人教版高中数学必修4-5知识点

第一讲 不等式和绝对值不等式

一.不等式

(一)不等式的基本性质

1.实数大小的比较

(1)数轴上的点与实数之间具有一一对应关系。

(2)设 a、b 是两个实数，它们在数轴上所对应的点分别是 A、B.当点 A 在点 B 的左边时，$a<b$；当点 A 在点 B 的右边时，$a>b$.

(3)两个实数的大小与这两个实数差的符号的关系(不等式的意义)

$$\begin{cases} a>b \Leftrightarrow a-b>0 \\ a=b \Leftrightarrow a-b=0 \\ a<b \Leftrightarrow a-b<0 \end{cases}$$

(4)两个实数比较大小的步骤

①作差；②变形；③判断差的符号；④结论.

2.不等关系与不等式

(1)不等号有≠，>，<，≥，≤共5个.

(2)相等关系和不等关系

任意给定两个实数，它们之间要么相等，要么不相等。现实生活中的两个量从严格意义上说相等是特殊的、相对的，不等是普遍的、绝对的，因此绝大多数的量都是以不等关系存在的。

(3)不等式的定义：用不等号连接起来的式子叫做不等式。

(4)不等关系的表示：用不等式或不等式组表示不等关系。

3.不等式的基本性质

(1)对称性：$a>b\Leftrightarrow b<a$；

(2)传递性：$a>b$，$b>c\Rightarrow a>c$；

(3)可加性：$a>b$，$c\in\mathrm{R}\Leftrightarrow a+c>b+c$；

(4)加法法则：$a>b$，$c>d\Rightarrow a+c>b+d$；

(5)可乘性：$a>b$，$c>0\Rightarrow ac>bc$；$a>b$，$c<0\Rightarrow ac<bc$；

(6)乘法法则：$a>b>0$，$c>d>0\Rightarrow ac>bd$；

(7)乘方法则：$a>b>0$，$n\in\mathrm{N}$ 且 $n\geq2\Rightarrow a^n>b^n$；

(8)开方法则：$a>b>0$，$n\in\mathrm{N}$ 且 $n\geq2\Rightarrow\sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}$.

(9)倒数法则，即 $a>b>0\Rightarrow\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$.

(二)基本不等式

1.重要不等式

定理 1：如果 a，$b\in\mathrm{R}$，那么 $a^2+b^2\geq2ab$，当且仅当 $a=b$ 时，等号成立。

2.基本不等式

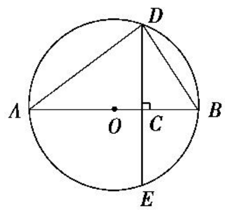
(1)定理 2：如果 a，$b>0$，那么 $a+b\geq2\sqrt{ab}$ $\left(\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}\right)$，当且仅当 $a=b$ 时，等号成立。

(2)定理 2 的应用：对两个正实数 x，y，

①如果它们的和 S 是定值，则当且仅当 $x=y$ 时，它们的积 P 取得最大值，最大值为$\frac{S^2}{4}$.

②如果它们的积 P 是定值，则当且仅当 $x=y$ 时，它们的和 S 取得最小值，最小值为 $2\sqrt{P}$.

3.基本不等式$\sqrt{ab}\leq\frac{a+b}{2}$的几何解释



如图，AB 是$\odot O$ 的直径，C 是 AB 上任意一点，DE 是过 C 点垂直 AB 的弦.若 $AC=a$，$BC=b$，则 $AB=a+b$，$\odot O$ 的半径 $R=\frac{a+b}{2}$，$\mathrm{Rt}\triangle ACD\backsim\mathrm{Rt}\triangle DCB$，$CD^2=AC\cdot BC=ab$，$CD=\sqrt{ab}$，$CD\leq R\Rightarrow\sqrt{ab}\leq\frac{a+b}{2}$，当且仅当 C 点与 O 点重合时，$CD=R=\frac{AB}{2}$，即$\sqrt{ab}=\frac{a+b}{2}$.

4.几个常用的重要不等式

(1)如果 $a\in\mathrm{R}$，那么 $a^2\geq0$，当且仅当 $a=0$ 时取等号；

(2)如果 a，$b>0$，那么 $ab\leq\frac{(a+b)^2}{4}$，当且仅当 $a=b$ 时等号成立；

(3)如果 $a>0$，那么 $a+\frac{1}{a}\geq2$，当且仅当 $a=1$ 时等号成立；

(4)如果 $ab>0$，那么$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geq2$，当且仅当 $a=b$ 时等号成立；

(三)三个正数的算术-几何平均不等式

1.如果 a、b、$c\in\mathrm{R}_+$，那么 $a^3+b^3+c^3\geq3abc$，当且仅当 $a=b=c$ 时，等号成立。

2.(定理 3)如果 a、b、$c\in R_+$，那么 $a+b+c\geq 3\sqrt[3]{abc}$ $\left(\frac{a+b+c}{3}\geq\sqrt[3]{abc}\right)$，当且仅当 $a=b=c$ 时，等号成立。即三个正数的算术平均不小于它们的几何平均。

3.如果 a_1，a_2，…，$a_n\in R_+$，那么 $\frac{a_1+a_2+\dots+a_n}{n}\geq\sqrt[n]{a_1a_2\dots a_n}$，当且仅当 $a_1=a_2=\dots=a_n$ 时，等号成立.即对于 n 个正数 a_1，a_2，…，a_n，它们的算术平均不小于它们的几何平均。

二.绝对值不等式

(一)绝对值三角不等式

1.绝对值及其几何意义

(1)绝对值定义：$|a|=\begin{cases}a（a\geq 0）\\ -a（a<0）\end{cases}$

(2)绝对值几何意义：实数 a 的绝对值 $|a|$ 表示数轴上坐标为 a 的点 A 到原点 O 的距离 $|OA|$

(3)数轴上两点间的距离公式：设数轴上任意两点 A，B 分别对应实数 x_1，x_2，则 $|AB|=|x_1-x_2|$

2.绝对值三角不等式

(1)定理 1：如果 a，b 是实数，则 $|a+b|\leq|a|+|b|$，当且仅当 $ab\geq 0$ 时，等号成立

推论 1：如果 a，b 是实数，那么 $|a|-|b|\leq|a-b|\leq|a|+|b|$

推论 2：如果 a，b 是实数，那么 $|a|-|b|\leq|a+b|\leq|a|+|b|$

(2)定理 2：如果 a，b，c 是实数，那么 $|a-c|\leq|a-b|+|b-c|$，当且仅当 $(a-b)(b-c)\geq 0$ 时，等号成立

(二)绝对值不等式的解法

1.$|x|<a$ 与 $|x|>a$ 型不等式的解法。设 $a>0$，则

(1)$|x|<a \Leftrightarrow -a<x<a$；

(2)$|x|\le a \Leftrightarrow -a\le x\le a$；

(3)$|x|>a \Leftrightarrow x<-a$ 或 $x>a$；

(4)$|x|\ge a \Leftrightarrow x\le -a$ 或 $x\ge a$.

2.$|ax+b|\le c(c>0)$与$|ax+b|\ge c(c>0)$型不等式的解法

(1)$|ax+b|\le c \Leftrightarrow -c\le ax+b\le c$

(2)$|ax+b|\ge c \Leftrightarrow ax+b\le -c$ 或 $ax+b\ge c$

3.$|x-a|+|x-b|\le c$ 与$|x-a|+|x-b|\ge c$ 型不等式的解法

(1)利用绝对值不等式的几何意义求解，体现数形结合思想，理解绝对值的几何意义，给绝对值不等式以准确的几何解释。

(2)以绝对值的零点为分界点，将数轴分为几个区间，利用"零点分段法"求解，体现分类讨论的思想.确定各个绝对值号内多项式的正、负号，进而去掉绝对值号。

(3)通过构造函数，利用函数的图象求解，体现了函数与方程的思想.正确求出函数的零点并画出函数图象(有时需要考察函数的增减性)是关键。

注：绝对值的几何意义

(1)$|x|$的几何意义是数轴上点 x 与原点 O 的距离；

(2)$|x-a|+|x-b|$的几何意义是数轴上点 x 到点 a 和点 b 的距离之和；

(3)$|x-a|-|x-b|$的几何意义是数轴上点 x 到点 a 和点 b 的距离之差。

4.绝对值不等式的几何意义

(1)$|x|\le a(a>0)$的几何意义是以点 a 和$-a$ 为端点的线段，$|x|\le a$ 的解集是$[-a，a]$.

(2)$|x|>a(a>0)$的几何意义是数轴除去以点 a 和$-a$ 为端点的线段后剩下的两条射线，$|x|>a$ 的解集是$(-\infty，-a)\cup(a，+\infty)$.

5.解含绝对值不等式的关键是去掉绝对值变形为不含绝对值的不等式(组)求解。例如：分类讨论法：即通过合理分类去绝对值后再求解。

第二讲 证明不等式的基本方法

一.比较法

比较法主要有：作差比较法；作商比较法。

1.作差比较法(简称比差法)

(1)作差比较法的证明依据是：$a>b\Leftrightarrow a-b>0$；$a=b\Leftrightarrow a-b=0$；$a<b\Leftrightarrow a-b<0$.

(2)基本步骤是：①作差；②变形；③判号；④结论。

2.作商比较法(简称比商法)

(1)作商比较法的证明依据是：当 $b>0$ 时，$\frac{a}{b}>1\Leftrightarrow a>b$；$\frac{a}{b}=1\Leftrightarrow a=b$；$\frac{a}{b}<1\Leftrightarrow a<b$.

(2)基本步骤是：①作商；②变形；③比较与 1 的大小；④结论。

注意：对作差比较法的理解

(1)在证明不等式的各种方法中，作差比较法是最基本、最重要的方法.作差比较法是通过确定不等式两边的差的符号来证明不等式的，因而其应用非常广泛。

(2)不等式差的符号是正是负，一般必须利用不等式的性质经过变形才能判断，其中变形的目的在于判断差的符号，而不必考虑差的值是多少.变形的方法主要有配方法、通分法、因式分解法等。

(3)作差比较法，主要适用于不等式两边是整式或分式型的有理不等式的证明。

(4)在判定不等式两边的式子同号的条件下，如果直接作差不易变形，可以借助不等式性质作平方差或立方差，进行证明。

3.对作商比较法的理解

(1)使用作商法证明不等式 $a>b$ 时，一定要注意 $b>0$ 这个前提条件.若 $b<0$，

$\frac{a}{b}<1\Leftrightarrow a>b$，$\frac{a}{b}=1\Leftrightarrow a=b$，$\frac{a}{b}>1\Leftrightarrow a<b$.

(2)当欲证明的不等式的两边是乘积形式、指数幂形式，不同底的对数式形式时，常用作商法证明。

二.综合法与分析法

1.综合法

一般地，从已知条件出发，利用定义、公理、定理、性质等，经过一系列的推理、论证而得出命题成立，这种证明方法叫做综合法.综合法又叫顺推证法或由因导果法。

2.分析法

证明命题时，从要证的结论出发，逐步寻求使它成立的充分条件，直到所需条件为已知条件或一个明显成立的事实(定义、公理或已证明的定理、性质等)，从而得出要证的命题成立，这种证明方法叫做分析法.这是一种执果索因的思考和证明方法。

注意：

1.用综合法证明不等式的逻辑关系

$A\Rightarrow B_1\Rightarrow B_2\Rightarrow\ldots\Rightarrow B_n\Rightarrow B$

由已知逐步推演不等式成立的必要条件，从而得结论

2.用分析法证明不等式的逻辑关系

$A\Leftarrow B_1\Leftarrow B_2\Leftarrow\ldots\Leftarrow B_n\Leftarrow B$

由结论步步寻求不等式成立的充分条件，从而到已知

3.综合法和分析法的比较

(1)相同点：都是直接证明。

(2)不同点：综合法：由因导果，形式简洁，易于表达；分析法：执果索因，利于思考，易于探索。

4.证明不等式的通常做法

常用分析法找证题切入点，用综合法写证题过程

三.反证法与放缩法

1.反证法

证明不等式时，首先假设要证的命题不成立，以此为出发点，结合已知条件，应用公理、定义、定理、性质等，进行正确的推理，得到和命题的条件(或已证明的定理、性质、明显成立的事实等)矛盾的结论，以说明假设不正确，从而证明原命题成立.我们把它称之为反证法。

2.放缩法

证明不等式时，通过把不等式中的某些部分的值放大或缩小，简化不等式，从而达到证明的目的，我们把这种方法称为放缩法。

3.换元法

将所证的不等式的字母作适当的代换，以达到简化证题过程的目的，这种方法称为换元法。

注意：

1.关于反证法

(1)反证法的原理是否定之否定等于肯定.

即 $\boxed{\text{第一次否定}}$—$\boxed{\text{在假设中，否定了结论}}$

$\downarrow$

$\boxed{\text{第二次否定}}$—$\boxed{\text{通过推理论证，又否定了假设}}$

(2)反证法的使用范围

一般以下几种情况适宜使用反证法：

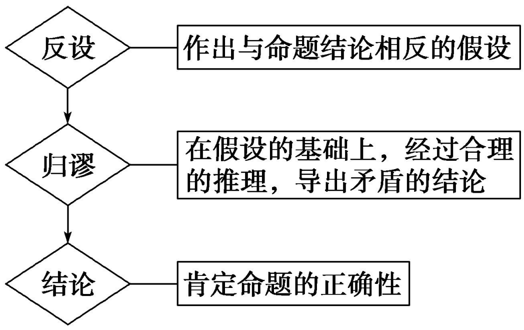
①结论本身是以否定形式出现的一类命题；

②有关结论是以“至多…”或“至少…”的形式出现的一类命题；

③关于唯一性、存在性的命题；

④结论的反面是比原结论更具体、更容易研究的命题。

(3)使用反证法的主要步骤



(4)准确地作出反设是反证法证题的前提，下面是常用词语的反设

原结论	反设	原结论	反设
是	不是	至少有一个	一个也没有
都是	至少有一个不是	至多有一个	至少有两个
大于	小于等于	至少有 n 个	至多有$(n-1)$个
小于	大于等于	至多有 n 个	至少有$(n+1)$个
对所有 x 成立	至少有一个 x 不成立	p 或 q	非 p 且非 q
对任何 x 不成立	至少有一个 x 成立	p 且 q	非 p 或非 q

(5)运用反证法的五点说明

①反设时一定不能把“假设”写成“设”；

②当结论的反面有多种可能时，必须全部列出，否则证明是不完整的；

③必须从结论的否定出发进行推理，就是一定把结论的否定作为推理的条件，只要推理中没有用到“假设”就不是反证法；

④最后导出的矛盾是多样的，可能与已知矛盾、与假设矛盾、与定义、定理、公式矛盾、与已知的事实矛盾等，但矛盾必须是明显的；

⑤反证法是一种间接证明的方法；

2.关于放缩法

(1)放缩法证明不等式的理论依据有：

①不等式的传递性；②等量加不等量为不等量.其中减去一个正数值变小(缩)，加上一个正数值变大(放)；③同分子(分母)异分母(分子)的两个分式大小的比较；④基本不等式与绝对值三角不等式；⑤三角函数的有界性等。

(2)运用放缩法证题的关键是：

放大或缩小要适当，千万不能放(缩)过头，否则问题无法获证。

(3)使用放缩法的常用变形

放缩法是不等式证明中最重要的变形方法之一，放缩必须有目标，而且要恰到好处，目标往往从要证明的结论考虑.常用的放缩法有增项、减项、利用分式的性质、利用不等式的性质、利用已知不等式、利用函数的性质等进行放缩。比如：

$\left(a+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>\left(a+\frac{1}{2}\right)^2$；$\frac{1}{n^2}<\frac{1}{n(n-1)}$($n\in\mathrm{N}$ 且 $n\geq2$)；$\frac{1}{n^2}>\frac{1}{n(n+1)}$($n\in\mathrm{N}^*$)；

$\frac{1}{\sqrt{n}}<\frac{2}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}$($n\in\mathrm{N}$ 且 $n\geq2$)，$\frac{1}{\sqrt{n}}>\frac{2}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$；当 $a>b>0$，$m>0$ 时，$\frac{b}{a}<\frac{b+m}{a+m}$，$\frac{a}{b}>\frac{a+m}{b+m}$

等。

第三讲 柯西不等式与排序不等式

一.二维形式的柯西不等式

1.若 a，b，c，d 都是实数，则$(a^2+b^2)(c^2+d^2)\geq(ac+bd)^2$，当且仅当 $ad=bc$ 时，等号成立。

2.柯西不等式的向量形式

设α，β是两个向量，则$|\alpha\cdot\beta|\leq|\alpha||\beta|$，当且仅当$\beta$是零向量，或存在实数 k，使$\alpha=k\beta$时，等号成立。

3.二维形式的三角不等式

设 x_1，y_1，x_2，$y_2\in R$，那么$\sqrt{x_1^2+y_1^2}+\sqrt{x_2^2+y_2^2}\geq\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$.

注意：

1.二维柯西不等式的三种形式及其关系

定理 1 是柯西不等式的代数形式；定理 2 是柯西不等式的向量形式；定理 3 是柯西不等式的三角形式。

根据向量的意义及其坐标表示不难发现二维形式的柯西不等式及二维形式的三角不等式均可看作是柯西不等式的向量形式的坐标表示.

2.理解并记忆三种形式取“＝”的条件

(1)代数形式中当且仅当 $ad=bc$ 时取等号；

(2)向量形式中当存在实数 k，$\alpha=k\beta$或$\beta=0$ 时取等号；

(3)三角形式中当 P_1，P_2，O 三点共线且 P_1，P_2 在原点 O 两旁时取等号。

3.掌握二维柯西不等式的常用变式

(1) $\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{c^2+d^2}\geq|ac+bd|$

(2) $\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{c^2+d^2}\geq|ac|+|bd|$

(3) $\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{c^2+d^2}\geq ac+bd$

(4)$(a+b)(c+d)\geq(\sqrt{ac}+\sqrt{bd})^2$

4.基本不等式与二维柯西不等式的对比

(1)基本不等式是两个正数之间形成的不等关系。二维柯西不等式是四个实数之间形成的不等关系，从这个意义上讲，二维柯西不等式是比基本不等式高一级的不等式。

(2)基本不等式具有放缩功能，利用它可以比较大小，证明不等式，当和(或积)为定值时，可求积(或和)的最值，同样二维形式的柯西不等式也有这些功能，利用二维形式的柯西不等式求某些特殊函数的最值非常有效。

二.一般形式的柯西不等式

1.三维形式的柯西不等式

设 a_1，a_2，a_3，b_1，b_2，b_3 是实数，则$(a_1^2+a_2^2+a_3^2)(b_1^2+b_2^2+b_3^2)\geq(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2$，当且仅当 $b_i=0(i=1，2，3)$或存在一个数 k，使得 $a_i=kb_i(i=1，2，3)$时，等号成立。

2.一般形式的柯西不等式

设 a_1，a_2，a_3，…，a_n，b_1，b_2，b_3，…，b_n 是实数，则$(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2)\geq(a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n)^2$，当且仅当 $b_i=0(i=1，2，…，n)$或存在一个数 k，使得 $a_i=kb_i(i=1，2，…，n)$时，等号成立。

注意：

1.对柯西不等式一般形式的说明：

一般形式的柯西不等式是二维形式 、三维形式、四维形式的柯西不等式的归纳与推广，其特点可类比二维形式的柯西不等式来总结，左边是平方和的积，右边是积的和的平方。运用时的关键是构造出符合柯西不等式的结构形式。

2.关于柯西不等式的证明：

对于函数 $f(x)=(a_1x-b_1)^2+(a_2x-b_2)^2+\dots+(a_nx-b_n)^2$，显然 $f(x)\geq 0$ 时 $x\in R$ 恒成立，即 $f(x)=(a_1^2+a_2^2+\dots+a_n^2)x^2-2(a_1b_1+a_2b_2+\dots+a_nb_n)x+(b_1^2+b_2^2+\dots+b_n^2)\geq 0$ 对 $x\in R$ 恒成立，

$\therefore \Delta=4(a_1b_1+a_2b_2+\dots+a_nb_n)^2-4(a_1^2+a_2^2+\dots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\dots+b_n^2)\leq 0$，

除以 4 得 $(a_1^2+a_2^2+\dots+a_n^2)\cdot(b_1^2+b_2^2+\dots+b_n^2)\geq(a_1b_1+a_2b_2+\dots+a_nb_n)^2$.

3.一般形式柯西不等式成立的条件：

由柯西不等式的证明过程可知 $\Delta=0\Leftrightarrow f(x)_{\min}=0\Leftrightarrow a_1x-b_1=a_2x-b_2=\dots=a_nx-b_n=0\Leftrightarrow b_1=b_2=\dots=b_n=0$，或 $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\dots=\frac{a_n}{b_n}$.

4.柯西不等式的几种常见变形：

(1)设 $a_1^2+a_2^2+\dots+a_n^2=b_1^2+b_2^2+\dots+b_n^2=1$，则 $-1\leq a_1b_1+a_2b_2+\dots+a_nb_n\leq 1$；

(2)设 $a_i\in R(i=1，2，3，\dots，n)$，则 $\frac{a_1+a_2+\dots+a_n}{n}\leq\sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2+\dots+a_n^2}{n}}$；

(3)设 $a_i\in R$，$b_i>0(i=1，2，3，\dots，n)$，则 $\frac{a_1^2}{b_1}+\frac{a_2^2}{b_2}+\dots+\frac{a_n^2}{b_n}\geq\frac{(a_1+a_2+\dots+a_n)^2}{b_1+b_2+\dots+b_n}$；

(4)设 $a_ib_i>0(i=1，2，3，\dots，n)$，则 $\frac{a_1}{b_1}+\frac{a_2}{b_2}+\dots+\frac{a_n}{b_n}\geq\frac{(a_1+a_2+\dots+a_n)^2}{a_1b_1+a_2b_2+\dots+a_nb_n}$.

三.排序不等式

1.乱序和、反序和、顺序和

设 $a_1\leq a_2\leq\dots\leq a_n$，$b_1\leq b_2\leq\dots\leq b_n$ 为两组实数，c_1，c_2，…，c_n 为 b_1，b_2，…，b_n 的任一排列，称 $a_1c_1+a_2c_2+a_3c_3+\dots+a_nc_n$ 为乱序和，$a_1b_n+a_2b_{n-1}+a_3b_{n-2}+\dots+a_nb_1$ 为反序和，$a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3+\dots+a_nb_n$ 为顺序和。

2.排序不等式(又称排序原理)

设 $a_1\leq a_2\leq\dots\leq a_n$，$b_1\leq b_2\leq\dots\leq b_n$ 为两组实数，c_1，c_2，…，c_n 是 b_1，b_2，…，b_n 的任一排列，那么 $a_1b_n+a_2b_{n-1}+\dots+a_nb_1\leq a_1c_1+a_2c_2+\dots+a_nc_n\leq a_1b_1+a_2b_2+\dots+$

a_nb_n，

当且仅当 $a_1=a_2=\ldots=a_n$ 或 $b_1=b_2=\ldots=b_n$ 时，反序和等于顺序和。

3.排序原理的简记

反序和≤乱序和≤顺序和.

第四讲 数学归纳法证明不等式

一.数学归纳法

1.数学归纳法的定义

一般地，当要证明一个命题对于不小于某正整数 n_0 的所有正整数 n 都成立时，可以用以下两个步骤：

(1)证明当 $n=n_0$ 时命题成立。

(2)假设当 $n=k(k\in N_+$且 $k\geq n_0)$时命题成立，证明当 $n=k+1$ 时命题也成立。

在完成了这两个步骤后，就可以断定命题对于不小于 n_0 的所有正整数都成立，这种证明方法称为数学归纳法。

2.数学归纳法的适用范围

适用于证明一个与无限多个正整数有关的命题。

3.数学归纳法的步骤

(1)(归纳奠基)验证当 $n=n_0(n_0$ 为命题成立的起始自然数)时命题成立；

(2)(归纳递推)假设当 $n=k(k\in N_+$，且 $k\geq n_0)$时命题成立，推导 $n=k+1$ 时命题也成立；

(3)结论：由(1)(2)可知，命题对一切 $n\geq n_0$ 的自然数都成立。

注意：用数学归纳法证明，关键在于两个步骤要做到“递推基础不可少，归纳假设要用到，结论写明莫忘掉”，因此必须注意以下三点：

(1)验证是基础.数学归纳法的原理表明：第一个步骤是要找一个数 n_0，这个 n_0 就是我们要证明的命题对象的最小自然数，这个自然数并不一定就是“1”，因此“找准起点，奠基要稳”是正确运用数学归纳法要注意的第一个问题。

(2)递推是关键。数学归纳法的实质在于递推，所以从“k”到“$k+1$”的过程，必须把归纳假设“$n=k$”时命题成立作为条件来导出“$n=k+1$”时命题成立，在推导过程中,要把归纳假设用上一次或几次,没有用上归纳假设的证明不是数学归纳法。

(3)正确寻求递推关系.数学归纳法的第二步递推是至关重要的，那么如何寻找递推关系呢？①在第一步验证时，不妨多计算几项，并正确写出来，这样对发现递推关系是有帮助的；②探求数列的通项公式时，要善于观察式子或命题的变化规律，观察 n 处在哪个位置；③在书写 $f(k+1)$时，一定要把包含 $f(k)$的式子写出来，尤其是 $f(k)$中的最后一项。除此之外，多了哪些项，少了哪些项都要分析清楚。

二.用数学归纳法证明不等式举例

1.数学归纳法证明不等式

(1)用数学归纳法证明一个与正整数有关的不等式的步骤：

①证明：当 n 取第一个值 n_0 时结论成立；

②假设当 $n=k(k\in N_+$，且 $k\geq n_0)$时结论成立，证明当 $n=k+1$ 时结论也成立。

由①②可知命题对从 n_0 开始的所有正整数 n 都成立。

(2)用数学归纳法证明不等式的重点

用数学归纳法证明不等式的重点在第二步(同时也是难点所在)，即假设 $f(k)>g(k)$成立，证明 $f(k+1)>g(k+1)$成立。

2.贝努利不等式

(1)定义：如果 x 是实数，且 $x>-1$，$x\neq0$，n 为大于 1 的自然数，那么有$(1+x)^n>1$

$+nx$。

(2)作用：在数学研究中经常用贝努利不等式把二项式的乘方$(1+x)^n$缩小为简单的 $1+nx$ 的形式，这在数值估计和放缩法证明不等式中有重要应用。例如：当 x 是实数，且 $x>-1$，$x\neq 0$ 时，由贝努利不等式不难得到不等式$\left(1-\frac{x}{1+x}\right)^n>1-\frac{nx}{1+x}$对一切不小于 2 的正整数 n 成立。

(3)贝努利不等式的一般形式

①当α是实数，并且满足$\alpha>1$ 或$\alpha<0$ 时，有$(1+x)^{\alpha}\geq 1+\alpha x(x>-1)$

②当α是实数，并且满足 $0<\alpha<1$ 时，有$(1+x)^{\alpha}\leq 1+\alpha x(x>-1)$

3.归纳—猜想—证明的思想方法

数学归纳法作为一种重要的证明方法，常常体现在“归纳—猜想—证明”这一基本思想方法中.一方面可用数学归纳法证明已有的与自然数有关的结论；更重要的是，要用不完全归纳法去发现某些结论、规律并用数学归纳法证明其正确性，形成“观察—归纳—猜想—证明”的思想方法。

4.关于用数学归纳法证明不等式的四点注意

(1)在从 $n=k$ 到 $n=k+1$ 的过程中，应分析清楚不等式两端(一般是左端)项数的变化，也就是要认清不等式的结构特征。

(2)瞄准当 $n=k+1$ 时的递推目标，从中分离出 $n=k$ 时的相应式子，借助不等式性质用上归纳假设。

(3)明确用上归纳假设后要证明的不等式应是怎样的，然后通过运用放缩法、分析法、比较法、综合法等方法进行证明。

(4)有些不等式先用分析法转化为另一个较为简单的不等式然后再用数学归纳法证明。

5.关于贝努利不等式

(1)$(1+x)^n>1+nx$ 成立的两个条件：①$n\in N_+$且 $n\geq 2$；②x 的取值范围是 $x>-1$ 且 $x\neq 0$

于是有命题：当 $n\in N_+$且 $n\geq 2$ 时不等式$(1+x)^n>1+nx$ 对一切 $x\in(-1,\ 0)\cup(0,\ +\infty)$恒成立。

(2)常用特例：

①当 $x>-1$ 且 $x\neq 0$ 时，$(1+x)^2>1+2x$　　②当 $x>-1$ 且 $x\neq 0$ 时，$(1+x)^3>1+3x$

6.重要结论

(1)当 $n\geq 5$ 时，$n^2<2^n$.

(2)当 $n\in N_+$时，$|\sin n\theta|\leq n|\sin \theta|$.