CHAPTER 2

2.2 双　曲　线

2.2.1 双曲线及其标准方程

思考

我们知道，与两个定点距离的和为非零常数(大于两个定点间的距离)的点的轨迹是椭圆．那么，与两个定点距离的差为非零常数的点的轨迹是什么？

如图 2.2-1，取一条拉链，拉开它的一部分，在拉开的两边上各选择一点，分别固定在点 F_1，F_2 上，把笔尖放在点 M 处，随着拉链逐渐拉开或者闭拢，笔尖所经过的点就画出一条曲线．这条曲线是满足下面条件的点的集合：

$$P=\{M \mid |MF_1|-|MF_2|=\text{常数}\}.$$

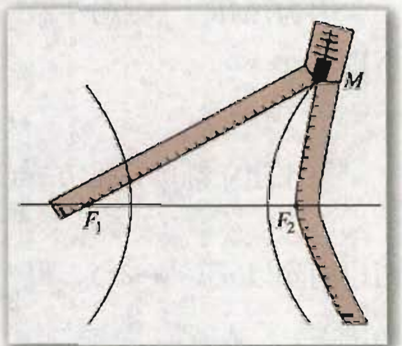


图 2.2-1

如果使点 M 到点 F_2 的距离减去到点 F_1 的距离所得的差等于同一个常数，就得到另一条曲线（图 2.2-1 中左边的曲线）．这条曲线是满足下面条件的点的集合：

$$P=\{M \mid |MF_2|-|MF_1|=\text{常数}\}.$$

这两条曲线合起来叫做双曲线，每一条叫做双曲线的一支．

思考

类比椭圆的定义，你能给出双曲线的定义吗？

我们把平面内与两个定点 F_1，F_2 的距离的差的绝对值等于非零常数（小于 $|F_1F_2|$）的点的轨迹叫做**双曲线**（hyperbola）．这两个定点叫做**双曲线的焦点**，两焦点间的距离叫做**双曲线的焦距**．

类比椭圆标准方程的建立过程，你能说说应怎样选择坐标系，建立双曲线的标准方程吗？

我们根据双曲线的几何特征，选择恰当的坐标系，建立双曲线的标准方程.

如图 2.2-2，建立直角坐标系 xOy，使 x 轴经过两焦点 F_1，F_2，y 轴为线段 F_1F_2 的垂直平分线.

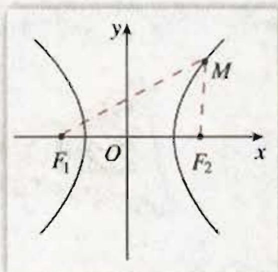


图 2.2-2

设 $M(x, y)$ 是双曲线上任意一点，双曲线的焦距为 $2c(c>0)$，那么，焦点 F_1，F_2 的坐标分别是 $(-c, 0)$，$(c, 0)$. 又设点 M 与 F_1，F_2 的距离的差的绝对值等于常数 $2a$❶.

❶ 设为 $2a$ 可以为问题的研究带来方便.

由定义可知，双曲线就是集合

$$P=\{M\mid ||MF_1|-|MF_2||=2a\}.$$

因为 $|MF_1|=\sqrt{(x+c)^2+y^2}$，$|MF_2|=\sqrt{(x-c)^2+y^2}$，所以

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}=\pm 2a. \qquad ①$$

类比建立椭圆标准方程的化简过程，化简①，得

$$(c^2-a^2)x^2-a^2y^2=a^2(c^2-a^2),$$

两边同除以 $a^2(c^2-a^2)$，得

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{c^2-a^2}=1.$$

由双曲线的定义可知，$2c>2a$，即 $c>a$，所以 $c^2-a^2>0$.

类比椭圆标准方程的建立过程，我们令 $c^2-a^2=b^2$❷，其中 $b>0$，代入上式，得

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>0,\ b>0). \qquad ②$$

❷ 你能在 y 轴上找一点 B，使得 $|OB|=b$ 吗？

从上述过程可以看到，双曲线上任意一点的坐标都满足方程②；以方程②的解 (x, y) 为坐标的点到双曲线两个焦点 $(-c, 0)$，$(c, 0)$ 的距离之差的绝对值为 $2a$，即以方程②的解为坐标的点都在双曲线上. 这样，我们把方程②叫做**双曲线的标准方程**. 它表示焦点在 x 轴上，焦点分别是 $F_1(-c, 0)$，$F_2(c, 0)$ 的双曲线，这里 $c^2=a^2+b^2$.

思考

类比焦点在 y 轴上的椭圆标准方程，如图 2.2-3，双曲线的焦点分别是 $F_1(0, -c)$，$F_2(0, c)$，a，b 的意义同上，这时双曲线的标准方程是什么？

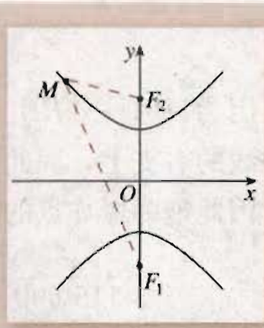


图 2.2-3

此时双曲线的方程是

$$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1\ (a>0,\ b>0),$$

这个方程也是双曲线的标准方程.

例 1　已知双曲线两个焦点分别为 $F_1(-5, 0)$，$F_2(5, 0)$，双曲线上一点 P 到 F_1，F_2 距离差的绝对值等于 6，求双曲线的标准方程.

解：因为双曲线的焦点在 x 轴上，所以设它的标准方程为

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>0,\ b>0).$$

因为 $2a=6$，$2c=10$，所以 $a=3$，$c=5$，所以 $b^2=5^2-3^2=16$.

因此，双曲线的标准方程为

$$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1.$$

例 2　已知 A，B 两地相距 800 m，在 A 地听到炮弹爆炸声比在 B 地晚 2 s，且声速为 340 m/s，求炮弹爆炸点的轨迹方程.

分析：首先根据题意，判断轨迹的形状. 由声速及 A，B 两处听到爆炸声的时间差，可知 A，B 两处与爆炸点的距离的差为定值. 这样，爆炸点在以 A，B 为焦点的双曲线上. 因为爆炸点离 A 处比离 B 处远，所以爆炸点应在靠近 B 处的双曲线的一支上.

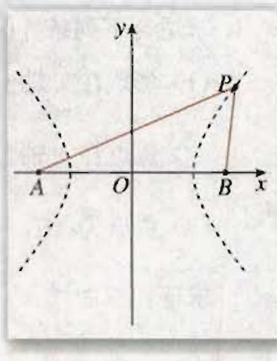


图 2.2-4

解：如图 2.2-4，建立直角坐标系 xOy，使 A，B 两点在 x 轴上，并且坐标原点 O 与线段 AB 的中点重合.

设爆炸点 P 的坐标为 (x, y)，则

$$|PA|-|PB|=340\times 2=680,$$

即

$$2a=680,\ a=340.$$

又 $$|AB|=800,$$
所以 $$2c=800,\ c=400,$$
$$b^2=c^2-a^2=44\ 400.$$

因为$|PA|-|PB|=340\times2=680>0$，所以爆炸点 P 在双曲线的右支上，因此 $x\geqslant340$.

因此炮弹爆炸点的轨迹（双曲线）的方程为

$$\frac{x^2}{115\ 600}-\frac{y^2}{44\ 400}=1\ (x\geqslant340).$$

如果 A，B 两处同时听到爆炸声，那么爆炸点在什么曲线上？为什么？

利用两个不同的观测点 A，B 测得同一点 P 发出信号的时间差，可以确定点 P 所在双曲线的方程．如果再增设一个观测点 C，利用 B，C（或 A，C）两处测得的点 P 发出的信号的时间差，就可以求出另一个双曲线的方程．解这两个方程组成的方程组，就能确定点 P 的准确位置，这是双曲线的一个重要应用．

探究

如图 2.2-5，点 A，B 的坐标分别是$(-5,\ 0)$，$(5,\ 0)$，直线 AM，BM 相交于点 M，且它们的斜率之积是$\frac{4}{9}$，试求点 M 的轨迹方程，并由点 M 的轨迹方程判断轨迹的形状．与 2.1 例 3 比较，你有什么发现？

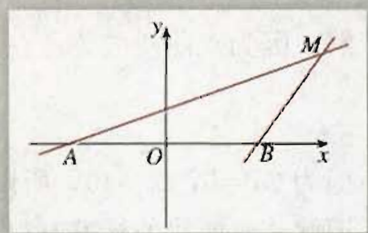


图 2.2-5

练习

1. 求适合下列条件的双曲线的标准方程：

(1) 焦点在 x 轴上，$a=4$，$b=3$；

(2) 焦点在 x 轴上，经过点 $(-\sqrt{2},\ -\sqrt{3})$，$\left(\frac{\sqrt{15}}{3},\ \sqrt{2}\right)$；

(3) 焦点为 $(0,\ -6)$，$(0,\ 6)$，且经过点 $(2,\ -5)$．

2. 求证：双曲线 $x^2-15y^2=15$ 与椭圆$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ 的焦点相同．

2.2.2 双曲线的简单几何性质

类比椭圆几何性质的研究方法，我们根据双曲线的标准方程

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>0,\ b>0) \qquad ①$$

研究它的几何性质.

思考

类比椭圆几何性质的研究，你认为应研究双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$（$a>0$，$b>0$）的哪些性质？如何研究这些性质？

1. 范围

观察双曲线，可以看出它在不等式 $x\leqslant -a$ 与 $x\geqslant a$ 表示的区域内. 下面利用双曲线的方程求出它的范围.

将方程①化为

$$\frac{x^2}{a^2}-1=\frac{y^2}{b^2},$$

于是，双曲线上点的坐标$(x,\ y)$都适合$\frac{x^2}{a^2}\geqslant 1$，即

$$x^2\geqslant a^2,$$

所以 $x\leqslant -a$，或 $x\geqslant a$.

这说明双曲线在不等式 $x\leqslant -a$ 与 $x\geqslant a$ 所表示的区域内.

2. 对称性

类比研究椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$（$a>b>0$）对称性的方法，容易得到，双曲线关于 x 轴、y 轴和原点都是对称的. 这时，坐标轴是双曲线的对称轴，原点是双曲线的对称中心. 双曲线的对称中心叫做**双曲线的中心**.

3. 顶点

在方程①里，令 $y=0$，得 $x=\pm a$，因此双曲线和 x 轴有两个交点 $A_1(-a,\ 0)$，$A_2(a,\ 0)$. 因为 x 轴是双曲线的对称轴，所以双曲线和它的对称轴有两个交点，它们叫做**双曲线的顶点**.

令 $x=0$，得 $y^2=-b^2$，这个方程没有实数根，说明双曲线和 y 轴没有交点，但我们也

把 $B_1(0, -b)$，$B_2(0, b)$画在 y 轴上（图 2.2-6）.

线段 A_1A_2 叫做**双曲线的实轴**，它的长等于 $2a$，a 叫做双曲线的实半轴长；线段 B_1B_2 叫做**双曲线的虚轴**，它的长等于 $2b$，b 叫做双曲线的虚半轴长.

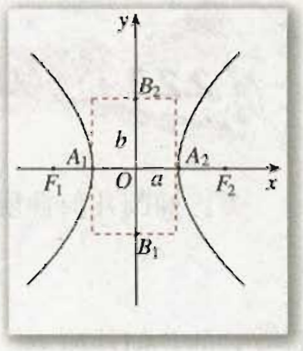


图 2.2-6

4. 渐近线

如图 2.2-7，用《几何画板》画双曲线$\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{4}=1$，在位于第一象限的曲线上画一点 M，测量点 M 的横坐标 x_M 以及它到直线$\dfrac{x}{3}-\dfrac{y}{2}=0$ 的距离 d. 沿曲线向右上角拖动点 M，观察 x_M 与 d 的大小关系，你发现了什么？

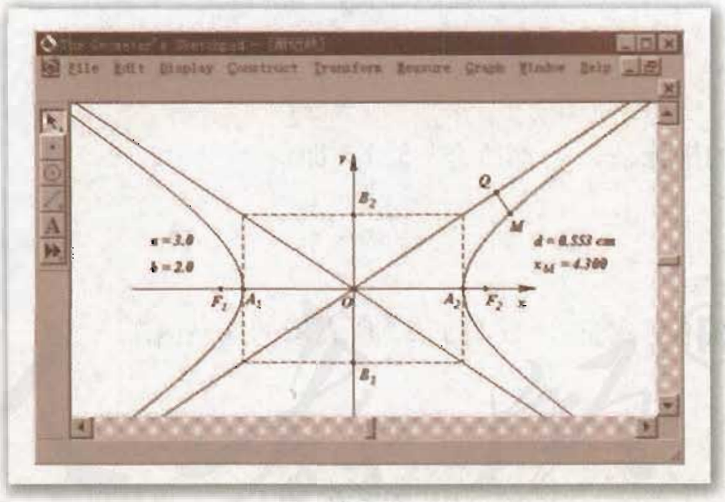


图 2.2-7

可以发现，点 M 的横坐标 x_M 越来越大，d 越来越小，但永远不等于 0.

实际上，经过 A_1，A_2 作 y 轴的平行线 $x=\pm a$，经过 B_1，B_2 作 x 轴的平行线 $y=\pm b$，四条直线围成一个矩形（图 2.2-7）. 矩形的两条对角线所在直线的方程是$\dfrac{x}{a}\pm\dfrac{y}{b}=0$. 利用信息技术，可以看到，双曲线$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 的各支向外延伸时，与这两条直线逐渐接近，我们把这两条直线叫做**双曲线的渐近线**. 也就是说，双曲线与它的渐近线无限接近，但永不相交.

在方程$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$中，如果$a=b$，那么双曲线的方程为$x^2-y^2=a^2$，它的实轴和虚轴的长都等于$2a$．这时，四条直线$x=\pm a$，$y=\pm a$围成正方形，渐近线方程为$y=\pm x$，它们互相垂直，并且平分双曲线实轴和虚轴所成的角．实轴和虚轴等长的双曲线叫做**等轴双曲线**．

5. 离心率

与椭圆类似，双曲线的焦距与实轴长的比$\frac{c}{a}$，叫做**双曲线的离心率**．因为$c>a>0$，所以双曲线的离心率$e=\frac{c}{a}>1$．

思考

离心率可以刻画椭圆的扁平程度，双曲线的离心率刻画双曲线的什么几何特征？

例3　求双曲线$9y^2-16x^2=144$的实半轴长和虚半轴长、焦点坐标、离心率、渐近线方程．

解：把方程$9y^2-16x^2=144$化为标准方程

$$\frac{y^2}{4^2}-\frac{x^2}{3^2}=1.$$

由此可知，实半轴长$a=4$，虚半轴长$b=3$；

$$c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{4^2+3^2}=5,$$

焦点坐标是$(0,\ -5)$，$(0,\ 5)$；离心率$e=\frac{c}{a}=\frac{5}{4}$；渐近线方程为$y=\pm\frac{4}{3}x$．

请画出这个双曲线的草图．

例4　双曲线型冷却塔的外形，是双曲线的一部分绕其虚轴旋转所成的曲面（图2.2-8(1)），它的最小半径为12 m，上口半径为13 m，下口半径为25 m，高为55 m．试选择适当的坐标系，求出此双曲线的方程．（精确到1 m）

解：如图2.2-8(2)，在冷却塔的轴截面所在的平面上建立直角坐标系xOy，使小圆的直径AA'在x轴上，圆心与原点重合．这时，上、下口的直径CC'，BB'都平行于x轴，且$|CC'|=13\times2$，$|BB'|=25\times2$．

设双曲线的方程为$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,\ b>0)$，令点$C$的坐标为$(13,\ y)$，则点$B$的坐标为$(25,\ y-55)$．

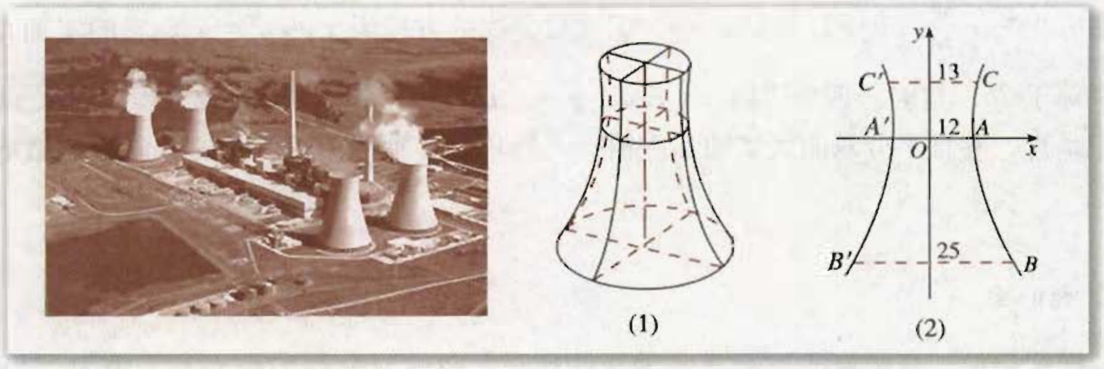


图 2.2-8

因为点 B，C 在双曲线上，所以

$$\begin{cases}\dfrac{25^2}{12^2}-\dfrac{(y-55)^2}{b^2}=1, & ①\\[2ex] \dfrac{13^2}{12^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1. & ②\end{cases}$$

由方程②，得 $y=\dfrac{5b}{12}$（负值舍去），代入方程①，得

$$\frac{25^2}{12^2}-\frac{\left(\dfrac{5b}{12}-55\right)^2}{b^2}=1,$$

化简得

$$19b^2+275b-18\ 150=0. \qquad ③$$

用计算器解方程③，得

$$b\approx 25.$$

所以，所求双曲线的方程为

$$\frac{x^2}{144}-\frac{y^2}{625}=1.$$

例 5 点 $M(x,\ y)$ 到定点 $F(5,\ 0)$ 的距离和它到定直线 l：$x=\dfrac{16}{5}$ 的距离的比是常数 $\dfrac{5}{4}$，求点 M 的轨迹.

解：设 d 是点 M 到直线 l 的距离，根据题意，所求轨迹就是集合

$$P=\left\{M\left|\ \frac{|MF|}{d}=\frac{5}{4}\right.\right\},$$

由此得

$$\frac{\sqrt{(x-5)^2+y^2}}{\left|\dfrac{16}{5}-x\right|}=\frac{5}{4}.$$

将上式两边平方，并化简，得

$$9x^2-16y^2=144,$$

即

$$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1.$$

所以，点 M 的轨迹是实轴、虚轴长分别为 8、6 的双曲线（图 2.2-9）.

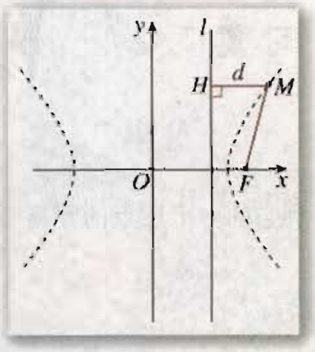


图 2.2-9

思考？

比较例 5 与第 41 页的例 6，你有什么发现？

练　习

1. 求下列双曲线的实轴、虚轴的长，顶点、焦点的坐标和离心率：

　(1) $x^2-8y^2=32$；　　(2) $9x^2-y^2=81$；

　(3) $x^2-y^2=-4$；　　(4) $\frac{x^2}{49}-\frac{y^2}{25}=-1$.

2. 求符合下列条件的双曲线的标准方程：

　(1) 顶点在 x 轴上，两顶点间的距离是 8，$e=\frac{5}{4}$；

　(2) 焦点在 y 轴上，焦距是 16，$e=\frac{4}{3}$.

3. 求以椭圆 $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{5}=1$ 的焦点为顶点，以椭圆的顶点为焦点的双曲线的方程.

4. 等轴双曲线的一个焦点是 $F_1(-6,0)$，求它的标准方程和渐近线方程.

习题 2.2

A 组

1. 双曲线 $4x^2-y^2+64=0$ 上一点 P 到它的一个焦点的距离等于 1，那么点 P 到另一个焦点的距离等于________.
2. 求适合下列条件的双曲线的标准方程：

   (1) 焦点在 x 轴上，$a=2\sqrt{5}$，经过点 $A(-5, 2)$；

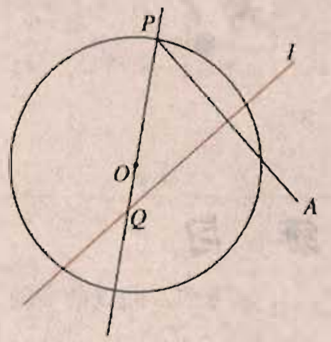
   (2) 经过两点 $A(-7, -6\sqrt{2})$，$B(2\sqrt{7}, 3)$.
3. 已知下列双曲线的方程，求它的焦点坐标、离心率和渐近线方程：

   (1) $16x^2-9y^2=144$；　(2) $16x^2-9y^2=-144$.
4. 求适合下列条件的双曲线的标准方程：

   (1) 焦点在 x 轴上，实轴长是 10，虚轴长是 8；

   (2) 焦点在 y 轴上，焦距是 10，虚轴长是 8；

   (3) 离心率 $e=\sqrt{2}$，经过点 $M(-5, 3)$.
5. 如图，圆 O 的半径为定长 r，A 是圆 O 外一个定点，P 是圆上任意一点. 线段 AP 的垂直平分线 l 和直线 OP 相交于点 Q，当点 P 在圆上运动时，点 Q 的轨迹是什么？为什么？
6. 求经过点 A $(3, -1)$，并且对称轴都在坐标轴上的等轴双曲线的方程.

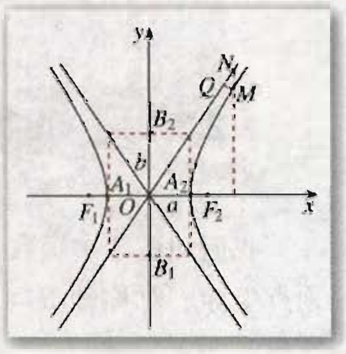


(第 5 题)

B 组

1. 求与椭圆 $\frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{24}=1$ 有公共焦点，且离心率 $e=\frac{5}{4}$ 的双曲线的方程.
2. 相距 1 400 m 的 A，B 两个哨所，听到炮弹爆炸声的时间相差 3 s，已知声速是 340 m/s，问炮弹爆炸点在怎样的曲线上，为什么？
3. 求到定点 $F(c, 0)$ 与到定直线 l：$x=\frac{a^2}{c}$ 距离之比是 $\frac{c}{a}$ $\left(\frac{c}{a}>1\right)$ 的点 M 的轨迹.

为什么 $y=\pm\dfrac{b}{a}x$ 是双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 的渐近线



如图，先取双曲线$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$在第一象限内的部分进行证明．这一部分的方程可写为

$$y=\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}\ (x>a).$$

设 $M(x, y)$是它上面的点，$N(x, Y)$是直线 $y=\dfrac{b}{a}x$ 上与 M 有相同横坐标的点，则 $Y=\dfrac{b}{a}x$.

因为 $y=\dfrac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}=\dfrac{b}{a}x\sqrt{1-\left(\dfrac{a}{x}\right)^2}<\dfrac{b}{a}x=Y$,

所以 $|MN|=Y-y=\dfrac{b}{a}(x-\sqrt{x^2-a^2})$

$$=\frac{b}{a}\cdot\frac{(x-\sqrt{x^2-a^2})(x+\sqrt{x^2-a^2})}{x+\sqrt{x^2-a^2}}$$

$$=\frac{ab}{x+\sqrt{x^2-a^2}}.$$

设$|MQ|$是点M到直线 $y=\dfrac{b}{a}x$ 的距离，则$|MQ|<|MN|$.

当 x 逐渐增大时，$|MN|$逐渐减小，x 无限增大，$|MN|$无限接近于零，$|MQ|$也无限接近于零，就是说，双曲线在第一象限的部分从射线 ON 的下方逐渐接近于射线 ON.

在其他象限内，也可以证明类似的情况．你能证明吗？

另外，我们也可直接计算$|MQ|$，证明当 x 无限增大时，$|MQ|$无限接近于零.