高中数学选修 1-1 知识点总结归纳

常用逻辑用语

1.1　命题及其关系

1.1.1　命题

1、命题：一般地，在数学中我们把语言、符号或式子表达的，可以判断真假的陈述句叫做命题。其中判断为真的语句叫做真命题，判断为假的语句叫做假命题。

2、命题的构成：在数学中，命题通常写成“若 p，则 q”的形式。其中 p 叫做命题的条件，q 叫做命题的结论。

1.1.2　四种命题

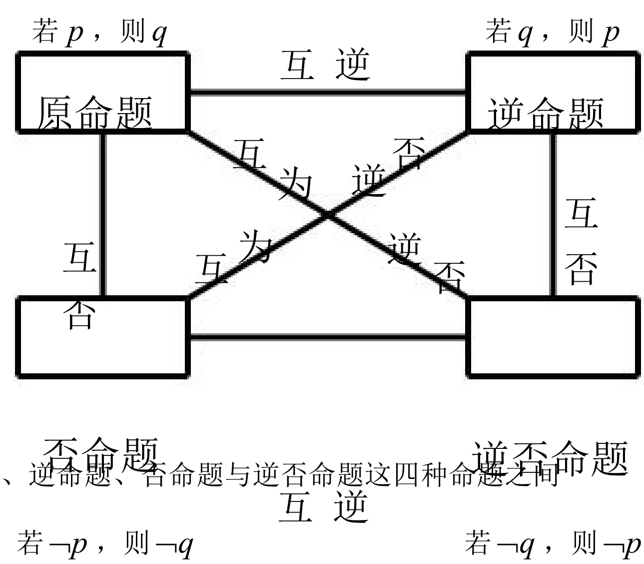
3、互逆命题：一般地，对于两个命题，如果一个命题的条件和结论分别是另一个命题的结论和条件，那么我们这样的两个命题叫做互逆命题。其中一个命题叫做原命题，另一个叫做原命题的逆命题。如果原命题为“若 p，则 q”，则它的逆命题为“若 q，则 p”.

4、互否命题：一般地，对于两个命题，其中一个命题的条件和结论恰好是另一个命题的条件的否定和结论的否定，我们把这样的两个命题叫做互否命题。如果把其中的一个命题叫做原命题,，那么另一个叫做原命题的否命题。如果原命题为“若 p，则 q”，则它的否命题为“若 $\neg p$，则 $\neg q$”.

5、互逆否命题：一般地，对于两个命题，其中一个命题的条件和结论恰好是另一个命题的结论的否定和条件的否定，我们把这样的两个命题叫做互为逆否命题。如果把其中的一个命题叫做原命题，那么另一个叫做原命题的逆否命题。如果原命题为“若 p，则 q”，则它的逆否命题为“若 $\neg q$，则 $\neg p$”.

6、以上总结概括：

原命题	若 p，则 q
逆命题	若 q，则 p
否命题	若 $\neg p$，则 $\neg q$
逆否命题	若 $\neg q$，则 $\neg p$



1.1.3　四种命题间的相互关系

7、四种命题间的相互关系：一般地，原命题、逆命题、否命题与逆否命题这四种命题之间

的相互关系：

8、四种命题的真假性：一般地，四种命题的真假性之间的关系：

（1）两个命题和互否命题，它们有相同的真假性；

（2）两个命题为互逆否命题或互否命题，它们的真假性没有关系。

原命题	逆命题	否命题	逆否命题
真	真	真	真
真	假	假	真
假	真	真	假
假	假	假	假

1.2　充要条件与必要条件

1.2.1　充分条件与必要条件

1、充要条件与必要条件：一般地，“若 p，则 q”为真命题，是指由 p 通过推理可以得出 q. 这时，我们就说，由 p 可推出 q，记作 $p \Rightarrow q$，并且说 p 是 q 的充分条件，q 是 p 的必要条件。如果“若 p，则 q 为假命题”，那么由 p 推不出 q，此时我们就说 p 不是 q 的充分条件，q 不是 p 的必要条件。

1.2.2　充要条件

2、一般地，如果既有 $p \Rightarrow q$，又有 $q \Rightarrow p$，就记作 $p \Leftrightarrow q$.此时，我们说，p 是 q 的充分必要条件，简称充要条件。

1.2 内容总结

条件 p 与结论 q 的关系	结论	用集合表示 p：A，q：B
$p \Rightarrow q$	p 是 q 的充分条件	$A \subseteq B$
$q \Rightarrow p$	p 是 q 的必要条件	$B \subseteq A$
$p \Rightarrow q$ 且 $q \not\Rightarrow p$	p 是 q 的充分不必要条件	A Ü B
$p \not\Rightarrow q$ 且 $q \Rightarrow p$	p 是 q 的必要不充分条件	B Ü A
$p \Leftrightarrow q$	p 是 q 的充要条件	$A = B$
$p \not\Rightarrow q$ 且 $q \not\Rightarrow p$	p 是 q 的既不充分	$A \not\subseteq B$ 且 $B \not\subseteq A$

	也不必要条件	

1.3 简单的逻辑联结构

1.3.1 且（and）

1、 p 且 q 定义：一般地，用关联词“且”把命题 p 和命题 q 连接起来，就得到一个新命题，记作 $p \wedge q$，读作“ p 且 q ”.与集合 $A \bigcap B=\{x \mid x \in A$ 且 $x \in B\}$ 相关。

2、 p 且 q 的真假：当 p，q 都是真命题时，$p \wedge q$ 是真命题；当 p，q 两个命题中有一个命题是假命题时，$p \wedge q$ 是假命题。简记为：一假则假，同真则真。

1.3.2 或（or）

3、 p 或 q 定义：一般地，用关联词“或”把命题 p 和命题 q 连接起来，就得到一个新命题，记作 $p \vee q$，读作“ p 或 q ”.与集合 $A \bigcup B=\{x \mid x \in A$ 或 $x \in B\}$ 相关。

4、 p 或 q 的真假：当 p，q 两个命题中有一个命题是真命题时，$p \vee q$ 是真命题；当 p，q 两个命题都是假命题时，$p \vee q$ 是假命题。简记为：一真则真，同假则假。

1.3.3 非（not）

5、 p 非 q 定义：一般地，对一个命题 p 全盘否定，就得到一个新命题，记作 $\neg p$，读作“非 p ”或“ p 的否定”.与集合 $\complement_U A=\{x \mid x \in U$ 且 $x \notin A\}$

6、 p 非 q 的真假：若 p 是真命题，$\neg p$ 必是假命题；若 p 是假命题，则 $\neg p$ 必是真命题。简记为：与 p 真假性相反。

1.4 全称量词与存在量词

1.4.1 全称量词

1、定义：短语“对所有的”“对任意一个”在逻辑中通常叫做全称量词，并用符号“ $\forall$ ”表示。含有全程量词的命题，叫做全称命题。

2、表述形式：对 M 中任意一个 x，有 $p(x)$ 成立。符号简记为 $\forall x \in M$， $p(x)$.

1.4.2 存在量词

3、定义：短语“存在一个”“至有少一个”在逻辑中通常叫做存在量词，并用符号“ $\exists$ ”表示。含有存在量词的命题，叫做特称命题。

4、表述形式：存在 M 中的一个 x_0，是 $p(x_0)$ 成立。符号简记为 $\exists x_0 \in M$， $p(x_0)$.

1.4.3　含有一个量词的命题的否定

5、全称命题的否定：一般地，对于含有一个量词的全程命题的否定，有下面的结论：

全称命题 p：$\forall x \in M$，$p(x)$，它的否定$\neg p$：$\exists x_0 \in M$，$\neg p(x_0)$.

全称命题的否定是特称命题。

6、特定命题的否定：一般地，对于含有一个量词的特称命题的否定，有下面的结论：

特称命题 p：$\exists x_0 \in M$，$p(x_0)$，它的否定$\neg p$：$\forall x \in M$，$\neg p(x)$.

特称命题的否定是全称命题。

第二章　圆锥曲线与方程

2.1　椭圆

2.1.1　椭圆及其标准方程

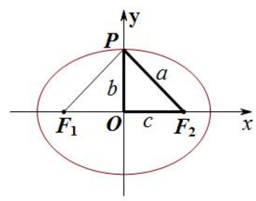
1、椭圆的定义：平面内与两个定点F_1，F_2的距离之和等于常数（大于$|F_1F_2|$）的点的轨迹叫做<u>椭圆</u>。这两个定点叫做<u>椭圆的焦点</u>，两焦点间的距离叫做<u>椭圆的焦距</u>。用集合语言表示：

$P=\{M \| PF_1|+|PF_2|=2a,\ 2a>|F_1F_2|\}$

2、椭圆的满足条件：①当$|MF_1|+|MF_2|=2a>|F_1F_2|$时，$M$ 的轨迹为椭圆；

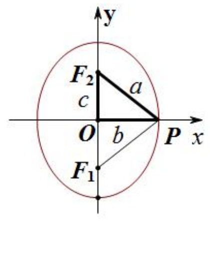
②当$|MF_1|+|MF_2|=2a=|F_1F_2|$时，$M$ 的轨迹为F_1，F_2为端点的线段；

③当$|MF_1|+|MF_2|=2a<|F_1F_2|$时，$M$ 的轨迹不存在。



3、椭圆的标准方程：①焦点在x轴上：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$

我们把这样的方程叫做椭圆的标准方程，两个焦点分别是$F_1(-c,\ 0)$，$F_2(c,\ 0)$，这里$b^2=a^2-c^2$.

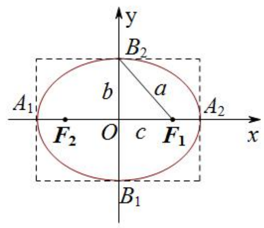


②焦点在y轴上：$\dfrac{y^2}{a^2}+\dfrac{x^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ 两个焦点分别为$F_1(0,\ -c)$，$F_2(0,\ c)$.

③当焦点不确定可设为：$mx^2+ny^2=1\ (m>0,\ n>0,\ m\neq n)$

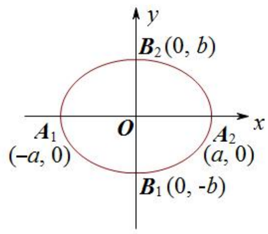
2.1.2　椭圆的简单几何性质（设椭圆的标准方程为$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$）

4、范围：由图可知，椭圆上点 A_1A_2 为长轴，横坐标的范围是 $-a \le x \le a$ （a 为长半轴长）。B_1B_2 为短轴，纵坐标的范围是 $-b \le y \le b$ （b 为短半轴长）。



5、对称轴：椭圆既是轴对称图形，又是中心对称图形。

6、顶点：椭圆与它的对称轴有四个焦点，这四个交点叫做椭圆的顶点。线段 A_1A_2 的长等于 $2a$，线段 B_1B_2 的长等于 $2b$.

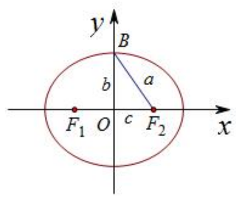


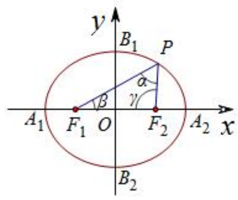
7、离心率：椭圆的焦距与长轴长的比 $\frac{c}{a}$ 叫做椭圆的离心率，常用 e 表示，即 $e=\frac{c}{a}$，离心率的范围：$0<e<1$.e 越接近于 a，从而 $b=\sqrt{a^2-c^2}$ 越小，因此椭圆越扁；反之，当 e 越接近 0 时，c 接近于 0，从而 b 越接近于 a，这时椭圆就越接近圆。

当且仅当 $a=b$ 时，$c=0$，这时两个焦点重合，图形变为圆，它的方程为 $x^2+y^2=a^2$

椭圆补充内容

8、离心率公式推导：

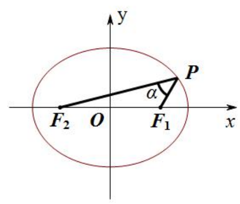




P 在 y 轴上：$e=\frac{c}{a}=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}=\cos\angle OF_2B$

P 不在 y 轴上：$e=\frac{\sin\alpha}{\sin\beta+\sin\gamma}=\frac{\cos\frac{\beta+\gamma}{2}}{\cos\frac{\beta-\gamma}{2}}$

9、交点三角形面积公式：



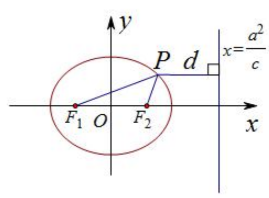
$$S_{\triangle PF_1F_2}=\frac{b^2\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=b^2\tan\frac{\alpha}{2}=C\left|y_P\right|=\frac{1}{2}\left|PF_1\right|\left|PF_2\right|\cdot\sin\alpha$$

周长公式：$C=2\left(a+c\right)$

10、椭圆的第二定义：平面内，若动点 $M(x,\ y)$ 与定点 $F\left(c,\ 0\right)$ 的距离和它到定直线 $l:x=\frac{a^2}{c}$ 的距离的比是常数 $\frac{c}{a}$ $\left(a>c>0\right)$，则 M 的轨迹是一个椭圆。

注：①常数为离心率，定直线为椭圆的准线　② $F\notin l$

焦半径：设 $P\left(x_0,\ y_0\right)$.



当焦点在 x 轴上时，$\left|PF_1\right|_{左}=a+ex_0$，$\left|PF_2\right|_{右}=a-ex_0$.

当焦点在 x 轴上时，$\left|PF_1\right|_{下}=a+ey_0$，$\left|PF_2\right|_{上}=a-ey_0$.

11、直线与椭圆的位置关系

位置关系的判定：联立$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\left(a>b>0\right)\\ Ax+By+C=0\end{cases}$消去 x 或消去 y 解方程。

①当直线与椭圆有两个焦点时，直线与椭圆相交，即 $\Delta>0$；②当直线与椭圆有一个焦点时，直线与椭圆相切，即 $\Delta=0$；③当直线与椭圆无焦点时，直线与椭圆相离，即 $\Delta<0$.

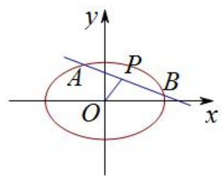
12、弦长公式

设直线 $y=kx+b$ 与椭圆相交于 $A\left(x_1,\ y_1\right)$，$B\left(x_2,\ y_2\right)$两点，则弦长公式为：

$$\left|AB\right|=\left|x_1-x_2\right|\sqrt{1+k^2}=\sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt{\left(x_1+x_2\right)^2-4x_1x_2}$$

$$\left|AB\right|=\left|y_1-y_2\right|\sqrt{1+\frac{1}{k^2}}=\sqrt{1+\frac{1}{k^2}}\cdot\sqrt{\left(y_1+y_2\right)^2-4y_1y_2}$$

13、中点弦长公式（P 点在弦 AB 的中点）



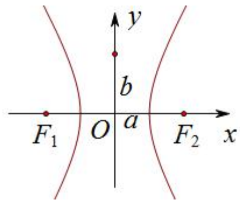
焦点在 x 轴上：$k_{OP}\cdot k_{AB}=-\dfrac{a^2}{b^2}$；焦点在 y 轴上：$k_{OP}\cdot k_{AB}=-\dfrac{b^2}{a^2}$.

2.2 双曲线

2.2.1 双曲线及其标准方程

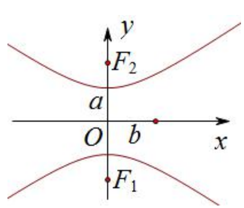
1、双曲线的定义：我们把平面内与两个定点 F_1，F_2 的距离的差的绝对值等于常数（小于 $\left|F_1F_2\right|$）的点的轨迹叫做双曲线。两个定点 F_1，F_2 叫做双曲线的焦点，两焦点的距离 $\left|F_1F_2\right|$ 叫做双曲线的焦距。用符号表示：$\left|\left|PF_1\right|-\left|PF_2\right|\right|=2a<\left|F_1F_2\right|=2c$.

2、双曲线的轨迹：①当 $0<2a<\left|F_1F_2\right|$ 时，F_1，F_2 的轨迹为双曲线；②当 $2a=\left|F_1F_2\right|$ 时，动点的轨迹以 F_1 或 F_2 为端点的射线；③当 $2a>\left|F_1F_2\right|$，则动点轨迹不存在。



3、双曲线的标准方程：①焦点在 x 轴上：$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1\left(a>0,\ b>0\right)$.

我们把这样的方程叫做双曲线的标准方程，两个焦点分别是



$F_1\left(-c,\ 0\right)$，$F_2\left(c,\ 0\right)$的双曲线，这里$c^2=a^2+b^2$.

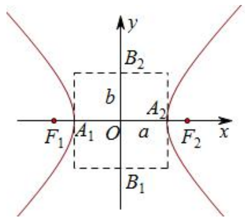
②焦点在y轴上：$\dfrac{y^2}{a^2}-\dfrac{x^2}{b^2}=1\left(a>0,\ b>0\right)$.两个焦点分别为$F_1\left(0,\ -c\right)$，$F_2\left(0,\ c\right)$.

③当焦点不确定可设为：$mx^2+ny^2=1\ \left(m>0,\ n>0,\ m\neq n\right)$

2.2.2　双曲线的简单几何性质（设双曲线的标准方程为$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1\ \left(a>0,\ b>0\right)$）

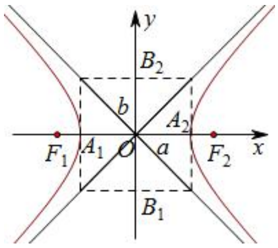
4、范围：双曲线在不等式$x\geq a$与$x\leq -a$所表示的区域内，而在$-a<x<a$之间没有图像。

5、对称轴：双曲线既是轴对称图形，也是中心对称图形。



6、顶点：双曲线和它的对称轴有两个焦点，他们叫做双曲线的顶点。

线段A_1A_2叫做双曲线的实轴，它的长度等于$2a$，a叫做双曲线的实半轴长；线段B_1B_2叫做双曲线的虚轴，它的长度等于$2b$，b叫做双曲线的半虚轴长。



7、（1）渐近线的意义：双曲线$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$的各支向外延伸时，与这两条直线逐渐接近，我们把这两条直线叫做双曲线的渐近线。当在x轴上时，矩形的两条对角线所在直线的方程式$y=\pm\dfrac{b}{a}x$；当在y轴上时，矩形的两条对角线所在直线的方程式$y=\pm\dfrac{a}{b}x$.

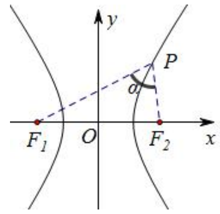
（2）等轴双曲线：如果$a=b$，那么双曲线的方程为$x^2-y^2=a^2$，它的实轴与虚轴的长都等于$2a$，它的一般形式：$x^2-y^2=\lambda\left(\lambda\neq 0\right)$（$\lambda>0$，在$x$轴；$\lambda>0$，在$y$轴）；渐近线方程为$y=\pm x$；离心率：$e=\sqrt{2}$

8、离心率：双曲线的焦距与实轴长的比$\dfrac{c}{a}$叫做双曲线的离心率，因为$c>a>0$，所以双曲线的离心率$e=\dfrac{c}{a}>1$.e越接近于1，双曲线开口越小。

双曲线补充内容

9、离心率公式推导：$e=\dfrac{c}{a}=\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{a^2}}=\sqrt{1+\left(\dfrac{b}{a}\right)^2}$，$\dfrac{b}{a}=\sqrt{e^2-1}$

10、焦点三角形面积公式：$S_{\Delta PF_1F_2}=\dfrac{b^2\cdot\sin\alpha}{1-\cos\alpha}=\dfrac{b^2}{\tan\dfrac{\alpha}{2}}$



11、双曲线的第二定义：动点到定点F的距离与它到定直线l的距离之比是常数$e\left(e>1\right)$.

12、直线与双曲线的位置关系

位置关系的判定：联立直线l与双曲线C：$\begin{cases}l:y=kx+m\\C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1\end{cases}$ 消y带入双曲线C可解。

（1）当$k=\pm\dfrac{b}{a}$，若$m\neq0$，方程有一根，直线与双曲线有一焦点，此时直线平行于渐近线；若$m=0$，方程无根，直线与双曲线无焦点，该直线就是渐近线。

（2）当$k\neq\pm\dfrac{b}{a}$，①$\Delta>0$时，直线与双曲线有两个相异焦点；②$\Delta=0$时，直线与双曲线相切，有一个焦点；③$\Delta<0$时，直线与双曲线相离，没有交点。

13、弦长公式

设直线$y=kx+b$与双曲线相交于$A\left(x_1,\ y_1\right)$，$B\left(x_2,\ y_2\right)$两点，则弦长公式为：

$$\left|AB\right|=\sqrt{1+k^2}\left|x_1-x_2\right|=\sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt{\left(x_1+x_2\right)^2-4x_1x_2}$$

$$\left|AB\right|=\sqrt{1+\frac{1}{k^2}}\left|y_1-y_2\right|=\sqrt{1+\frac{1}{k^2}}\cdot\sqrt{\left(y_1+y_2\right)^2-4y_1y_2}$$

14、中点弦公式

已知$A\left(x_1,\ y_1\right)$，$B\left(x_2,\ y_2\right)$是双曲线$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1\ \left(a>0,\ b>0\right)$上的两个不同的点，$M\left(x_0,\ y_0\right)$是线段$AB$的中点，则$\begin{cases}\dfrac{x_1^2}{a^2}-\dfrac{y_1^2}{b^2}=1\\\dfrac{x_2^2}{a^2}-\dfrac{y_2^2}{b^2}=1\end{cases}$

15、共轭双曲线（以已知双曲线的虚轴为实轴，实轴为虚轴的双曲线）

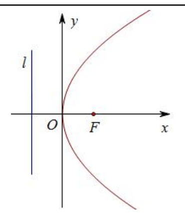
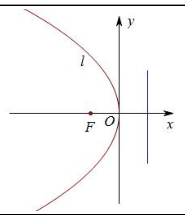
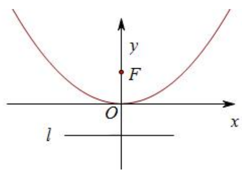
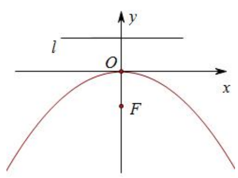
$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$与$\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{x^2}{a^2}=1$　　①有共同的渐近线；②$\dfrac{1}{e_1^2}+\dfrac{1}{e_2^2}=1$

2.3　抛物线

2.3.1 抛物线及其标准方程

1、定义：平面内与一个定点 F 和一条定直线 l 的距离相等的点的轨迹叫做抛物线。点 F 叫做抛物线的焦点，直线 l 叫做抛物线的准线。

2、抛物线标准方程的四种形式

图形	标准方程	交点坐标	准线方程
	$y^2=2px$ $(p>0)$	$\left(\frac{p}{2},\ 0\right)$	$x=-\frac{p}{2}$
	$y^2=-2px$ $(p>0)$	$\left(-\frac{p}{2},\ 0\right)$	$x=\frac{p}{2}$
	$x^2=2py$ $(p>0)$	$\left(0,\ \frac{P}{2}\right)$	$y=-\frac{P}{2}$
	$x^2=-2py$ $(p>0)$	$\left(0,\ -\frac{P}{2}\right)$	$y=\frac{P}{2}$

①焦点在一次项所含未知数的轴上，②开口由一次项系数正负决定，③焦点的非零坐标是一次项系数的 $\frac{1}{4}$.

2.3.2 抛物线的简单几何性质（设抛物线的标准方程 $y^2=2px\left(p>0\right)$）

3、范围：因为 $p>0$，由方程可知，对于抛物线 $y^2=2px\left(p>0\right)$，$x\geq 0$，所以这条抛物线在 y 轴的右侧，开口方向与 x 轴正向相同；当 x 的值增大时，$|y|$ 也增大，这说明抛物线向右上方和右下方无限延伸。

4、对称轴：抛物线 $y^2=2px\left(p>0\right)$ 对称轴是以 x 轴为对称轴的轴对称图形。

5、顶点：抛物线和它轴的交点叫做抛物线的顶点。

6、离心率：抛物线上的点到焦点的距离和它到准线的距离之比，叫做抛物线的离心率，用 e

表示。由定义可知：$e=1$

抛物线补充内容

7、抛物线与直线的位置关系

设直线$l: y=kx+b$与抛物线$y^2=2px\left(p>0\right)$，公共点的个数等于方组

$\begin{cases} y=kx+b \\ y^2=2px \end{cases}$ 不同实数解的个数。

①当$k\neq 0$，则当$\Delta>0$时，直线与抛物线相交，有两个公共点；当$\Delta=0$时，直线与抛物线相切，有一个公共点；当$\Delta<0$时，直线与抛物线相离，无公共点。

②当$k=0$，则直线$y=b$与抛物线相交，有一个公共点。特别地，设$x=m$，则当$m>0$时直线l的斜率不存在时，l与抛物线相交，有两个公共点；当$m=0$时，l与抛物线相切，有一个公共点；当$m<0$时，l与抛物线相离，无公共点。

8、弦长公式

设$A\left(x_1, y_1\right)$，$B\left(x_2, y_2\right)$是直线$y=kx+b$与抛物线的交点，则弦长公式为：

$$\left|AB\right|=\sqrt{1+k^2}\left|x_1-x_2\right|=\sqrt{1+k^2\left[\left(x_1+x_2\right)^2-4x_1x_2\right]}$$

$$\left|AB\right|=\sqrt{1+\frac{1}{k^2}}\left|y_1-y_2\right|=\sqrt{1+\frac{1}{k^2}}\cdot\sqrt{\left(y_1+y_2\right)^2-4y_1y_2}$$

9、中点弦

设$A\left(x_1, y_1\right)$，$B\left(x_2, y_2\right)$是抛物线$y^2=2px\left(p>0\right)$上的点，AB中点$M\left(x_0, y_0\right)$，则AB的斜率为$\frac{p}{y_0}$，则$\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=\frac{2p}{y_1+y_2}=\frac{p}{y_0}$

第三章　导数及其应用

3.1　变化率与导数

3.1.1　变化率问题

1、平均变化率：设x_1，x_2是函数$y=f\left(x\right)$定义域内两个不同的数，把式子$\frac{f\left(x_2\right)-f\left(x_1\right)}{x_2-x_1}$称为函数$y=f\left(x\right)$从$x_1$到$x_2$的平均变化率。习惯上用$\Delta x$表示$x_2-x_1$，也可把$\Delta x$看作是

相对于 x_1 的一个“增量”，可用 $x_1+\Delta x$ 代替 x_2；类似地，$\Delta y=f\left(x_2\right)-f\left(x_1\right)$.于是，平均变化率可以表示为 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$

3.1.2　导数的概念

2、瞬时速度

把物体在某一时刻的速度称为瞬时速度。一般地，函数 $y=f\left(x\right)$ 在 $x=x_0$ 处的瞬时变化率是 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f\left(x_0+\Delta x\right)-f\left(x_0\right)}{\Delta x}$，我们称它为函数 $y=f\left(x\right)$ 在 $x=x_0$ 处的导数，记作 $f'\left(x_0\right)$ 或 $y'\big|_{x=x_0}$，即 $f'\left(x_0\right)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f\left(x_0+\Delta x\right)-f\left(x_0\right)}{\Delta x}$

3.1.3　导数的几何意义

3、切线方程：求函数在点 $\left(x_0,\ f\left(x_0\right)\right)$ 处的导数 $f'\left(x_0\right)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f\left(x_0+\Delta x\right)-f\left(x_0\right)}{\Delta x}=k$，得到曲线在点 $P\left(x_0,\ f\left(x_0\right)\right)$ 处的切线的斜率。

3.2　导数的计算

3.2.1　几个常用函数的导数

1、函数 $y=f\left(x\right)=c$ 的导数：$y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}0=0$.

2、函数 $y=f\left(x\right)=x$ 的导数：$y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}1=1$

3、函数 $y=f\left(x\right)=x^2$ 的导数：$y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left(2x+\Delta x\right)=2x$

4、函数 $y=f\left(x\right)=\dfrac{1}{x}$ 的导数：$y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left(-\dfrac{1}{x^2+x\cdot\Delta x}\right)=-\dfrac{1}{x^2}$

3.2.2　基本初等函数的导数公式及导数的运算法则

5、基本初等函数的导数公式

（1）若 $f\left(x\right)=c$，则 $f'\left(x\right)=0$；（2）若 $f\left(x\right)=x^a\left(a\in Q^*\right)$，则 $f'\left(x\right)=ax^{a-1}$；

（3）若 $f\left(x\right)=\sin x$，则 $f'\left(x\right)=\cos x$；（4）若 $f\left(x\right)=\cos x$，则 $f'\left(x\right)=-\sin x$；

（5）若 $f(x)=a^x$，则 $f'(x)=a^x\ln a\,(a>0)$；（6）若 $f(x)=e^x$，则 $f'(x)=e^x$；

（7）若 $f(x)=\log_a x$，则 $f'(x)=\dfrac{1}{x\ln a}$（$a>0$，且 $a\neq1$）；

（8）若 $f(x)=\ln x$，则 $f'(x)=\dfrac{1}{x}$；（9）若 $f(x)=\dfrac{1}{x}$，则 $f'(x)=-\dfrac{1}{x^2}$.

6、导数的运算法则

（10）$\left[f(x)\pm g(x)\right]'=f'(x)\pm g'(x)$；

（11）$\left[f(x)\cdot g(x)\right]'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$；

（12）$\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]'=\dfrac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{\left[g(x)\right]^2}\left(g(x)\neq0\right)$；

（13）$\left[cf(x)\right]'=c'f(x)+c\left[f(x)\right]'=cf'(x)$.

推导：

（14）$\left[f(x)\cdot g(x)\cdot h(x)\right]'=f'(x)g(x)h(x)+f(x)g'(x)h(x)+f(x)g(x)h'(x)$

（15）$\left[f(x)\pm g(x)\pm h(x)\right]'=f'(x)\pm g'(x)\pm h'(x)$

3.3　导数在研究函数中的应用

3.3.1　函数的单调性与导数

1、函数的单调性与其导函数的关系：在某个区间 $(a,\ b)$ 内，如果 $f'(x)>0$，那么函数 $y=f(x)$ 在这个区间内单调递增；如果 $f'(x)<0$，那么函数 $y=f(x)$ 在这个区间内单调递减。若 $f(x)$ 在 $(a,\ b)$ 单调递增，则 $f'(x)\geq0$ 在 $(a,\ b)$ 恒成立。

注意：①原函数看增减，导函数看正负；② $\left|f'(x)\right|$ 越大，$y=f(x)$ 越大。

2、求单调区间的一般步骤：①确定函数 $f(x)$ 的定义域；②求导函数 $f'(x)$；

③在定义域内解不等式 $f'(x)>0$ 与 $f'(x)<0$；④决定函数的单调期间。

3.3.2　函数的极值与导数

3、函数的极大值：如果对 x_0 附近的所有点都有 $f(x)<f(x_0)$，就说 $f(x_0)$ 是函数 $y=f(x)$ 的一个极大值，记作 $y_{极大值}=f(x_0)$，x_0 是极大值点。

4、函数的极小值：如果对 x_0 附近的所有点都有 $f(x)>f(x_0)$，就说 $f(x_0)$ 是函数

$y=f\left(x\right)$的一个极小值，记作$y_{极小值}=f\left(x_0\right)$， x_0是极小值点。

5、极值：极大值点、极小值点统称为极值点，极大值和极小值统称为极值。

6、函数极值的判断方法

（1）设函数$f\left(x\right)$在点x_0 x_0处可导，且在x_0处取得极值，则$f'\left(x_0\right)=0$

（2）设函数$f\left(x\right)$且$f'\left(x_0\right)=0$，

①如果在x_0附近左侧$f'\left(x\right)>0$，右侧$f'\left(x\right)<0$，那么$f\left(x\right)$在x_0处取得极大值；

②如果在x_0附近左侧$f'\left(x\right)<0$，右侧$f'\left(x\right)>0$，那么$f\left(x\right)$在x_0处取得极小值；

③如果在$f'\left(x\right)$在x_0左右两侧的符号不变，那么$f\left(x\right)$在x_0处不取得极值。

7、求函数极值的步骤

①确定函数的定义域；②求导函数$f'\left(x\right)$；③求函数$f'\left(x\right)=0$的根，列出可能极值点；

④列表；⑤确定极值

3.3.3　函数的最大（小）值得导数

8、函数的最大值：如果在函数$f\left(x\right)$的定义域内存在x_0，总有$f\left(x\right)\le f\left(x_0\right)$，那么$f\left(x_0\right)$为函数在定义域上的最大值；

9、函数的最小值：如果在函数$f\left(x\right)$的定义域内存在x_0，总有$f\left(x\right)\ge f\left(x_0\right)$，那么$f\left(x_0\right)$为函数在定义域上的最小值。

10、判断极值的步骤

一般地，求函数$y=f\left(x\right)$在$\left[a,\ b\right]$上的最大值与最小值的步骤：

（1）求函数$y=f\left(x\right)$在$\left(a,\ b\right)$内的极值；

（2）将函数$y=f\left(x\right)$的各极值与端点处的函数值$f\left(a\right)$， $f\left(b\right)$比较，其中最大的一个是最大值，最小的一个是最小值。

注：①若$f\left(x\right)$在闭区间$\left[a,\ b\right]$上连续，则$f\left(x\right)$在$\left[a,\ b\right]$上必有最值；

②若$f\left(x\right)$在$\left(a,\ b\right)$内仅有一个极值，则极值必为最值。