# 3

你看过高台跳水比赛吗？

照片中锁定了运动员比赛的瞬间．已知起跳 $t$ s 后，运动员相对于水面的高度 $h$（单位：m）可用函数 $h(t)=-4.9t^2+6.5t+10$ 表示．

如何求他在某一时刻的速度？他距水面的最大高度是多少？

# 第三章 导数及其应用


3.1 变化率与导数

3.2 导数的计算

3.3 导数在研究函数中的应用

3.4 生活中的优化问题举例


为了描述现实世界中运动、过程等变化着的现象，在数学中引入了函数．刻画动态的函数与刻画静态的数一样，都是数学中非常重要的概念．随着对函数的研究，产生了微积分，它是数学发展史上继欧氏几何后的又一个具有划时代意义的伟大创造，被称为数学史上的里程碑．它的创立，被誉为“人类精神的最高胜利”．

微积分的创立与自然科学中四类问题的处理直接相关．一是已知物体运动的路程作为时间的函数，求物体在任意时刻的速度与加速度，以及已知物体的加速度作为时间的函数，求速度与路程；二是求曲线的切线；三是求已知函数的最大值与最小值；四是求长度、面积、体积和重心等．历史上科学家们对这些问题的兴趣和研究经久不衰，经历数百年之久，终于在17世纪中叶，牛顿和莱布尼茨“站在巨人的肩膀上”，凭着他们敏锐的直觉和丰富的想象力，各自独立地创立了微积分．

导数是微积分的核心概念之一．它是研究函数增减、变化快慢、最大（小）值等问题最一般、最有效的工具，因而也是解决诸如运动速度、物种繁殖率、绿化面积增长率，以及用料最省、利润最大、效率最高等实际问题的最有力的工具．微积分在物理、化学、生物、天文、地理以及经济等各种科学领域中都有非常广泛而重要的应用．

在本章，我们将利用丰富的背景与大量实例，学习导数的基本概念与思想方法；通过应用导数研究函数性质、解决生活中的最优化问题等实践活动，初步感受导数在解决数学问题与实际问题中的作用．

CHAPTER 3

# 3.1 变化率与导数

丰富多彩的变化率问题随处可见．让我们从其中的两个问题，开始变化率与导数的学习吧！

## 3.1.1 变化率问题

**问题 1　气球膨胀率**

很多人都吹过气球．回忆一下吹气球的过程，可以发现，随着气球内空气容量的增加，气球的半径增加得越来越慢．从数学的角度，如何描述这种现象呢？

我们知道，气球的体积 $V$（单位：L）与半径 $r$（单位：dm）之间的函数关系是

$$V(r)=\frac{4}{3}\pi r^3,$$

如果将半径 $r$ 表示为体积 $V$ 的函数，那么

$$r(V)=\sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}.$$

当空气容量 $V$ 从 0 增加到 1 L 时，气球半径增加了

$$r(1)-r(0)\approx 0.62(\mathrm{dm}),$$

气球的平均膨胀率为

$$\frac{r(1)-r(0)}{1-0}\approx 0.62(\mathrm{dm/L}).$$

类似地，当空气容量 $V$ 从 1 L 增加到 2 L 时，气球半径增加了

$$r(2)-r(1)\approx 0.16(\mathrm{dm}),$$

气球的平均膨胀率为

$$\frac{r(2)-r(1)}{2-1}\approx 0.16(\mathrm{dm/L}).$$

可以看出，随着气球体积逐渐变大，它的平均膨胀率逐渐变小了．

思考？

当空气容量从 $V_1$ 增加到 $V_2$ 时，气球的平均膨胀率是多少？

**问题 2　高台跳水**

人们发现，在高台跳水运动中，运动员相对于水面的高度 $h$（单位：m）与起跳后的时间 $t$（单位：s）存在函数关系

$$h(t)=-4.9t^2+6.5t+10.$$

如果我们用运动员在某段时间内的平均速度 $\bar{v}$ 描述其运动状态，那么：

在 $0\leqslant t\leqslant 0.5$ 这段时间里，

$$\bar{v}=\frac{h(0.5)-h(0)}{0.5-0}=4.05(\text{m/s});$$

在 $1\leqslant t\leqslant 2$ 这段时间里，

$$\bar{v}=\frac{h(2)-h(1)}{2-1}=-8.2(\text{m/s}).$$

探究

计算运动员在 $0\leqslant t\leqslant\frac{65}{49}$ 这段时间里的平均速度，并思考下面的问题：

(1) 运动员在这段时间里是静止的吗？

(2) 你认为用平均速度描述运动员的运动状态有什么问题吗？

如果上述两个问题中的函数关系用 $y=f(x)$ 表示，那么问题中的变化率可用式子

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$$

表示，我们把这个式子称为函数 $y=f(x)$ 从 $x_1$ 到 $x_2$ 的**平均变化率**(average rate of change). 习惯上用 $\Delta x$❶表示 $x_2-x_1$，即

$$\Delta x=x_2-x_1.$$

可把 $\Delta x$ 看作是相对于 $x_1$ 的一个“增量”，可用 $x_1+\Delta x$ 代替 $x_2$；类似地，

$$\Delta y=f(x_2)-f(x_1).$$

于是，平均变化率可以表示为

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

❶ $\Delta x$ 是一个整体符号，而不是 $\Delta$ 与 $x$ 相乘.

思考

观察函数 $y=f(x)$ 的图象（图 3.1-1），平均变化率

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$$

表示什么？

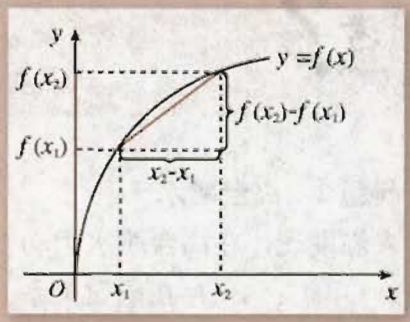



图 3.1-1

## 3.1.2 导数的概念

在高台跳水运动中，运动员在不同时刻的速度是不同的．我们把物体在某一时刻的速度称为**瞬时速度**（instantaneous velocity）．运动员的平均速度不一定能反映他（她）在某一时刻的瞬时速度．那么，如何求运动员的瞬时速度呢？比如，$t=2$ 时的瞬时速度是多少？

我们先考察 $t=2$ 附近的情况．在 $t=2$ 之前或之后，任意取一个时刻 $2+\Delta t$，$\Delta t$ 是时间改变量，可以是正值，也可以是负值，但不为 0．当 $\Delta t<0$ 时，$2+\Delta t$ 在 2 之前；当 $\Delta t>0$ 时，$2+\Delta t$ 在 2 之后．计算区间 $[2+\Delta t, 2]$ 和区间 $[2, 2+\Delta t]$ 内的平均速度 $\bar{v}$，可以得到如下表格．

| $\Delta t<0$ 时，在 $[2+\Delta t, 2]$ 这段时间内 | $\Delta t>0$ 时，在 $[2, 2+\Delta t]$ 这段时间内 |
|---|---|
| $\bar{v}=\frac{h(2)-h(2+\Delta t)}{2-(2+\Delta t)}=\frac{4.9(\Delta t)^2+13.1\Delta t}{-\Delta t}$ $=-4.9\Delta t-13.1$ | $\bar{v}=\frac{h(2+\Delta t)-h(2)}{(2+\Delta t)-2}=\frac{-4.9(\Delta t)^2-13.1\Delta t}{\Delta t}$ $=-4.9\Delta t-13.1$ |
| 当 $\Delta t=-0.01$ 时，$\bar{v}=-13.051$； | 当 $\Delta t=0.01$ 时，$\bar{v}=-13.149$； |
| 当 $\Delta t=-0.001$ 时，$\bar{v}=-13.095\ 1$； | 当 $\Delta t=0.001$ 时，$\bar{v}=-13.104\ 9$； |
| 当 $\Delta t=-0.000\ 1$ 时，$\bar{v}=-13.099\ 51$； | 当 $\Delta t=0.000\ 1$ 时，$\bar{v}=-13.100\ 49$； |
| 当 $\Delta t=-0.000\ 01$ 时，$\bar{v}=-13.099\ 951$； | 当 $\Delta t=0.000\ 01$ 时，$\bar{v}=-13.100\ 049$； |
| 当 $\Delta t=-0.000\ 001$ 时，$\bar{v}=-13.099\ 995\ 1$； | 当 $\Delta t=0.000\ 001$ 时，$\bar{v}=-13.100\ 004\ 9$； |
| …… | …… |

**观察**

当 $\Delta t$ 趋近于 0 时，平均速度 $\bar{v}$ 有什么样的变化趋势？

我们发现，当 $\Delta t$ 趋近于 0 时，即无论 $t$ 从小于 2 的一边，还是从大于 2 的一边趋近于 2 时，平均速度都趋近于一个确定的值 $-13.1$.

从物理的角度看，时间间隔 $|\Delta t|$ 无限变小时，平均速度 $\bar{v}$ 就无限趋近于 $t=2$ 时的瞬时速度. 因此，运动员在 $t=2$ 时的瞬时速度是 $-13.1$ m/s.

为了表述方便，我们用

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{h(2+\Delta t)-h(2)}{\Delta t}=-13.1$$

表示"当 $t=2$，$\Delta t$ 趋近于 0 时，平均速度 $\bar{v}$ 趋近于确定值 $-13.1$".

**探究**

1. 运动员在某一时刻 $t_0$ 的瞬时速度怎样表示？
2. 函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的瞬时变化率怎样表示？

一般地，函数 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的瞬时变化率是

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x},$$

我们称它为函数 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的**导数**（derivative），记作 $f'(x_0)$ 或 $y'|_{x=x_0}$ ❶，即

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

❶ $y'|_{x=x_0}$ 表示函数 $y$ 关于自变量 $x$ 在 $x_0$ 处的导数.

17 世纪，力学、航海、天文等方面取得了突飞猛进的发展，这些发展对数学提出了新的要求，它们突出地表现为本章引言中提到的四类问题，其中的两类问题直接导致了导数的产生：一是根据物体的路程关于时间的函数求速度和加速度；二是求已知曲线的切线.

由导数的定义，我们知道，高度 $h$ 关于时间 $t$ 的导数就是运动员的瞬时速度；气球半径 $r$ 关于体积 $V$ 的导数就是气球的瞬时膨胀率.

实际上，导数可以描述任何事物的瞬时变化率，如效率、国内生产总值（GDP，Gross Domestic Product 的缩写）的增长率等等.

**例 1**　将原油精炼为汽油、柴油、塑胶等各种不同产品，需要对原油进行冷却和加

热. 如果第 $x$ h 时，原油的温度（单位：℃）为 $y=f(x)=x^2-7x+15(0\leqslant x\leqslant 8)$. 计算第 2 h 和第6 h时，原油温度的瞬时变化率，并说明它们的意义.

**解**：在第 2 h 和第6 h时，原油温度的瞬时变化率就是 $f'(2)$和 $f'(6)$.

根据导数的定义，

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(2+\Delta x)-f(2)}{\Delta x}$$

$$=\frac{(2+\Delta x)^2-7(2+\Delta x)+15-(2^2-7\times 2+15)}{\Delta x}$$

$$=\frac{4\Delta x+(\Delta x)^2-7\Delta x}{\Delta x}=\Delta x-3,$$

所以，

$$f'(2)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}(\Delta x-3)=-3.$$

同理可得

$$f'(6)=5❶.$$

❶ 请同学们自己完成具体运算过程.

在第 2 h 与第 6 h 时，原油温度的瞬时变化率分别为 $-3$与 5. 它说明在第 2 h 附近，原油温度大约以 3 ℃/h 的速率下降；在第 6 h 附近，原油温度大约以 5 ℃/h 的速率上升.

一般地，$f'(x_0)$反映了原油温度在时刻 $x_0$ 附近的变化情况.

**练 习**

计算第 3 h 和第 5 h 时原油温度的瞬时变化率，并说明它们的意义.

## 3.1.3 导数的几何意义

我们知道，导数 $f'(x_0)$表示函数 $f(x)$在 $x=x_0$ 处的瞬时变化率，反映了函数 $f(x)$在 $x=x_0$ 附近的变化情况. 那么，导数$f'(x_0)$的几何意义是什么呢?

**观察**

如图 3.1-2，当点 $P_n(x_n, f(x_n))(n=1, 2, 3, 4)$ 沿着曲线 $f(x)$ 趋近于点 $P(x_0, f(x_0))$ 时，割线 $PP_n$ 的变化趋势是什么？

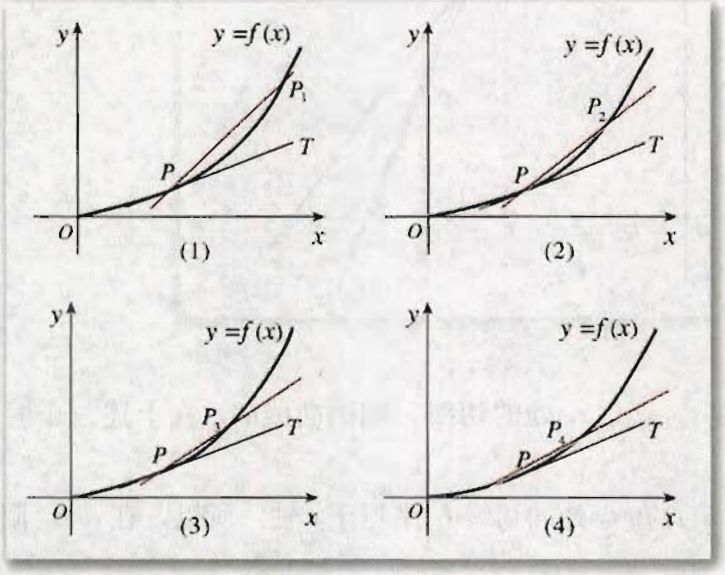



图 3.1-2

利用信息技术工具，演示图 3.1-2 中 $PP_n$ 的动态变化效果．做一做，看一看！

我们发现，当点 $P_n$ 趋近于点 $P$ 时，割线 $PP_n$ 趋近于确定的位置，这个确定位置的直线 $PT$ 称为点 $P$ 处的**切线**❶(tangent line)．值得关注的问题是，割线 $PP_n$ 的斜率与切线 $PT$ 的斜率 $k$ 有什么关系呢？

❶ 此处切线定义与以前学过的切线定义有什么不同？

容易知道，割线 $PP_n$ 的斜率是

$$k_n=\frac{f(x_n)-f(x_0)}{x_n-x_0}.$$

当点 $P_n$ 无限趋近于点 $P$ 时，$k_n$ 无限趋近于切线 $PT$ 的斜率．因此，函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的导数就是切线 $PT$ 的斜率 $k$，即

$$k=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=f'(x_0).$$

继续观察图 3.1-2，可以发现，在点 $P$ 附近，$PP_2$ 比 $PP_1$ 更贴近曲线 $f(x)$，$PP_3$ 比 $PP_2$ 更贴近曲线 $f(x)$……过点 $P$ 的切线 $PT$ 最贴近点 $P$ 附近的曲线 $f(x)$．因此，在点 $P$ 附近，曲线 $f(x)$ 就可以用过点 $P$ 的切线 $PT$ 近似代替．

数学上常用简单的对象刻画复杂的对象．例如，用有理数 3.141 6 近似代替无理数 $\pi$．这里，我们用曲线上某点处的切线近似代替这一点附近的曲线，这是微积分中重要的思想方法——以直代曲．

**例 2**　如图 3.1-3，它表示跳水运动中高度随时间变化的函数 $h(t)=-4.9t^2+6.5t+10$ 的图象．根据图象，请描述、比较曲线 $h(t)$ 在 $t_0$，$t_1$，$t_2$ 附近的变化情况．

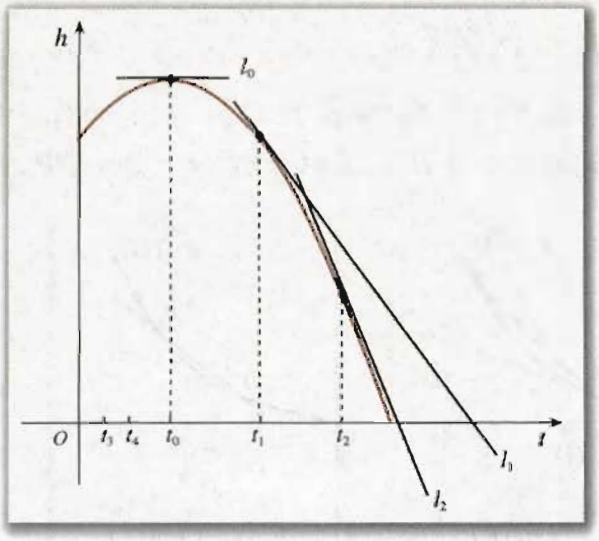



图 3.1-3

**解**：我们用曲线 $h(t)$ 在 $t_0$，$t_1$，$t_2$ 处的切线，刻画曲线 $h(t)$ 在上述三个时刻附近的变化情况.

(1) 当 $t=t_0$ 时，曲线 $h(t)$ 在 $t_0$ 处的切线 $l_0$ 平行于 $t$ 轴. 所以，在 $t=t_0$ 附近曲线比较平坦，几乎没有升降.

(2) 当 $t=t_1$ 时，曲线 $h(t)$ 在 $t_1$ 处的切线 $l_1$ 的斜率 $h'(t_1)<0$. 所以，在 $t=t_1$ 附近曲线下降，即函数 $h(t)$ 在 $t=t_1$ 附近单调递减.

(3) 当 $t=t_2$ 时，曲线 $h(t)$ 在 $t_2$ 处的切线 $l_2$ 的斜率 $h'(t_2)<0$. 所以，在 $t=t_2$ 附近曲线下降，即函数 $h(t)$ 在 $t=t_2$ 附近也单调递减.

从图 3.1-3 可以看出，直线 $l_1$ 的倾斜程度小于直线 $l_2$ 的倾斜程度，这说明曲线 $h(t)$ 在 $t_1$ 附近比在 $t_2$ 附近下降得缓慢.

## 练 习

根据图 3.1-3，描述函数 $h(t)$ 在 $t_3$ 和 $t_4$ 附近增(减)以及增(减)快慢的情况.

**例 3** 如图 3.1-4，它表示人体血管中药物浓度 $c=f(t)$（单位：mg/mL）随时间 $t$（单位：min）变化的函数图象. 根据图象，估计 $t=0.2$，0.4，0.6，0.8 时，血管中药物浓度的瞬时变化率（精确到 0.1）.

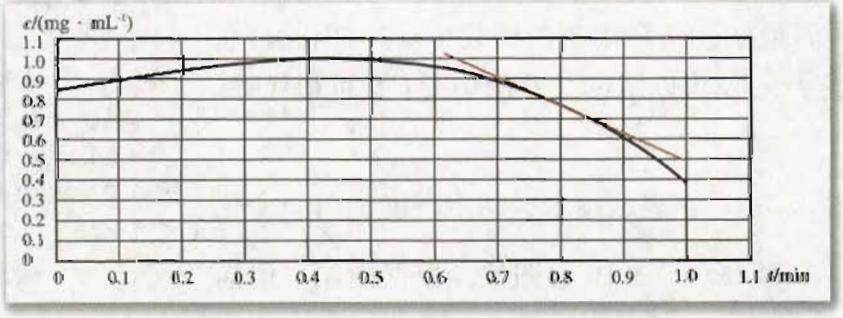



图 3.1-4

解：血管中某一时刻药物浓度的瞬时变化率，就是药物浓度 $f(t)$ 在此时刻的导数．从图象上看，它表示曲线 $f(t)$ 在此点处的切线的斜率．

如图 3.1-4，画出曲线上某点处的切线，利用网格估计这条切线的斜率，可以得到此时刻药物浓度瞬时变化率的近似值．

作 $t=0.8$ 处的切线，并在切线上取两个点，如 (0.7，0.91)，(1.0，0.48)，则它的斜率约为

$$k=\frac{0.48-0.91}{1.0-0.7}\approx-1.4,$$

所以

$$f'(0.8)\approx-1.4.$$

下表给出了药物浓度瞬时变化率的估计值，验证一下，这些值是否正确．

| $t$ | 0.2 | 0.4 | 0.6 | 0.8 |
|---|---|---|---|---|
| 药物浓度的瞬时变化率 $f'(t)$ | 0.4 | 0 | −0.7 | −1.4 |

从求函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处导数的过程可以看到，当 $x=x_0$ 时，$f'(x_0)$ 是一个确定的数．这样，当 $x$ 变化时，$f'(x)$ 便是 $x$ 的一个函数，我们称它为 $f(x)$ 的**导函数**（derivative function）（简称**导数**）．$y=f(x)$ 的导函数有时也记作 $y'$，即

$$f'(x)=y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}.$$

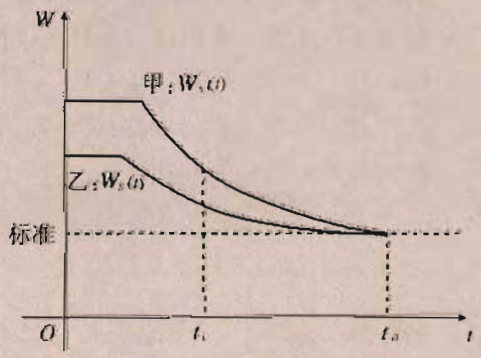
## 练　习

利用信息技术工具，画出函数 $r(V)=\sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}$ $(0\leqslant V\leqslant 5)$ 的图象，并根据图象，估计 $V=0.6$，1.2 时，气球的瞬时膨胀率．

## 习题 3.1

### A 组

1. 国家环保总局对长期超标准排放污物，污染严重而又未进行治理的单位，规定出一定期限，强令在此期限内完成排污治理．右图是国家环保总局在规定的排污达标日期前，对甲、乙两家企业连续检测的结果（$W$ 表示排污量），哪个企业治理的效率比较高？为什么？



（第 1 题）

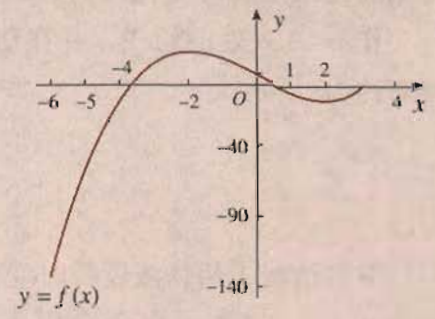
2. 在高台跳水运动中，$t$ s 时运动员相对于水面的高度（单位：m）是 $h(t)=-4.9t^2+6.5t+10$，求运动员在 $t=1$ s 时的瞬时速度，并解释此时的运动状况．

3. 一个质量为 3 kg 的物体做直线运动，设运动距离 $s$（单位：m）与时间 $t$（单位：s）的关系可用函数 $s(t)=1+t^2$ 表示，并且物体的动能 $E_k=\frac{1}{2}mv^2$. 求物体开始运动后第 5 s 时的动能.

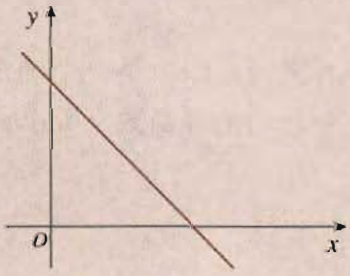
4. 已知车轮旋转的角度与时间的平方成正比. 如果车辆启动后车轮转动第一圈需要 0.8 s，求转动开始后第 3.2 s 时的瞬时角速度.

5. 如图，试描述函数 $f(x)$ 在 $x=-5$，$-4$，$-2$，0，1 附近的变化情况.

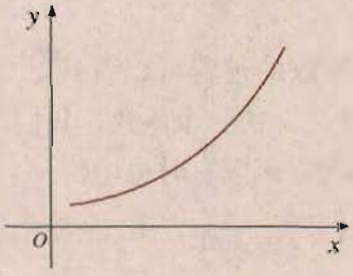
6. 已知函数 $f(x)$ 的图象，试画出其导函数 $f'(x)$ 图象的大致形状.



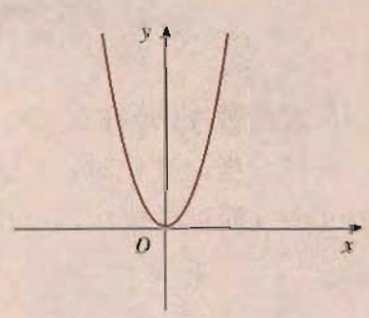

（第 5 题）




（1）




（2）




（3）

（第 6 题）

## B 组

1. 在高台跳水运动中，$t$ s 时运动员相对于水面的高度（单位：m）是 $h(t)=-4.9t^2+6.5t+10$. 高度 $h$ 关于时间 $t$ 的导数是速度 $v$，速度 $v$ 关于时间 $t$ 的导数是什么？

2. 根据下面的文字叙述，画出相应的路程关于时间的函数图象的大致形状.

   (1) 汽车在笔直的公路上匀速行驶；

   (2) 汽车在笔直的公路上不断加速行驶；

   (3) 汽车在笔直的公路上不断减速行驶.

（第 2 题）

3. 根据下列条件，分别画出函数图象在这点附近的大致形状：

   (1) $f(1)=-5$，$f'(1)=-1$；

   (2) $f(5)=10$，$f'(5)=3$；

   (3) $f(10)=20$，$f'(10)=0$.