选修 4_5　不等式选讲

课　　题：　第 01 课时　　不等式的基本性质

目的要求：

重点难点：

教学过程：

一、引入：

不等关系是自然界中存在着的基本数学关系。《列子?汤问》中脍炙人口的“两小儿辩日”：“远者小而近者大”、“近者热而远者凉”，就从侧面表明了现实世界中不等关系的广泛存在；日常生活中息息相关的问题，如“自来水管的直截面为什么做成圆的，而不做成方的呢?”、“电灯挂在写字台上方怎样的高度最亮？”、“用一块正方形白铁皮，在它的四个角各剪去一个小正方形，制成一个无盖的盒子。要使制成的盒子的容积最大，应当剪去多大的小正方形？”等，都属于不等关系的问题，需要借助不等式的相关知识才能得到解决。而且，不等式在数学研究中也起着相当重要的作用。

本专题将介绍一些重要的不等式（含有绝对值的不等式、柯西不等式、贝努利不等式、排序不等式等）和它们的证明，数学归纳法和它的简单应用等。

人与人的年龄大小、高矮胖瘦，物与物的形状结构，事与事成因与结果的不同等等都表现出不等的关系，这表明现实世界中的量，不等是普遍的、绝对的，而相等则是局部的、相对的。还可从引言中实际问题出发，说明本章知识的地位和作用。

生活中为什么糖水加糖甜更甜呢?转化为数学问题：a 克糖水中含有 b 克糖(a>b>0)，若再加 m(m>0)克糖，则糖水更甜了，为什么?

分析：起初的糖水浓度为$\frac{b}{a}$，加入 m 克糖 后的糖水浓度为$\frac{b+m}{a+m}$，只要证$\frac{b+m}{a+m}>\frac{b}{a}$即可。怎么证呢?

二、不等式的基本性质：

1、实数的运算性质与大小顺序的关系：

数轴上右边的点表示的数总大于左边的点所表示的数，从实数的减法在数轴上的表示可知：

得出结论：要比较两个实数的大小，只要考察它们的差的符号即可。

2、不等式的基本性质：

①、如果 $a>b$，那么 $b<a$，如果 $b<a$，那么 $a>b$。(对称性)

②、如果 $a>b$，且 $b>c$，那么 $a>c$，即 $a>b$，$b>c \Rightarrow a>c$。

③、如果 $a>b$，那么 $a+c>b+c$，即 $a>b \Rightarrow a+c>b+c$。

推论：如果 $a>b$，且 $c>d$，那么 $a+c>b+d$. 即 $a>b$， $c>d \Rightarrow a+c>b+d$.

④、如果 $a>b$，且 $c>0$，那么 $ac>bc$；如果 $a>b$，且 $c<0$，那么 $ac<bc$.

⑤、如果 $a>b>0$，那么 $a^n > b^n$（$n\in N$，且 $n>1$）

⑥、如果 $a>b>0$，那么 $\sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b}$（$n\in N$，且 $n>1$）。

三、典型例题：

例 1、已知 $a>b$，$c<d$，求证：$a-c>b-d$.

例 2 已知 $a>b>0$，$c<0$，求证：$\frac{c}{a} > \frac{c}{b}$。

四、练习：

五、作业：

选修 4_5　　不等式选讲

课　　题：　第 02 课时　　含有绝对值的不等式的解法

目的要求：

重点难点：

教学过程：

一、引入：

在初中课程的学习中，我们已经对不等式和绝对值的一些基本知识有了一定的了解。在此基础上，本节讨论含有绝对值的不等式。

关于含有绝对值的不等式的问题，主要包括两类：一类是解不等式，另一类是证明不等式。下面分别就这两类问题展开探讨。

1、解在绝对值符号内含有未知数的不等式（也称绝对值不等式），关键在于去掉绝对值符号，化成普通的不等式。主要的依据是绝对值的意义.

请同学们回忆一下绝对值的意义。

在数轴上，一个点到原点的距离称为这个点所表示的数的绝对值。即$|x| = \begin{cases} x，如果x > 0 \\ 0，如果x = 0 \\ -x，如果x < 0 \end{cases}$。

2、含有绝对值的不等式有两种基本的类型。

第一种类型。 设 a 为正数。根据绝对值的意义，不等式$|x| < a$的解集是

$\{x \mid -a < x < a\}$，它的几何意义就是数轴上到原点的距离小于 a 的点的集合是开区间（－a，a），如图所示。

$-a$　　　　图 1-1　　　　a

如果给定的不等式符合上述形式，就可以直接利用它的结果来解。

第二种类型。 设 a 为正数。根据绝对值的意义，不等式$|x| > a$的解集是

$\{x \mid x > a 或 x < -a\}$

它的几何意义就是数轴上到原点的距离大于 a 的点的集合是两个开区间$(-\infty,-a),(a,\infty)$的并集。如图 1-2 所示。

$-a$　　　　a

图 1-2

同样，如果给定的不等式符合这种类型，就可以直接利用它的结果来解。

二、典型例题：

例 1、解不等式$|3x-1|<x+2$。

例 2、解不等式$|3x-1|>2-x$。

方法 1：分域讨论

★方法 2：依题意，$3x-1>2-x$或$3x-1<x-2$，（为什么可以这么解？）

例 3、解不等式$|2x+1|+|3x-2|\geq 5$。

例 4、解不等式$|x-2|+|x-1|\geq 5$。

解　本题可以按照例 3 的方法解，但更简单的解法是利用几何意义。原不等式即数轴上的点 x 到 1，2 的距离的和大于等于 5。因为 1，2 的距离为 1，所以 x 在 2 的右边，与 2 的距离大于等于 2（＝（5－1）÷2)；或者 x 在 1 的左边，与 1 的距离大于等于 2。这就是说，$x\geq 4$或$x\leq -1$.

例 5、不等式 $|x-1|+|x+3|>a$，对一切实数x都成立，求实数a的取值范围。

三、小结：

四、练习：解不等式

1、 $2|2x-1|>1.$　　　　2、$4|1-3x|-1<0$

3、 $|3-2x|\leq x+4$.　　　　4、 $|x+1|\geq 2-x$.

5、 $|x^2-2x-4|<1$　　　　6、 $|x^2-1|>x+2$.

7、 $|x|+|x-2|\geq 4$　　　　8、 $|x-1|+|x+3|\geq 6.$

9、 $|x|+|x+1|<2$　　　　10、 $||x|-|x-4||>2.$

五、作业：

选修4_5　不等式选讲

课　　题： 第03课时　含有绝对值的不等式的证明

目的要求：

重点难点：

教学过程：

一、引入：

证明一个含有绝对值的不等式成立，除了要应用一般不等式的基本性质之外，经常还要用到关于绝对值的和、差、积、商的性质：

（1）$|a|+|b|\geq|a+b|$　　（2）$|a|-|b|\leq|a+b|$

（3）$|a|\cdot|b|=|a\cdot b|$　　（4）$\frac{|a|}{|b|}=\left|\frac{a}{b}\right|(b\neq0)$

请同学们思考一下，是否可以用绝对值的几何意义说明上述性质存在的道理？

实际上，性质$|a|\cdot|b|=|a\cdot b|$和$\frac{|a|}{|b|}=\left|\frac{a}{b}\right|(b\neq0)$可以从正负数和零的乘法、除法法则直接推出；而绝对值的差的性质可以利用和的性质导出。因此，只要能够证明$|a|+|b|\geq|a+b|$对于任意实数都成立即可。我们将在下面的例题中研究它的证明。

现在请同学们讨论一个问题：设a为实数，a和$|a|$哪个大？

显然$|a|\geq a$，当且仅当$a\geq0$时等号成立（即在$a\geq0$时，等号成立。在$a<0$时，等号不成立）。同样，$|a|\geq-a.$当且仅当$a\leq0$时，等号成立。

含有绝对值的不等式的证明中，常常利用$|a|\geq+a$、$|a|\geq-a$及绝对值的和的性质。

二、典型例题：

例1、证明　（1）$|a|+|b|\geq|a+b|$，　　（2）$|a+b|\geq|a|-|b|$。

证明（1）如果$a+b\geq0,$那么$|a+b|=a+b.$所以$|a|+|b|\geq a+b=|a+b|.$

如果$a+b<0,$那么$|a+b|=-(a+b).$所以$|a|+|b|\geq-a+(-b)=-(a+b)=|a+b|$

（2）根据（1）的结果，有$|a+b|+|-b|\geq|a+b-b|$，就是，$|a+b|+|b|\geq|a|$。

所以，$|a+b|\geq|a|-|b|$。

例2、证明 $|a|-|b|\leq|a-b|\leq|a|+|b|$。

例 3、证明 $|a-b|\le|a-c|+|b-c|$。

思考：如何利用数轴给出例 3 的几何解释？

（设 A，B，C 为数轴上的 3 个点，分别表示数 a，b，c，则线段 $AB\le AC+CB$.当且仅当 C 在 A，B 之间时，等号成立。这就是上面的例 3。特别的，取 c＝0（即 C 为原点），就得到例 2 的后半部分。）

探究：试利用绝对值的几何意义，给出不等式$|a|+|b|\ge|a+b|$的几何解释？

含有绝对值的不等式常常相加减，得到较为复杂的不等式，这就需要利用例 1，例 2 和例 3 的结果来证明。

例 4、已知 $|x-a|<\frac{c}{2},|y-b|<\frac{c}{2}$，求证 $|(x+y)-(a+b)|<c.$

证明 $|(x+y)-(a+b)|=|(x-a)+(y-b)|\le|x-a|+|y-b|$ （1）

$\because|x-a|<\frac{c}{2},|y-b|<\frac{c}{2}$，

$\therefore|x-a|+|y-b|<\frac{c}{2}+\frac{c}{2}=c$ （2）

由（1），（2）得：$|(x+y)-(a+b)|<c$

例 5、已知$|x|<\frac{a}{4},|y|<\frac{a}{6}.$ 求证：$|2x-3y|<a$。

证明 $\because|x|<\frac{a}{4},|y|<\frac{a}{6}$，$\therefore|2x|<\frac{a}{2},|3y|<\frac{a}{2}$，

由例 1 及上式，$|2x-3y|\le|2x|+|3y|<\frac{a}{2}+\frac{a}{2}=a$。

注意： 在推理比较简单时，我们常常将几个不等式连在一起写。但这种写法，只能用于不等号方向相同的不等式。

三、小结：

四、练习：

1、已知$|A-a|<\frac{c}{2},|B-b|<\frac{c}{2}.$求证：$|(A-B)-(a-b)|<c$。

2、已知$|x-a|<\frac{c}{4},|y-b|<\frac{c}{6}.$求证：$|2x-3y-2a+3b|<c$。

五、作业：

选修 4_5　　不等式选讲

课　　题：　第 07 课时　　不等式的证明方法之一：比较法

目的要求：

重点难点：

教学过程：

一、引入：

要比较两个实数的大小，只要考察它们的差的符号即可，即利用不等式的性质：

二、典型例题：

例 1、设 $a \neq b$，求证：$a^2+3b^2>2b(a+b)$。

例 2、若实数 $x \neq 1$，求证：$3(1+x^2+x^4)>(1+x+x^2)^2$.

证明：采用差值比较法：

$$=3+3x^2+3x^4-1-x^2-x^4-2x-2x^2-2x^3$$

$$=2(x^4-x^3-x+1)$$

$$=2(x-1)^2(x^2+x+1)$$

$$=2(x-1)^2[(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}].$$

$$\therefore 2(x-1)^2[(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}]>0,$$

$$\therefore 3(1+x^2+x^4)>(1+x+x^2)^2.$$

讨论：若题设中去掉 $x \neq 1$ 这一限制条件，要求证的结论如何变换？

例 3、已知 $a,b \in R^+$，求证 $a^a b^b \geq a^b b^a$.

本题可以尝试使用差值比较和商值比较两种方法进行。

证明：1）差值比较法：注意到要证的不等式关于 a,b 对称，不妨设 $a \geq b > 0$.

$\because a-b \geq 0$

$\therefore a^a b^b - a^b b^a = a^b b^b (a^{a-b} - b^{a-b}) \geq 0$，从而原不等式得证。

2）商值比较法：设 $a \geq b > 0$,

$\because \frac{a}{b} \geq 1, a-b \geq 0,\ \therefore \frac{a^a b^b}{a^b b^a} = (\frac{a}{b})^{a-b} \geq 1$. 故原不等式得证。

注：比较法是证明不等式的一种最基本、最重要的方法。用比较法证明不等式的步骤是：作差（或作商）、变形、判断符号。

例 4、甲、乙两人同时同地沿同一路线走到同一地点。甲有一半时间以速度 m 行走，另一半时间以速度 n 行走；乙有一半路程以速度 m 行走，另一半路程以速度 n 行走。如果 $m \neq n$，问甲、乙两人谁先到达指定地点。

分析：设从出发地点至指定地点的路程是 S，甲、乙两人走完这段路程所用的时间分别为 t_1, t_2。要回答题目中的问题，只要比较 t_1, t_2 的大小就可以了。

解：设从出发地点至指定地点的路程是 S，甲、乙两人走完这段路程所用的时间分别为 t_1, t_2，根据题意有

$\frac{t_1}{2}m + \frac{t_1}{2}n = S$，$\frac{S}{2m} + \frac{S}{2n} = t_2$，可得 $t_1 = \frac{2S}{m+n}$，$t_2 = \frac{S(m+n)}{2mn}$，

从而 $t_1 - t_2 = \frac{2S}{m+n} - \frac{S(m+n)}{2mn} = \frac{S[4mn-(m+n)^2]}{2(m+n)mn} = -\frac{S(m-n)^2}{2(m+n)mn}$，

其中 S, m, n 都是正数，且 $m \neq n$。于是 $t_1 - t_2 < 0$，即 $t_1 < t_2$。

从而知甲比乙首先到达指定地点。

讨论：如果 $m = n$，甲、乙两人谁先到达指定地点？

例 5、设 $f(x) = 2x^2 + 1, pq > 0, p + q = 1.$ 求证；对任意实数 a, b，恒有

$$pf(a) + qf(b) \geq f(pa + qb). \qquad (1)$$

证明 考虑（1）式两边的差。

$$= p(2a^2+1) + q(2b^2+1) - [2(pa+qb)^2+1]$$

$$= 2p(1-p)a^2 + 2q(1-q)b^2 - 4pqab + p + q - 1. \qquad (2)$$

即（1）成立。

三、小结：

四、练习：

五、作业：

1．比较下面各题中两个代数式值的大小：

（1）x^2 与 $x^2 - x + 1$；（2）$x^2 + x + 1$ 与 $(x+1)^2$.

2．已知 $a \neq 1$. 求证：（1）$a^2 > 2a - 1$;　（2）$\frac{2a}{1+a^2} < 1$.

3．若 $a \geq b \geq c > 0$，求证 $a^a b^b c^c \geq (abc)^{\frac{a+b+c}{3}}$.

4．比较 a^4-b^4 与 $4a^3(a-b)$ 的大小.

解： $a^4-b^4-4a^3(a-b)=(a-b)(a+b)(a^2+b^2)-4a^3(a-b)=(a-b)(a^3+a^2b+ab^2+b^3-4a^3)$

$=(a-b)[(a^2b-a^3)+(ab^3-a^3)+(b^3-a^3)]=-(a-b)^2(3a^3+2ab+b^2)$

$=-(a-b)^2\left[\left(\sqrt{3}a+\frac{b}{\sqrt{3}}\right)^2+\frac{2b^2}{3}\right]\leq 0$ （当且仅当 d＝b 时取等号）

$\therefore a^4-b^4\geq 4a^3(a-b)$。

5．比较$(a+3)(a-5)$与$(a+2)(a-4)$的大小.

6．已知 $x\neq 0$，比较$(x^2+1)^2$与 x^4+x^2+1 的大小.

7．如果 $x>0$，比较$\left(\sqrt{x}-1\right)^2$与$\left(\sqrt{x}+1\right)^2$的大小.

8．已知 $a\neq 0$，比较$\left(a^2+\sqrt{2}a+1\right)\left(a^2-\sqrt{2}a+1\right)$与$\left(a^2+a+1\right)\left(a^2-a+1\right)$的大小.

9．设 $x\geq 1$，比较 x^3与 x^2-x+1 的大小.

说明：“变形”是解题的关键，是最重一步。因式分解、配方、凑成若干个平方和等是“变形”的常用方法。

选修 4_5　不等式选讲

课　　题：　第 08 课时　　不等式的证明方法之二：综合法与分析法

目的要求：

重点难点：

教学过程：

一、引入：

综合法和分析法是数学中常用的两种直接证明方法，也是不等式证明中的基本方法。由于两者在证明思路上存在着明显的互逆性，这里将其放在一起加以认识、学习，以便于对比研究两种思路方法的特点。

所谓综合法，即从已知条件出发，根据不等式的性质或已知的不等式，逐步推导出要证的不等式。而分析法，则是由结果开始，倒过来寻找原因，直至原因成为明显的或者在已知中。前一种是“由因及果”，后一种是“执果索因”。打一个比方：张三在山里迷了路，救援人员从驻地出发，逐步寻找，直至找到他，这是“综合法”；而张三自己找路，直至回到驻地，这是“分析法”。

以前得到的结论，可以作为证明的根据。特别的，$A^2+B^2\ge 2AB$ 是常常要用到的一个重要不等式。

二、典型例题：

例 1、a,b 都是正数。求证：$\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}\ge 2.$

证明：由重要不等式 $A^2+B^2\ge 2AB$ 可得

本例的证明是综合法。

例 2、设 $a>0,b>0$，求证 $a^3+b^3\ge a^2b+ab^2.$

证法一　分析法

要证 $a^3+b^3\ge a^2b+ab^2$ 成立.

只需证 $(a+b)(a^2-ab+b^2)\ge ab(a+b)$ 成立，

又因 $a+b>0$，

只需证 $a^2-ab+b^2\ge ab$ 成立，

又需证 $a^2-2ab+b^2\ge 0$ 成立，

即需证 $(a-b)^2\ge 0$ 成立.

而 $(a-b)^2>0$ 显然成立. 由此命题得证。

证法二　综合法

注意到 $a>0,b>0$，即 $a+b>0$，

由上式即得$(a+b)(a^2-ab+b^2)\ge ab(a+b)$，

从而$a^3+b^3\ge a^2b+ab^2$成立。

议一议：根据上面的例证，你能指出综合法和分析法的主要特点吗？

例 3、已知 a，b，m 都是正数，并且$a<b.$求证：$\dfrac{a+m}{b+m}>\dfrac{a}{b}.$　　（1）

证法一　要证（1），只需证$b(a+m)>a(b+m)$　　（2）

要证（2），只需证$bm>am$　　（3）

要证（3），只需证$b>a$　　（4）

已知（4）成立，所以（1）成立。

上面的证明用的是分析法。下面的证法二采用综合法。

证法二　因为 $b>a,m$是正数，所以$bm>am$

两边同时加上ab得$b(a+m)>a(b+m)$

两边同时除以正数$b(b+m)$得（1）。

读一读：如果用$P\Rightarrow Q$或$Q\Leftarrow P$表示命题 P 可以推出命题 Q（命题 Q 可以由命题 P 推出），那么采用分析法的证法一就是　（1）$\Leftarrow(2)\Leftarrow(3)\Leftarrow(4).$

而采用综合法的证法二就是　$(4)\Rightarrow(3)\Rightarrow(2)\Rightarrow(1).$

如果命题 P 可以推出命题 Q，命题 Q 也可以推出命题 P，即同时有$P\Rightarrow Q,Q\Rightarrow P$，那么我们就说命题 P 与命题 Q 等价，并记为$P\Leftrightarrow Q.$在例 2 中，由于$b,m,b+m$都是正数，实际上

例 4、证明：通过水管放水，当流速相同时，如果水管横截面的周长相等，那么横截面是圆的水管比横截面是正方形的水管流量大。

分析：当水的流速相同时，水管的流量取决于水管横截面面积的大小。设截面的周长为L，则周长为L的圆的半径为$\dfrac{L}{2\pi}$，截面积为$\pi\left(\dfrac{L}{2\pi}\right)^2$；周长为$L$的正方形为$\dfrac{L}{4}$，截面积为$\left(\dfrac{L}{4}\right)^2$。所以本题只需证明$\pi\left(\dfrac{L}{2\pi}\right)^2>\left(\dfrac{L}{4}\right)^2$。

证明：设截面的周长为L，则截面是圆的水管的截面面积为$\pi\left(\frac{L}{2\pi}\right)^2$，截面是正方形的水管的截面面积为$\left(\frac{L}{4}\right)^2$。只需证明：$\pi\left(\frac{L}{2\pi}\right)^2>\left(\frac{L}{4}\right)^2$。

为了证明上式成立，只需证明$\frac{\pi L^2}{4\pi^2}>\frac{L^2}{16}$。

两边同乘以正数$\frac{4}{L^2}$，得：$\frac{1}{\pi}>\frac{1}{4}$。

因此，只需证明$4>\pi$。

上式显然成立，所以$\pi\left(\frac{L}{2\pi}\right)^2>\left(\frac{L}{4}\right)^2$ 。

这就证明了：通过水管放水，当流速相同时，如果水管横截面的周长相等，那么横截面是圆的水管比横截面是正方形的水管流量大。

例 5、证明：$a^2+b^2+c^2\geq ab+bc+ca$。

证法一　因为　$a^2+b^2\geq 2ab$　（2）

$b^2+c^2\geq 2bc$　（3）

$c^2+a^2\geq 2ca$　（4）

所以三式相加得$2(a^2+b^2+c^2)\geq 2(ab+bc+ca)$　（5）

两边同时除以 2 即得（1）。

证法二　因为$a^2+b^2+c^2-(ab+bc+ca)=\frac{1}{2}(a-b)^2+\frac{1}{2}(b-c)^2+\frac{1}{2}(c-a)^2\geq 0,$

所以（1）成立。

例 6、证明：$(a^2+b^2)(c^2+d^2)\geq(ac+bd)^2.$　（1）

证明　（1）$\Leftrightarrow(a^2+b^2)(c^2+d^2)-(ac+bd)^2\geq 0$　（2）

$\Leftrightarrow a^2c^2+b^2c^2+a^2d^2+b^2d^2-(a^2c^2+2abcd+b^2d^2)\geq 0$　（3）

$\Leftrightarrow\quad b^2c^2+a^2d^2-2abcd\geq 0$　（4）

$\Leftrightarrow\quad (bc-ad)^2\geq 0$　（5）

（5）显然成立。因此（1）成立。

例 7、已知a,b,c都是正数，求证$a^3+b^3+c^3\geq 3abc.$并指出等号在什么时候成立？

分析：本题可以考虑利用因式分解公式

着手。

证明： $a^3+b^3+c^3-3abc$

$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

$=\frac{1}{2}(a+b+c)[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2].$

由于 a,b,c 都是正数，所以 $a+b+c>0.$ 而 $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\geq 0$，

可知 $a^3+b^3+c^3-3abc\geq 0$

即 $a^3+b^3+c^3\geq 3abc$ （等号在 $a=b=c$ 时成立）

探究：如果将不等式 $a^3+b^3+c^3\geq 3abc$ 中的 a^3,b^3,c^3 分别用 a,b,c 来代替，并在两边同除以 3，会得到怎样的不等式？并利用得到的结果证明不等式：

$(1+a+b)(1+b+c)(1+c+a)>27$，其中 a,b,c 是互不相等的正数，且 $abc=1$.

三、小结：

解不等式时，在不等式的两边分别作恒等变形，在不等式的两边同时加上（或减去）一个数或代数式，移项，在不等式的两边同时乘以（或除以）一个正数或一个正的代数式，得到的不等式都和原来的不等式等价。这些方法，也是利用综合法和分析法证明不等式时常常用到的技巧。

四、练习：

1、已知 $x>0,$ 求证： $x+\frac{1}{x}\geq 2.$

2、已知 $x>0,y>0,x\neq y,$ 求证 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}>\frac{4}{x+y}.$

3、已知 $a>b>0,$ 求证 $\sqrt{a-b}>\sqrt{a}-\sqrt{b}.$

4、已知 $a>0,b>0.$ 求证：

（1） $(a+b)(a^{-1}+b^{-1})\geq 4.$

（2） $(a+b)(a^2+b^2)(a^3+b^3)\geq 8a^3b^3.$

5、已知 a,b,c,d 都是正数。求证：

（1） $\frac{a+b+c+d}{2}\geq\sqrt{ab}+\sqrt{cd}$; （2） $\frac{a+b+c+d}{4}\geq\sqrt[4]{abcd}.$

6、已知a,b,c都是互不相等的正数，求证$(a+b+c)(ab+bc+ca)>9abc.$

选修4_5　　不等式选讲

课　　题：　第09课时　　不等式的证明方法之三：反证法

目的要求：

重点难点：

教学过程：

一、引入：

前面所讲的几种方法，属于不等式的直接证法。也就是说，直接从题设出发，经过一系列的逻辑推理，证明不等式成立。但对于一些较复杂的不等式，有时很难直接入手求证，这时可考虑采用间接证明的方法。所谓间接证明即是指不直接从正面确定论题的真实性，而是证明它的反论题为假，或转而证明它的等价命题为真，以间接地达到目的。其中，反证法是间接证明的一种基本方法。

反证法在于表明：若肯定命题的条件而否定其结论，就会导致矛盾。具体地说，反证法不直接证明命题“若p则q”，而是先肯定命题的条件p，并否定命题的结论q，然后通过合理的逻辑推理，而得到矛盾，从而断定原来的结论是正确的。

利用反证法证明不等式，一般有下面几个步骤：

第一步　分清欲证不等式所涉及到的条件和结论；

第二步　作出与所证不等式相反的假定；

第三步　从条件和假定出发，应用证确的推理方法，推出矛盾结果；

第四步　断定产生矛盾结果的原因，在于开始所作的假定不正确，于是原证不等式成立。

二、典型例题：

例1、已知$a>b>0$，求证：$\sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}$（$n\in N$且$n>1$）

例1、设$a^3+b^3=2$，求证$a+b\le 2$.

证明：假设$a+b>2$，则有$a>2-b$，从而

因为$6(b-1)^2+2\ge 2$，所以$a^3+b^3>2$，这与题设条件$a^3+b^3=2$矛盾，所以，原不等式$a+b\le 2$成立。

例2、设二次函数$f(x)=x^2+px+q$，求证：$|f(1)|,|f(2)|,|f(3)|$中至少有一个不小于$\frac{1}{2}$.

证明：假设$|f(1)|,|f(2)|,|f(3)|$都小于$\frac{1}{2}$，则

$$|f(1)|+2|f(2)|+|f(3)|<2. \qquad (1)$$

另一方面，由绝对值不等式的性质，有

$$\begin{aligned}&|f(1)|+2|f(2)|+|f(3)|\geq|f(1)-2f(2)+f(3)|\\&=|(1+p+q)-2(4+2p+q)+(9+3p+q)|=2\end{aligned} \qquad (2)$$

（1）、（2）两式的结果矛盾，所以假设不成立，原来的结论正确。

注意：诸如本例中的问题，当要证明几个代数式中，至少有一个满足某个不等式时，通常采用反证法进行。

议一议：一般来说，利用反证法证明不等式的第三步所称的矛盾结果，通常是指所推出的结果与已知公理、定义、定理或已知条件、已证不等式，以及与临时假定矛盾等各种情况。试根据上述两例，讨论寻找矛盾的手段、方法有什么特点？

例 3、设 $0 < a, b, c < 1$，求证：$(1 ? a)b$, $(1 ? b)c$, $(1 ? c)a$, 不可能同时大于$\frac{1}{4}$

证：设$(1 ? a)b > \frac{1}{4}$, $(1 ? b)c > \frac{1}{4}$, $(1 ? c)a > \frac{1}{4}$,

则三式相乘：$ab < (1 ? a)b?(1 ? b)c?(1 ? c)a < \frac{1}{64}$ ①

又∵$0 < a, b, c < 1$ ∴$0<(1-a)a\leq\left[\frac{(1-a)+a}{2}\right]^2=\frac{1}{4}$

同理：$(1-b)b\leq\frac{1}{4}$, $(1-c)c\leq\frac{1}{4}$

以上三式相乘： $(1 ? a)a?(1 ? b)b?(1 ? c)c\leqslant\frac{1}{64}$ 与①矛盾

∴原式成立

例 4、已知 $a + b + c > 0$，$ab + bc + ca > 0$，$abc > 0$，求证：$a, b, c > 0$

证：设 $a < 0$, ∵$abc > 0$, ∴$bc < 0$

又由 $a + b + c > 0$, 则 $b + c = ?a > 0$

∴$ab + bc + ca = a(b + c) + bc < 0$ 与题设矛盾

又：若 $a = 0$，则与 $abc > 0$ 矛盾， ∴必有 $a > 0$

同理可证：$b > 0$, $c > 0$

三、小结：

四、练习：

1、利用反证法证明：若已知 a，b，m 都是正数，并且$a<b$，则 $\frac{a+m}{b+m}>\frac{a}{b}$.

2、设 $0 < a, b, c < 2$，求证：$(2 ? a)c$, $(2 ? b)a$, $(2 ? c)b$, 不可能同时大于 1

3、若 $x, y > 0$，且 $x + y >2$，则$\frac{1+y}{x}$和$\frac{1+x}{y}$中至少有一个小于 2。

提示：反设$\frac{1+y}{x}$≥2，$\frac{1+x}{y}$≥2　∵$x, y > 0$，可得 $x + y \leqslant 2$　与 $x + y >2$ 矛盾。

五、作业：

选修 4_5　不等式选讲

课　　题：　第 10 课时　　不等式的证明方法之四：放缩法与贝努利不等式

目的要求：

重点难点：

教学过程：

一、引入：

所谓放缩法，即是把要证的不等式一边适当地放大（或缩小），使之得出明显的不等量关系后，再应用不等量大、小的传递性，从而使不等式得到证明的方法。这种方法是证明不等式中的常用方法，尤其在今后学习高等数学时用处更为广泛。

下面我们通过一些简单例证体会这种方法的基本思想。

二、典型例题：

例 1、若n是自然数，求证$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}<2.$

证明：$\because \frac{1}{k^2}<\frac{1}{k(k-1)}=\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}, k=2,3,4,\cdots,n.$

$$=\frac{1}{1}+(\frac{1}{1}-\frac{1}{2})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+\cdots+(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n})$$

$$=2-\frac{1}{n}<2.$$

注意：实际上，我们在证明$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}<2$的过程中，已经得到一个更强的结论$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}<2-\frac{1}{n}$，这恰恰在一定程度上体现了放缩法的基本思想。

例 2、求证：$1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{1\times 2\times 3}+\cdots+\frac{1}{1\times 2\times 3\times\cdots\times n}<3.$

证明：由$\frac{1}{1\times 2\times 3\times\cdots\times k}<\frac{1}{1\cdot 2\cdot 2\cdot\cdots\cdot 2}=\frac{1}{2^{k-1}}$，（$k$ 是大于 2 的自然数）

得$1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{1\times 2\times 3}+\cdots+\frac{1}{1\times 2\times 3\times\cdots\times n}$

例 3、若 a, b, c, $d?R^+$，求证：$1<\frac{a}{a+b+d}+\frac{b}{b+c+a}+\frac{c}{c+d+b}+\frac{d}{d+a+c}<2$

证：记 $m=\frac{a}{a+b+d}+\frac{b}{b+c+a}+\frac{c}{c+d+b}+\frac{d}{d+a+c}$

∵ a, b, c, $d?R^+$

∴ $m>\frac{a}{a+b+c+d}+\frac{b}{a+b+c+a}+\frac{c}{c+d+a+b}+\frac{d}{d+a+b+c}=1$

∴1 ＜ m ＜ 2　　即原式成立。

例 4、当 n ＞ 2 时，求证：$\log_n(n-1)\log_n(n+1)<1$

证：∵n ＞ 2　　∴ $\log_n(n-1)>0,\quad \log_n(n+1)>0$

∴ $\log_n(n-1)\log_n(n+1)<\left[\frac{\log_n(n-1)+\log_n(n+1)}{2}\right]^2=\left[\frac{\log_n(n^2-1)}{2}\right]^2$

∴n ＞ 2 时，　$\log_n(n-1)\log_n(n+1)<1$

三、小结：

四、练习：

1、设n为大于 1 的自然数，求证$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\cdots+\frac{1}{2n}>\frac{1}{2}.$

2、设n为自然数，求证$(2-\frac{1}{n})(2-\frac{3}{n})(2-\frac{5}{n})\cdots(2-\frac{2n-1}{n})\geq\frac{1}{n!}.$

选修 4_5　　不等式选讲

课　　题： 第 11 课时　　几个着名的不等式之一：柯西不等式

目的要求：

重点难点：

教学过程：

一、引入：

除了前面已经介绍的贝努利不等式外，本节还将讨论柯西不等式、排序不等式、平均不等式等着名不等式。这些不等式不仅形式优美、应用广泛，而且也是进一步学习数学的重要工具。

1、什么是柯西不等式：

定理 1：（柯西不等式的代数形式）设 a,b,c,d 均为实数，则

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2)\ge(ac+bd)^2,$$

其中等号当且仅当 $ad=bc$ 时成立。

证明：

几何意义：设 α，β 为平面上以原点 O 为起点的两个非零向量，它们的终点分别为 A（a,b），B（c,d），那么它们的数量积为 $\alpha\bullet\beta=ac+bd$，

而 $|\alpha|=\sqrt{a^2+b^2}$，$|\beta|=\sqrt{c^2+d^2}$，

所以柯西不等式的几何意义就是：$|\alpha|\cdot|\beta|\ge|\alpha\bullet\beta|$，

其中等号当且仅当两个向量方向相同或相反（即两个向量共线）时成立。

2、**定理 2：（柯西不等式的向量形式）**设 α，β 为平面上的两个向量，则 $|\alpha|\cdot|\beta|\ge|\alpha\bullet\beta|$，其中等号当且仅当两个向量方向相同或相反（即两个向量共线）时成立。

3、**定理 3：（三角形不等式）**设 x_1,y_1,x_2,y_2,x_3,y_3 为任意实数，则：

分析：

思考：三角形不等式中等号成立的条件是什么？

4、**定理 4：（柯西不等式的推广形式）：**设 n 为大于 1 的自然数，a_i,b_i（$i=1$，2，…，n）为任意实数，则：$\sum_{i=1}^{n}a_i^2\sum_{i=1}^{n}b_i^2\ge(\sum_{i=1}^{n}a_ib_i)^2$，其中等号当且仅当 $\frac{b_1}{a_1}=\frac{b_2}{a_2}=\cdots=\frac{b_n}{a_n}$ 时成立（当 $a_i=0$ 时，约定 $b_i=0$，$i=1$，2，…，n）。

证明：构造二次函数：$f(x)=(a_1x-b_1)^2+(a_2x-b_2)^2+\cdots+(a_nx-b_n)^2$

即构造了一个二次函数：$f(x)=(\sum_{i=1}^{n}a_i{}^2)x^2-2(\sum_{i=1}^{n}a_ib_i)x+\sum_{i=1}^{n}b_i{}^2$

由于对任意实数x，$f(x)\ge 0$恒成立，则其$\Delta\le 0$，

即：$\Delta=4(\sum_{i=1}^{n}a_ib_i)^2-4(\sum_{i=1}^{n}a_i{}^2)(\sum_{i=1}^{n}b_i{}^2)\le 0$，

即：$(\sum_{i=1}^{n}a_ib_i)^2\le(\sum_{i=1}^{n}a_i{}^2)(\sum_{i=1}^{n}b_i{}^2)$，

等号当且仅当$a_1x-b_1=a_2x-b_2=\cdots=a_nx-b_n=0$，

即等号当且仅当$\frac{b_1}{a_1}=\frac{b_2}{a_2}=\cdots=\frac{b_n}{a_n}$时成立（当$a_i=0$时，约定$b_i=0$，$i=1$，2，…，$n$）。

如果a_i（$1\le i\le n$）全为0，结论显然成立。

柯西不等式有两个很好的变式：

变式 1 设$a_i\in R,bi>0(i=1,2,\cdots,n),\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i{}^2}{b_i}\ge\frac{(\sum a_i)^2}{\sum b_i}$，等号成立当且仅当

变式 2 设 a_i，b_i 同号且不为 0（i=1，2，…，n），则：$\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{b_i}\ge\frac{(\sum a_i)^2}{\sum a_ib_i}$，等号成立当且仅当

$$b_1=b_2=\cdots=b_n。$$

二、典型例题：

例 1、已知$a^2+b^2=1$，$x^2+y^2=1$，求证：$|ax+by|\le 1$。

例 2、设$a,b,c,d\in R$，求证：$\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{c^2+d^2}\ge\sqrt{(a+c)^2+(b+d)^2}$。

例 3、设α,β,γ为平面上的向量，则$|\alpha-\beta|+|\beta-\gamma|\ge|\alpha-\gamma|$。

例 4、已知a,b,c均为正数，且$a+b+c=1$，求证：$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\ge 9$。

方法 1：

方法 2：（应用柯西不等式）

例 5：已知a_1，a_2，…，a_n为实数，求证：$\sum_{i=1}^{n}a_i{}^2\ge\frac{1}{n}(\sum_{i=1}^{n}a_i)^2$。

分析：

推论：在n个实数a_1，a_2，…，a_n的和为定值为S时，它们的平方和不小于$\frac{1}{n}S^2$，当且仅当$a_1=a_2=\cdots=a_n$时，平方和取最小值$\frac{1}{n}S^2$。

三、小结：

四、练习：

1、设 x_1，x_2，…，$x_n>0$，则$\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{\sqrt{1-x_i}}\ge\frac{\sum_{i=1}^{n}\sqrt{x_i}}{\sqrt{n-1}}$

2、设$x_i\in R^+$（i=1，2，…，n）且$\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{1+x_i}=1$ 求证：$\sum_{i=1}^{n}x_i\ge 2\sum_{1\le i\le j\le n}x_ix_j$.

3、设 a 为实常数，试求函数$f(x)=\left|\sin x(a+\cos x)\right|$ （$x\in R$）的最大值.

4、求函数$f(x)=a\cdot\sqrt{\sin x}+b\sqrt{\cos x}$在$(0,\frac{\pi}{2})$上的最大值，其中 a，b 为正常数.

五、作业：

1、已知：$a^2+b^2=1$，$m^2+n^2=2$，证明：$-\sqrt{2}\le am+bn\le\sqrt{2}$。

.

选修4_5　不等式选讲

课　　题： 第13课时　　几个着名的不等式之三：平均不等式

目的要求：

重点难点：

教学过程：

一、引入：

1、**定理1**：如果$a,b \in R$，那么$a^2+b^2 \ge 2ab$（当且仅当$a=b$时取“=”）

证明：$a^2+b^2-2ab=(a-b)^2$

1．指出定理适用范围：$a,b \in R$

强调取“=”的条件$a=b$。

2、**定理2**：如果a,b是正数，那么$\frac{a+b}{2} \ge \sqrt{ab}$（当且仅当$a=b$时取“=”）

证明：$\because (\sqrt{a})^2+(\sqrt{b})^2 \ge 2\sqrt{ab}$　　$\therefore a+b \ge 2\sqrt{ab}$

即：$\frac{a+b}{2} \ge \sqrt{ab}$　　当且仅当$a=b$时　$\frac{a+b}{2}=\sqrt{ab}$

注意：1．这个定理适用的范围：$a \in R^+$；

2．语言表述：两个正数的算术平均数不小于它们的几何平均数。

3、**定理3**：如果$a,b,c \in R^+$，那么$a^3+b^3+c^3 \ge 3abc$（当且仅当$a=b=c$时取“=”）

证明：$\because a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b)^3+c^3-3a^2b-3ab^2-3abc$

$\because a,b,c \in R^+$　　$\therefore$上式≥0　　从而$a^3+b^3+c^3 \ge 3abc$

指出：这里$a,b,c \in R^+$　$\because a+b+c<0$就不能保证。

推论：如果$a,b,c \in R^+$，那么$\frac{a+b+c}{3} \ge \sqrt[3]{abc}$。（当且仅当$a=b=c$时取“=”）

证明：$(\sqrt[3]{a})^3+(\sqrt[3]{b})^3+(\sqrt[3]{c})^3 \ge 3\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[3]{b}\cdot\sqrt[3]{c}$

4、**算术—几何平均不等式：**

①．如果$a_1,a_2,\cdots,a_n\in R^+,n>1且n\in N^+$ 则：$\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$叫做这 n 个正数的算术平均数，$\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$叫做这 n 个正数的几何平均数；

②．基本不等式： $\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\geqslant\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$ （$n\in N^*,a_i\in R^+,1\le i\le n$）

这个结论最终可用数学归纳法，二项式定理证明（这里从略）

语言表述：n 个正数的算术平均数不小于它们的几何平均数。

③．$\dfrac{a+b}{2}\ge\sqrt{ab}$的几何解释：

以$a+b$为直径作圆，在直径 AB 上取一点 C，过 C 作弦 DD’?AB 则$CD^2=CA\cdot CB=ab$，从而$CD=\sqrt{ab}$，而半径$\dfrac{a+b}{2}\ge CD=\sqrt{ab}$。

二、典型例题：

例 1、已知a,b,c为两两不相等的实数，求证：$a^2+b^2+c^2>ab+bc+ca$。

证：∵ $a^2+b^2>2ab$ $b^2+c^2>2bc$ $c^2+a^2>2ca$

以上三式相加：$2(a^2+b^2+c^2)>2ab+2bc+2ca$

∴ $a^2+b^2+c^2>ab+bc+ca$

例 2、设a,b,c为正数，求证：$(ab+a+b+1)(ab+ac+bc+c^2)\ge16abc$。

例 3、设a_1，a_2，a_3，…，a_n为正数，证明：$\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\ge\dfrac{n}{\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\cdots+\dfrac{1}{a_n}}$。

例 4、若$x,y\in R^+$，设$Q(x,y)=\sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{2}}$ $A(x,y)=\dfrac{x+y}{2}$ $G(x,y)=\sqrt{xy}$

$H(x,y)=\dfrac{2}{\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}}$ 求证：$Q(x,y)\ge A(x,y)\ge G(x,y)\ge H(x,y)$

加权平均；算术平均；几何平均；调和平均

证：∵ $(\dfrac{x+y}{2})^2=\dfrac{x^2+y^2+2xy}{4}\le\dfrac{x^2+y^2+x^2+y^2}{4}=\dfrac{x^2+y}{2}$

∴ $\sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{2}}\ge\dfrac{x+y}{2}$ 即：$Q(x,y)\ge A(x,y)$（俗称幂平均不等式）

由平均不等式 $A(x,y) \ge G(x,y)$

$$H(x,y)=\frac{2xy}{x+y} \le \frac{2xy}{2\sqrt{xy}}=\sqrt{xy}=G(x,y)$$ 即： $G(x,y) \ge H(x,y)$

综上所述： $Q(x,y) \ge A(x,y) \ge G(x,y) \ge H(x,y)$

三、小结：

四、练习：

五、作业：

1、若 $a+b=1, a,b \in R^+$ 求证 $(a+\frac{1}{a})^2+(b+\frac{1}{b})^2 \ge \frac{25}{2}$

证：由幂平均不等式：$(a+\frac{1}{a})^2+(b+\frac{1}{b})^2 \ge \frac{(a+\frac{1}{a}+b+\frac{1}{b})^2}{2}$

选修4_5　　不等式选讲

课　　题：　第15课时　　利用柯西不等式求最大（小）值

目的要求：

重点难点：

教学过程：

一、引入：

1、柯西不等式：$\sum_{i=1}^{n} a_i{}^2 \sum_{i=1}^{n} b_i{}^2 \geq (\sum_{i=1}^{n} a_i b_i)^2$。

二、典型例题：

例1、把一条长是m的绳子截成三段，各围成一个正方形。怎样截法才能使这三个正方形的面积和最小？

例2、如图，等腰直角三角形AOB的直角边为1，在这个三角形内任意取一点P，过P分别引三边的平行线，与各边围成以P点为顶点的三个三角形（图中阴影部分），求这三个三角形面积和的最小值，以及取到最小值时点P的位置。

分析：

三、小结：

四、练习：

五、作业：

选修4_5　　不等式选讲

课　　题：　第16课时　　数学归纳法与不等式

目的要求：

重点难点：

教学过程：

一、引入：

数学归纳法是一个递推的数学论证方法，论证的第一步是证明命题在n＝1(或n_0)时成立，这是递推的基础；第二步是假设在n＝k时命题成立，再证明n＝k＋1时命题也成立，这是递推的依据。实际上它使命题的正确性突破了有限，达到无限。证明时，关键是k＋1步的推证，要有目标意识。

二、典型例题：

例1、证明：$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=(1+2+3+\cdots+n)^2$。

例2、设$x>-1$，$n\in N^*$，证明贝努利不等式：$(1+x)^n>1+nx$。

例3、设a,b为正数，$n\in N^*$，证明：$\dfrac{a^n+b^n}{2}\geq(\dfrac{a+b}{2})^n$。

例4、设数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，若对于所有的自然数n，都有$S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}$，证明$\{a_n\}$是等差数列。　（94年全国文）

例5、已知数列$\frac{8\cdot1}{1^2\cdot3^2}$，得，…，$\frac{8\cdot n}{(2n-1)^2\cdot(2n+1)^2}$，…。$S_n$为其前n项和，求$S_1$、$S_2$、$S_3$、$S_4$，推测$S_n$公式，并用数学归纳法证明。　（93年全国理）

解：计算得$S_1=\frac{8}{9}$，$S_2=\frac{24}{25}$，$S_3=\frac{48}{49}$，$S_4=\frac{80}{81}$，　猜测$S_n=\frac{(2n+1)^2-1}{(2n+1)^2}$　(n∈N)

【注】 从试验、观察出发，用不完全归纳法作出归纳猜想，再用数学归纳法进行严格证明，这是探索性问题的证法，数列中经常用到。　（试值 → 猜想 → 证明）

【另解】 用裂项相消法求和

例6、设$a_n=\sqrt{1\times2}+\sqrt{2\times3}+\cdots+\sqrt{n(n+1)}$　(n∈N),证明：$\frac{1}{2}n(n+1)<a_n<\frac{1}{2}(n+1)^2$　。

三、小结：

四、练习：

五、作业：

1、设 $f(\log_a x)=\frac{a(x^2-1)}{x(a^2-1)}$ ，①.求 f(x)的定义域；　②.在 y＝f(x)的图像上是否存在两个不同点，使经过这两点的直线与 x 轴平行？证明你的结论。　③.求证：$f(n)>n$　（n>1 且 n∈N）。

2、已知数列{a_n}满足 $a_1=1$，$a_n=a_{n-1}\cos x+\cos[(n-1)x]$，　（x≠kπ，n≥2 且 n∈N）。①.求 a_2和 a_3；　②.猜测 a_n，并用数学归纳法证明你的猜测。

3、用数学归纳法证明等式：$\cos\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2^2}\cdot\cos\frac{x}{2^3}\cdot\cdots\cdot\cos\frac{x}{2^n}=\frac{\sin x}{2^n\cdot\sin\frac{x}{2^n}}$（81 年全国高考）

4、用数学归纳法证明：$6^{2n-1}+1$　(n∈N)能被 7 整除。