$p:a>b, q:a+c>b+c$

$p\Leftrightarrow q$

CHAPTER 1

1.2 充分条件与必要条件

1.2.1 充分条件与必要条件

前面我们讨论了"若 p，则 q"形式的命题，其中有的命题为真命题，有的命题为假命题. 例如，下列两个命题中：

(1) 若 $x>a^2+b^2$，则 $x>2ab$，

(2) 若 $ab=0$，则 $a=0$，

命题 (1) 为真命题，命题 (2) 为假命题.

一般地，"若 p，则 q"为真命题，是指由 p 通过推理可以得出 q. 这时，我们就说，由 p 可推出 q，记作

$$p\Rightarrow q,$$

并且说 p 是 q 的**充分条件** (sufficient condition)，q 是 p 的**必要条件** (necessary condition).

上面的命题 (1) 是真命题，即

$$x>a^2+b^2\Rightarrow x>2ab,$$

所以"$x>a^2+b^2$"是"$x>2ab$"的充分条件，"$x>2ab$"是"$x>a^2+b^2$"的必要条件❶.

❶ 因为命题 (1) 的逆否命题"若$x\leqslant 2ab$，则 $x\leqslant a^2+b^2$"也是真命题. 这就是说，要使 $x>a^2+b^2$ 成立，就必须有 $x>2ab$ 成立. 因此，"$x>2ab$"是"$x>a^2+b^2$"成立的必要条件.

例 1 下列"若 p，则 q"形式的命题中，哪些命题中的 p 是 q 的充分条件?

(1) 若 $x=1$，则 $x^2-4x+3=0$；

(2) 若 $f(x)=x$，则 $f(x)$在$(-\infty, +\infty)$上为增函数；

(3) 若 x 为无理数，则 x^2 为无理数.

解：命题 (1)(2) 是真命题，命题 (3) 是假命题. 所以，命题 (1)(2) 中的 p 是 q 的充分条件.

如果"若 p，则 q"为假命题，那么由 p 推不出 q，记作 $p\nRightarrow q$. 此时，我们就说 p 不是 q 的充分条件，q 不是 p 的必要条件.

例如，例 1 中的命题（3）是假命题，那么

$$x \text{ 为无理数 } \nRightarrow x^2 \text{ 为无理数},$$

所以“x 为无理数”不是“x^2 为无理数”的充分条件，“x^2 为无理数”不是“x 为无理数”的必要条件.

例 2　下列“若 p，则 q”形式的命题中，哪些命题中的 q 是 p 的必要条件？

（1）若 $x=y$，则 $x^2=y^2$；

（2）若两个三角形全等，则这两个三角形的面积相等；

（3）若 $a>b$，则 $ac>bc$.

解：命题（1）(2）是真命题，命题（3）是假命题. 所以，命题（1）(2）中的 q 是 p 的必要条件.

练　习

1. 用符号“$\Rightarrow$”与“$\nRightarrow$”填空：

（1）$x^2=y^2$ ________ $x=y$；

（2）内错角相等________两直线平行；

（3）整数 a 能被 6 整除________ a 的个位数字为偶数；

（4）$ac=bc$ ________ $a=b$.

2. 下列“若 p，则 q”形式的命题中，哪些命题中的 p 是 q 的充分条件？

（1）若两条直线的斜率相等，则这两条直线平行；

（2）若 $x>5$，则 $x>10$.

3. 下列“若 p，则 q”形式的命题中，哪些命题中的 q 是 p 的必要条件？

（1）若 $a+5$ 是无理数，则 a 是无理数；

（2）若 $(x-a)(x-b)=0$，则 $x=a$.

4. 判断下列命题的真假：

（1）$x=2$ 是 $x^2-4x+4=0$ 的必要条件；

（2）圆心到直线的距离等于半径是这条直线为圆的切线的必要条件；

（3）$\sin\alpha=\sin\beta$ 是 $\alpha=\beta$ 的充分条件；

（4）$ab\neq0$ 是 $a\neq0$ 的充分条件.

1.2.2 充要条件

思考？

已知 p：整数 a 是 6 的倍数，q：整数 a 是 2 和 3 的倍数. 那么 p 是 q 的什么条件？q 又是 p 的什么条件？

在上述问题中，$p\Rightarrow q$，所以 p 是 q 的充分条件，q 是 p 的必要条件. 另一方面，$q\Rightarrow p$，所以 p 也是 q 的必要条件，q 也是 p 的充分条件.

一般地，如果既有 $p\Rightarrow q$，又有 $q\Rightarrow p$，就记作

$$p\Leftrightarrow q.$$

此时，我们说，p 是 q 的**充分必要条件**❶，简称**充要条件**（sufficient and necessary condition）. 显然，如果 p 是 q 的充要条件，那么 q 也是 p 的充要条件.

❶ “p 是 q 的充要条件”也说成“p 等价于 q”“q 当且仅当 p”等.

概括地说，如果 $p\Leftrightarrow q$，那么 p 与 q 互为充要条件.

例 3 下列各题中，哪些 p 是 q 的充要条件？

(1) p：$b=0$，q：函数 $f(x)=ax^2+bx+c$ 是偶函数；

(2) p：$x>0$，$y>0$，q：$xy>0$；

(3) p：$a>b$，q：$a+c>b+c$.

解： 在 (1)(3) 中，$p\Leftrightarrow q$，所以 (1)(3) 中的 p 是 q 的充要条件. 在 (2) 中，$q\nRightarrow p$，所以 (2) 中的 p 不是 q 的充要条件.

例 4 已知：$\odot O$ 的半径为 r，圆心 O 到直线 l 的距离为 d. 求证：$d=r$ 是直线 l 与 $\odot O$ 相切的充要条件.

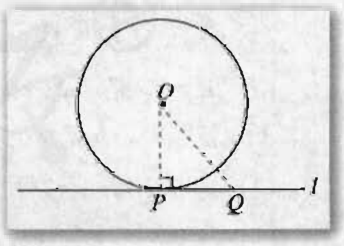

图 1.2-1

分析： 设 p：$d=r$，q：直线 l 与 $\odot O$ 相切. 要证 p 是 q 的充要条件，只需分别证明充分性（$p\Rightarrow q$）和必要性（$q\Rightarrow p$）即可.

证明： 如图 1.2-1 所示.

(1) 充分性（$p\Rightarrow q$）：作 $OP\perp l$ 于点 P，则 $OP=d$. 若 $d=r$，则点 P 在 $\odot O$ 上. 在直线 l 上任取一点 Q（异于点 P），连接 OQ. 在 $\mathrm{Rt}\triangle OPQ$ 中，$OQ>OP=r$. 所以，除点 P 外，直线 l 上的点都在 $\odot O$ 的外部，即直线 l 与 $\odot O$ 仅有一个公共点 P. 因此，直线 l 与 $\odot O$ 相切.

(2) 必要性（$q\Rightarrow p$）：若直线 l 与 $\odot O$ 相切，不妨设切点为 P，则 $OP\perp l$. 因此，$d=OP=r$.

练 习

1. 下列形如“若 p，则 q”的命题是真命题吗？它的逆命题是真命题吗？p 是 q 的什么条件？

   (1) 若平面 α 外一条直线 a 与平面 α 内一条直线平行，则直线 a 与平面 α 平行；

   (2) 若数列 $\{a_n\}$ 的通项公式是 $a_n=n+c$（c 是常数），则数列 $\{a_n\}$ 是公差等于 1 的等差数列；

   (3) 若直线 a 与平面 α 内两条直线垂直，则直线 a 与平面 α 垂直.

2. 在下列各题中，p 是 q 的什么条件？

   (1) p：$x^2=3x+4$，q：$x=\sqrt{3x+4}$；

   (2) p：$x-3=0$，q：$(x-3)(x-4)=0$；

   (3) p：$b^2-4ac\geqslant 0$ $(a\neq 0)$，q：$ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$ 有实根；

   (4) p：$x=1$ 是方程 $ax^2+bx+c=0$ 的一个根，q：$a+b+c=0$.

习题 1.2

A 组

1. 举例说明：

   (1) p 是 q 的充分条件；

   (2) p 是 q 的必要条件；

   (3) p 是 q 的充要条件.

2. 判断下列命题的真假：

   (1) “$a>b$” 是 “$a^2>b^2$” 的充分条件；

   (2) “$|a|>|b|$” 是 “$a^2>b^2$” 的必要条件；

   (3) “$a>b$” 是 “$a+c>b+c$” 的充要条件.

3. 下列各题中，p 是 q 的什么条件？

   (1) p：$x=1$，q：$x-1=\sqrt{x-1}$；

   (2) p：$|x-2|\leqslant 3$，q：$-1\leqslant x\leqslant 5$；

   (3) p：$x=2$，q：$x-3=\sqrt{3-x}$；

   (4) p：三角形是等边三角形，q：三角形是等腰三角形.

4. 求圆 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ 经过原点的充要条件.

B 组

1. 已知 $A=\{x|x$ 满足条件 $p\}$，$B=\{x|x$ 满足条件 $q\}$.

(1) 如果 $A\subseteq B$，那么 p 是 q 的什么条件；

(2) 如果 $B\subseteq A$，那么 p 是 q 的什么条件；

(3) 如果 $A=B$，那么 p 是 q 的什么条件.

2. 求证：$\triangle ABC$ 是等边三角形的充要条件是

$$a^2+b^2+c^2=ab+ac+bc,$$

这里 a，b，c 是 $\triangle ABC$ 的三条边.