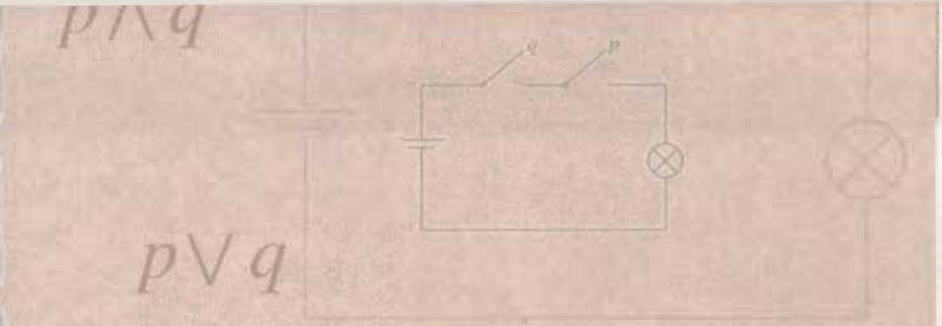



# 1.3 简单的逻辑联结词

在数学中，有时会使用一些联结词，如“且”“或”“非”．在生活用语中，我们也使用这些联结词，但表达的含义和用法与在数学中的含义和用法不尽相同．下面介绍数学中使用联结词“且”“或”“非”联结命题时的含义和用法．

为叙述简便，今后常用小写字母 $p$，$q$，$r$，$s$，…表示命题．

## 1.3.1 且（and）

**思考**

下列三个命题间有什么关系？

（1）12 能被 3 整除；

（2）12 能被 4 整除；

（3）12 能被 3 整除且能被 4 整除．

可以看到，命题（3）是由命题（1）（2）使用联结词“且”联结得到的新命题．

一般地，用联结词“且”把命题 $p$ 和命题 $q$ 联结起来，就得到一个新命题，记作

$$p\wedge q,$$

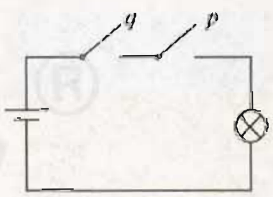
读作“$p$ 且 $q$”．

命题 $p\wedge q$ 的真假如何确定呢？

一般地，我们规定：

**当 $p$，$q$ 都是真命题时，$p\wedge q$ 是真命题；当 $p$，$q$ 两个命题中有一个命题是假命题时，$p\wedge q$ 是假命题．**

上面“思考”中的命题（1）（2）都是真命题，所以命题（3）是真命题．




我们可以从串联电路理解联结词“且”的含义．若开关 $p$，$q$ 的闭合与断开分别对应命题 $p$，$q$ 的真与假，则整个电路的接通与断开分别对应命题 $p\wedge q$ 的真与假．

**例 1** 将下列命题用“且”联结成新命题，并判断它们的真假：

(1) $p$：平行四边形的对角线互相平分，$q$：平行四边形的对角线相等；

(2) $p$：菱形的对角线互相垂直，$q$：菱形的对角线互相平分；

(3) $p$：35 是 15 的倍数，$q$：35 是 7 的倍数.

**解**：(1) $p\wedge q$：平行四边形的对角线互相平分且相等.

由于 $p$ 是真命题，$q$ 是假命题，所以 $p\wedge q$ 是假命题.

(2) $p\wedge q$：菱形的对角线互相垂直且平分.

由于 $p$ 是真命题，$q$ 是真命题，所以 $p\wedge q$ 是真命题.

(3) $p\wedge q$：35 是 15 的倍数且是 7 的倍数.

由于 $p$ 是假命题，$q$ 是真命题，所以 $p\wedge q$ 是假命题.

**例 2**　用逻辑联结词"且"改写下列命题，并判断它们的真假：

(1) 1 既是奇数，又是素数；

(2) 2 和 3 都是素数.

**解**：(1) 命题"1 既是奇数，也是素数"可以改写为"1 是奇数且 1 是素数".

因为"1 是素数"是假命题，所以这个命题是假命题.

(2) 命题"2 和 3 都是素数"可以改写为"2 是素数且 3 是素数".

因为"2 是素数"与"3 是素数"都是真命题，所以这个命题是真命题.

## 1.3.2　或 (or)

**思考**

下列三个命题间有什么关系？

(1) 27 是 7 的倍数；

(2) 27 是 9 的倍数；

(3) 27 是 7 的倍数或是 9 的倍数.

命题 (3) 是由命题 (1)(2) 用联结词"或"联结得到的新命题.

一般地，用联结词"或"把命题 $p$ 和命题 $q$ 联结起来，就得到一个新命题，记作

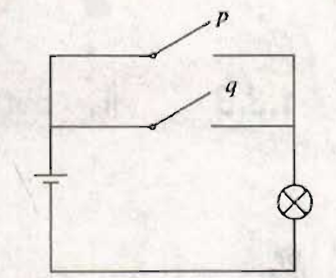
$$p\vee q,$$

读作"$p$ 或 $q$".

命题 $p\vee q$ 的真假如何确定呢？

一般地，我们规定：

**当 $p$，$q$ 两个命题中有一个命题是真命题时，$p\vee q$ 是真命题；当 $p$、$q$ 两个命题都是假命题时，$p\vee q$ 是假命题.**




我们可以从并联电路理解联结词"或"的含义. 若开关 $p$，$q$ 的闭合与断开对应命题的真与假，则整个电路的接通与断开分别对应命题 $p\vee q$ 的真与假.

上面“思考”中的命题（1）是假命题，命题（2）是真命题，所以命题（3）是真命题.

**例 3** 判断下列命题的真假：

（1）$2\leqslant 2$；

（2）集合 $A$ 是 $A\cap B$ 的子集或是 $A\cup B$ 的子集；

（3）周长相等的两个三角形全等或面积相等的两个三角形全等.

**解：**（1）命题“$2\leqslant 2$”是由命题：

$$p：2=2；q：2<2$$

用“或”联结后构成的新命题，即 $p\vee q$.

因为命题 $p$ 是真命题，所以命题 $p\vee q$ 是真命题.

（2）命题“集合 $A$ 是 $A\cap B$ 的子集或是 $A\cup B$ 的子集”是由命题：

$p$：集合 $A$ 是 $A\cap B$ 的子集；

$q$：集合 $A$ 是 $A\cup B$ 的子集

用“或”联结后构成的新命题，即 $p\vee q$.

因为命题 $q$ 是真命题，所以命题 $p\vee q$ 是真命题.

（3）命题“周长相等的两个三角形全等或面积相等的两个三角形全等”是由命题：

$p$：周长相等的两个三角形全等；

$q$：面积相等的两个三角形全等

用“或”联结后构成的新命题，即 $p\vee q$.

因为命题 $p$，$q$ 都是假命题，所以命题 $p\vee q$ 是假命题.

**思考**

如果 $p\wedge q$ 为真命题，那么 $p\vee q$ 一定是真命题吗？反之，如果 $p\vee q$ 为真命题，那么 $p\wedge q$ 一定是真命题吗？

## 1.3.3 非（not）

**思考**

下列两个命题间有什么关系？

（1）35 能被 5 整除；

（2）35 不能被 5 整除.

可以看到，命题（2）是命题（1）的否定.

一般地，对一个命题 $p$ 全盘否定，就得到一个新命题，记作

$$\neg p,$$

读作“非 $p$”或“$p$ 的否定”❶.

❶ 注意此处命题的否定与1.1.2中否命题的区别.

上面“思考”中，命题（1）是真命题，命题（2）是假命题. 既然命题 $\neg p$ 是 $p$ 的否定，那么 $\neg p$ 与 $p$ 不能同为真命题，也不能同为假命题. 也就是说，

**若 $p$ 是真命题，则 $\neg p$ 必是假命题；若 $p$ 是假命题，则 $\neg p$ 必是真命题.**

例 4　写出下列命题的否定，并判断它们的真假：

（1）$p$：$y=\sin x$ 是周期函数；

（2）$p$：$3<2$；

（3）$p$：空集是集合 $A$ 的子集.

解：（1）$\neg p$：$y=\sin x$ 不是周期函数.

命题 $p$ 是真命题，$\neg p$ 是假命题.

（2）$\neg p$：$3\geqslant 2$.

命题 $p$ 是假命题，$\neg p$ 是真命题.

（3）$\neg p$：空集不是集合 $A$ 的子集.

命题 $p$ 是真命题，$\neg p$ 是假命题.

## 练习

1. 判断下列命题的真假：

（1）12 是 48 且是 36 的约数；　（2）矩形的对角线互相垂直且平分.

2. 判断下列命题的真假：

（1）47 是 7 的倍数或 49 是 7 的倍数；　（2）等腰梯形的对角线互相平分或互相垂直.

3. 写出下列命题的否定，然后判断它们的真假：

（1）$2+2=5$；　（2）3 是方程 $x^2-9=0$ 的根；　（3）$\sqrt{(-1)^2}=-1$.

## 习题1.3

### A 组

1. 写出下列命题，并判断它们的真假：

(1) $p\vee q$，这里 $p$：$4\in\{2,3\}$，$q$：$2\in\{2,3\}$；

(2) $p\wedge q$，这里 $p$：$4\in\{2,3\}$，$q$：$2\in\{2,3\}$；

(3) $p\vee q$，这里 $p$：2是偶数，$q$：3不是素数；

(4) $p\wedge q$，这里 $p$：2是偶数，$q$：3不是素数.

2. 判断下列命题的真假：

(1) $5>2$ 且 $7>3$；　(2) $3>4$ 或 $3<4$；　(3) $7\geqslant 8$.

3. 写出下列命题的否定，并判断它们的真假：

(1) $\sqrt{2}$是有理数；　(2) 5不是15的约数；

(3) $2<3$；　(4) $8+7\neq 15$.

### B 组

判断下列命题的真假，并说明理由：

(1) $p\vee q$，这里 $p$：$\pi$ 是无理数，$q$：$\pi$ 是实数；

(2) $p\wedge q$，这里 $p$：$\pi$ 是无理数，$q$：$\pi$ 是实数；

(3) $p\vee q$，这里 $p$：$2>3$，$q$：$8+7\neq 15$；

(4) $p\wedge q$，这里 $p$：$2>3$，$q$：$8+7\neq 15$.


## “且”“或”“非”与“交”“并”“补”

逻辑联结词“且”“或”“非”与集合的“交”“并”“补”之间有关系吗？

先看一个具体例子.

我们知道，由“2是偶数”与“2是素数”都是真命题，可以得到“2是偶数且是素数”是真命题. 另一方面，由集合的“交”运算可以知道：由 $2\in\{偶数\}$，$2\in\{素数\}$，可以得到 $2\in\{偶数\}\cap\{素数\}$. 如果把“真”对应于“$\in$”，“且”对应于“交”，那么，“2是偶数是真命题”可以对应于“$2\in\{偶数\}$”，“2是素数是真命题”可以对应于“$2\in\{素数\}$”，“2是偶数且是素数是真命题”就可以对应于“$2\in\{偶数\}\cap\{素数\}$”.

从上述例子得到启发，我们可以在逻辑联结词“且”与集合的“交”运算之间建立联系.

我们知道，对于逻辑联结词“且”有如下规定：

若 $p$，$q$ 都是真命题，则 $p \wedge q$ 是真命题；若 $p$，$q$ 中有假命题，则 $p \wedge q$ 是假命题.

对于集合的“交”有如下规定：

若 $a \in P$，$a \in Q$，则 $a \in P \cap Q$；若 $a \notin P$ 或 $a \notin Q$，则 $a \notin P \cap Q$.

把命题 $p$，$q$ 分别对应于集合 $P$，$Q$，“真”“假”“$\wedge$”分别对应于“$\in$”“$\notin$”“$\cap$”，那么上述关于“且”与“交”的规定就具有形式的一致性. 具体地说，就是“$p$ 是真命题”对应于“$a \in P$”，“$q$ 是真命题”对应于“$a \in Q$”，“$p \wedge q$ 是真命题”对应于“$a \in P \cap Q$”，“$p \wedge q$ 是假命题”对应于“$a \notin P \cap Q$”.

**探究**

你能发现逻辑联结词“或”和集合的“并”运算的规定在形式上的一致性吗？

逻辑联结词“非”和集合的“补”又有什么关系呢？

再看一个具体例子.

若以整数集为全集，则偶数集和奇数集互为补集. 由“2 是偶数”是真命题，可以得到“2 是奇数”是假命题；由“3 是偶数”是假命题，可以得到“3 是奇数”是真命题. 用集合的方式则可表达为：由 $2 \in \{偶数\}$，可以得到 $2 \notin \{奇数\}$；由 $3 \notin \{偶数\}$，可以得到 $3 \in \{奇数\}$. 如果把“非”“真”“假”分别对应于“补”“$\in$”“$\notin$”，那么，命题 $p$ 和它的否定 $\neg p$ 可以对应于集合 $P$ 和它的补集 $\complement_U P$，“$p$ 是真命题”对应于“$a \in P$”，“$\neg p$ 是假命题”对应于“$a \notin \complement_U P$”，“$p$ 是假命题”对应于“$a \notin P$”，“$\neg p$ 是真命题”对应于“$a \in \complement_U P$”.

一般地，对于逻辑联结词“非”有如下规定：

若 $p$ 是真命题，则 $\neg p$ 是假命题；若 $p$ 是假命题，则 $\neg p$ 是真命题.

对于集合的“补”有如下规定：

设 $U$ 为全集，$P \subseteq U$，若 $a \in P$，则 $a \notin \complement_U P$；若 $a \notin P$，则 $a \in \complement_U P$.

**探究**

类比“且”与“交”的联系，并结合上述例子，你能建立逻辑联结词“非”与集合的“补”运算之间的对应关系吗？

从上述讨论可以发现：命题与集合之间可以建立对应关系．在这样的对应下，逻辑联结词与集合的运算具有一致性，命题的“且”“或”“非”恰好分别对应集合的“交”“并”“补”．因此，我们就可以从集合的角度进一步认识有关这些逻辑联结词的规定．

从上述讨论可以发现：命题与集合之间可以建立对应关系．在这样的对应下，逻辑联结词与集合的运算具有一致性，命题的“且”“或”“非”恰好分别对应集合的“交”“并”“补”．因此，我们就可以从集合的角度进一步认识有关这些逻辑联结词的规定．