{\pi}{4}$ 对应的点的直角坐标。

例 2 求半径为 2 的圆的摆线的参数方程

变式训练 3: 求摆线 $\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2\pi$ 与直线 $y = 1$ 的交点的直角坐标

例 3、设圆的半径为 8, 沿 x 轴正向滚动, 开始时圆与 x 轴相切于原点 0, 记圆上动点为 M 它随圆的滚动而改变位置, 写出圆滚动一周时 M 点的轨迹方程, 画出相应曲线, 求此曲线上纵坐标 y 的最大值, 说明该曲线的对称轴。

(四)、作业: 学习辅导 p28-30

五、教学反思:

本节课主要要求学生掌握:

1. 观察发现圆的渐开线及圆的摆线的形成过程;
2. 探析圆的渐开线的参数方程, 摆线的参数方程
3. 会运用圆的渐开线的参数方程, 摆线的参数方程求解简单问题。