CHAPTER 3

3.2 导数的计算

3.2.1 几个常用函数的导数

我们知道，导数的几何意义是曲线在某一点处的切线的斜率，物理意义是运动物体在某一时刻的瞬时速度. 那么，对于函数$y=f(x)$，如何求它的导数呢?

根据导数的定义，求函数 $y=f(x)$的导数，就是求出当 Δx 趋近于 0 时，$\frac{\Delta y}{\Delta x}$所趋于的那个定值.

下面我们求几个常用函数的导数.

1. 函数 $y=f(x)=c$ 的导数

因为 $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\frac{c-c}{\Delta x}=0$,

所以 $y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}0=0$.

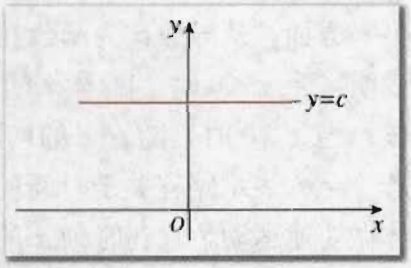


图 3.2-1

若 $y=c$ 表示路程关于时间的函数，则$y'=0$可以解释为某物体的瞬时速度始终为 0，即一直处于静止状态.

2. 函数 $y=f(x)=x$ 的导数

因为 $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\frac{x+\Delta x-x}{\Delta x}=1$,

所以 $y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}1=1$.

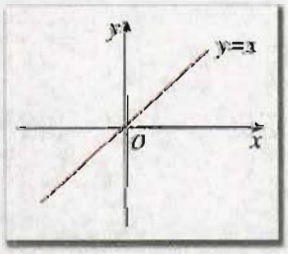


图 3.2-2

若 $y=x$ 表示路程关于时间的函数，则$y'=1$可以解释为某物体做瞬时速度为 1 的匀速运动.

探究

在同一平面直角坐标系中，画出函数 $y=2x$，$y=3x$，$y=4x$ 的图象，并根据导数定义，求它们的导数.

(1) 从图象上看，它们的导数分别表示什么？

(2) 这三个函数中，哪一个增加得最快？哪一个增加得最慢？

(3) 函数 $y=kx(k\neq 0)$ 增（减）的快慢与什么有关？

3. 函数 $y=f(x)=x^2$ 的导数

因为 $$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\frac{(x+\Delta x)^2-x^2}{\Delta x}$$
$$=\frac{x^2+2x\cdot\Delta x+(\Delta x)^2-x^2}{\Delta x}$$
$$=2x+\Delta x,$$

所以 $$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}(2x+\Delta x)=2x.$$

$y'=2x$ 表示函数 $y=x^2$ 图象（图 3.2-3）上点 (x, y) 处切线的斜率为 $2x$，说明随着 x 的变化，切线的斜率也在变化. 另一方面，从导数作为函数在一点的瞬时变化率来看，$y'=2x$ 表明：当 $x<0$ 时，随着 x 的增加，函数 $y=x^2$ 减少得越来越慢；当 $x>0$ 时，随着 x 的增加，函数 $y=x^2$ 增加得越来越快. 若 $y=x^2$ 表示路程关于时间的函数，则 $y'=2x$ 可以解释为某物体做变速运动，它在时刻 x 的瞬时速度为 $2x$.

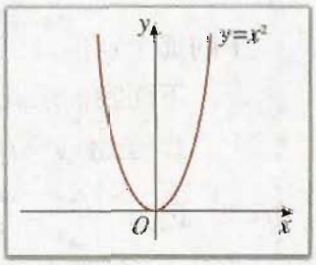


图 3.2-3

4. 函数 $y=f(x)=\frac{1}{x}$ 的导数

因为 $$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\frac{\frac{1}{x+\Delta x}-\frac{1}{x}}{\Delta x}$$
$$=\frac{x-(x+\Delta x)}{x(x+\Delta x)\Delta x}=-\frac{1}{x^2+x\cdot\Delta x},$$

所以 $$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(-\frac{1}{x^2+x\cdot\Delta x}\right)=-\frac{1}{x^2}.$$

探究

画出函数 $y=\frac{1}{x}$ 的图象. 根据图象，描述它的变化情况，并求出曲线在点 $(1, 1)$ 处的切线方程.

3.2.2 基本初等函数的导数公式及导数的运算法则

为了方便，今后我们可以直接使用下面的基本初等函数的导数公式表.

基本初等函数的导数公式

1. 若 $f(x)=c$，则 $f'(x)=0$；
2. 若 $f(x)=x^{\alpha}(\alpha\in\mathbf{Q}^{*})$，则 $f'(x)=\alpha x^{\alpha-1}$；
3. 若 $f(x)=\sin x$，则 $f'(x)=\cos x$；
4. 若 $f(x)=\cos x$，则 $f'(x)=-\sin x$；
5. 若 $f(x)=a^{x}$，则 $f'(x)=a^{x}\ln a(a>0)$；
6. 若 $f(x)=e^{x}$，则 $f'(x)=e^{x}$；
7. 若 $f(x)=\log_{a}x$，则 $f'(x)=\dfrac{1}{x\ln a}(a>0$，且 $a\neq1)$；
8. 若 $f(x)=\ln x$，则 $f'(x)=\dfrac{1}{x}$.

例 1　假设某国家在 20 年期间的年均通货膨胀率为 5%，物价 p（单位：元）与时间 t（单位：年）有如下函数关系

$$p(t)=p_0(1+5\%)^{t},$$

其中 p_0 为 $t=0$ 时的物价. 假定某种商品的 $p_0=1$，那么在第 10 个年头，这种商品的价格上涨的速度大约是多少（精确到 0.01）？

解： 根据基本初等函数导数公式表，有

$$p'(t)=1.05^{t}\ln 1.05.$$

所以，

$$p'(10)=1.05^{10}\ln 1.05\approx0.08(\text{元/年}).$$

因此，在第 10 个年头，这种商品的价格约以0.08 元/年的速度上涨.

思考？　如果上式中某种商品的 $p_0=5$，那么在第 10 个年头，这种商品的价格上涨的速度大约是多少？

当 $p_0=5$ 时，$p(t)=5\times1.05^{t}$. 这时，求 p 关于 t 的导数可以看成求函数 $f(t)=5$ 与 $g(t)=1.05^{t}$ 乘积的导数. 下面的“导数运算法则”可以帮助我们解决两个函数加、减、乘、除的求导问题.

导数运算法则

1. $[f(x)\pm g(x)]'=f'(x)\pm g'(x)$；
2. $[f(x)\cdot g(x)]'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$；
3. $\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]'=\dfrac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}(g(x)\neq 0)$.

从法则 2 可以得出

$$[cf(x)]'=c'f(x)+c[f(x)]'=cf'(x),$$

也就是说，常数与函数的积的导数，等于常数乘函数的导数，即

$$[cf(x)]'=cf'(x).$$

例 2 根据基本初等函数的导数公式和导数运算法则，求函数 $y=x^3-2x+3$ 的导数.

解：因为 $y'=(x^3-2x+3)'=(x^3)'-(2x)'+(3)'$

$=3x^2-2$,

所以，函数 $y=x^3-2x+3$ 的导数是

$$y'=3x^2-2.$$

例 3 日常生活中的饮用水通常是经过净化的. 随着水纯净度的提高，所需净化费用不断增加. 已知将 1 吨水净化到纯净度为 $x\%$时所需费用（单位：元）为

$$c(x)=\frac{5\ 284}{100-x}\ (80<x<100).$$

求净化到下列纯净度时，所需净化费用的瞬时变化率：

(1) 90%； (2) 98%.

解：净化费用的瞬时变化率就是净化费用函数的导数.

$$\begin{aligned}c'(x)&=\left(\frac{5\ 284}{100-x}\right)'\\&=\frac{(5\ 284)'\times(100-x)-5\ 284\times(100-x)'}{(100-x)^2}\\&=\frac{0\times(100-x)-5\ 284\times(-1)}{(100-x)^2}\\&=\frac{5\ 284}{(100-x)^2}.\end{aligned}$$

(1) 因为 $c'(90)=\dfrac{5\ 284}{(100-90)^2}=52.84$，所以，纯净度为 90%时，净化费用的瞬时变化率是 52.84 元/吨.

(2) 因为 $c'(98)=\dfrac{5\ 284}{(100-98)^2}=1\ 321$，所以，纯净度为 98%时，净化费用的瞬时变

化率是 1 321 元/吨.

函数 $f(x)$在某点处导数的大小表示函数在此点附近变化的快慢. 由上述计算可知，$c'(98)=25c'(90)$. 它表示纯净度为 98%左右时净化费用的变化率，大约是纯净度为 90%左右时净化费用变化率的 25 倍. 这说明，水的纯净度越高，需要的净化费用就越多，而且净化费用增加的速度也越快.

练　习

1. 运用基本初等函数的导数公式与导数运算法则，重新求解 3.1 节例 1. 你是否感觉到运算法则给解题带来的方便简捷?
2. 求下列函数的导数：

(1) $y=\log_2 x$；　　(2) $y=2e^x$；

(3) $y=2x^5-3x^2+5x-4$；　　(4) $y=3\cos x-4\sin x$.

习 题 3.2

A 组

1. 已知圆面积 $S=\pi r^2$，根据导数定义求 $S'(r)$.
2. 利用基本初等函数导数公式表与导数运算法则，求 3.1 节高台跳水运动中运动员的高度关于时间的函数的导数.
3. 求描述气球膨胀状态的函数 $r(V)=\sqrt[3]{\dfrac{3V}{4\pi}}$的导数.
4. 求下列函数的导数：

(1) $y=x^3+\log_2 x$；　　(2) $y=x^n e^x$；　　(3) $y=\dfrac{\cos x}{\sin x}$.

5. 已知函数 $f(x)=13-8x+\sqrt{2}x^2$，且 $f'(x_0)=4$，求 x_0.
6. 已知函数 $y=x\ln x$.

(1) 求这个函数的导数；

(2) 求这个函数的图象在点 $x=1$ 处的切线方程.

7. 求曲线 $y=\dfrac{\sin x}{x}$在点 $M(\pi, 0)$处的切线方程.
8. 氡气是一种由地表自然散发的无味的放射性气体. 如果最初有 500 克氡气，那么 t 天后，氡气的剩余量为 $A(t)=500\times 0.834^t$.

(1) 氡气的散发速度是多少?

(2) $A'(7)$的值是什么（精确到 0.1)? 它表示什么意义?

B 组

1. 设函数 $f(x)=1-e^x$ 的图象与 x 轴相交于点 P，求曲线在点 P 处的切线的方程.

2. 某海湾拥有世界上最大的海潮，其高低水位之差可达到 15 m. 假设在该海湾某一固定点，大海水深 d（单位：m）与午夜后的时间 t（单位：h）的关系由函数 $d(t)=10+4\cos t$ 表示. 求下列时刻潮水的速度（精确到 0.01）：

(1) 上午 6:00；　　(2) 上午 9:00；

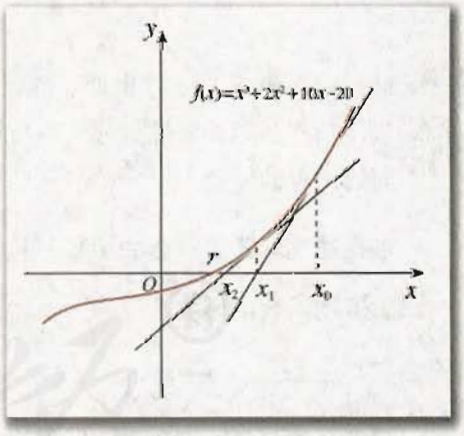
(3) 中午 12:00；　　(4) 下午 6:00.

牛 顿 法——用导数方法求方程的近似解

人们很早以前就开始探索高次方程的数值求解问题. 牛顿（Isaac Newton，1642—1727）在《流数法》一书中，给出了高次代数方程的一种数值解法——牛顿法. 这种求方程根的方法，在科学界已被广泛采用.

下面，我们看看如何求方程 $x^3+2x^2+10x-20=0$ 的根.

从函数的观点看，方程 $x^3+2x^2+10x-20=0$ 的根就是函数 $f(x)=x^3+2x^2+10x-20$ 的零点. 从图形上看，一个函数的零点 r 就是函数 $f(x)$ 的图象与 x 轴的交点的横坐标.



如何求 r 的值呢？

如果可以找到一步一步逼近点 r 的点 x_0，x_1，…，x_n，使得 $|x_n-r|$ 很小很小，那么，我们就可以把 x_n 的值作为 r 的近似值，即把 x_n 作为方程 $f(x)=0$ 的近似解.

牛顿用“作切线”的方法找到了这一串 x_0，x_1，…，x_n. 当然，要有一个起始点❶，比如，我们从 $x_0=4$ 开始.

在点 $x_0=4$ 处作 $f(x)$ 的切线，切线与 x 轴的交点就是 x_1；用 x_1 代替 x_0 重复上面的过程得到 x_2；一直继续下去，得到 x_0，x_1，…，x_n. 从图形上我们可以看到，x_1 较 x_0 接近 r，x_2 较 x_1 接近 r，等等. 它们越来越逼近 r. 接下来的任务是计算 x_n. 我们知道，$f(x)$ 在点 x_0 处切线的斜率是 $f'(x_0)$，因此切线方程为

$$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0).$$

如果 $f'(x_0)\neq 0$，那么，切线与 x 轴的交点是

$$x_1=x_0-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

继续这个过程，就可以推导出如下求方程根的牛顿法公式：

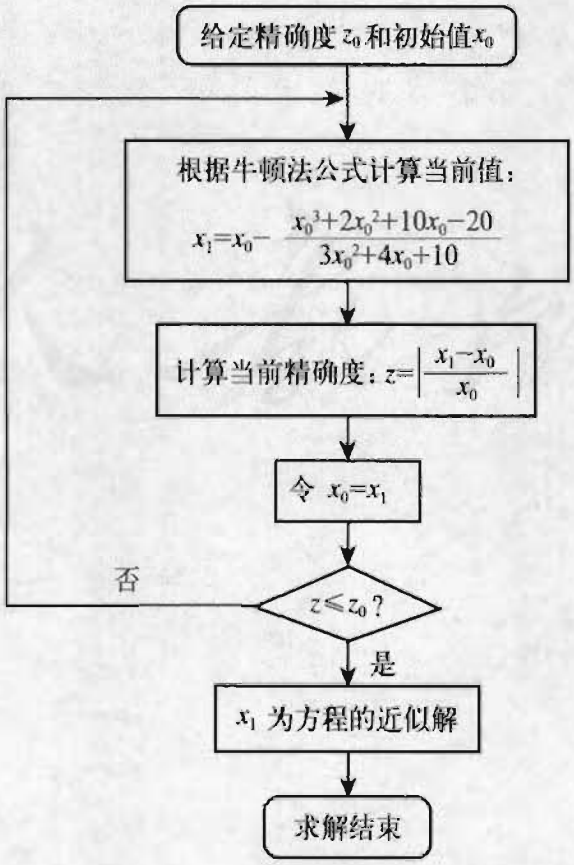
如果 $f'(x_{n-1})\neq 0$，那么

$$x_n=x_{n-1}-\frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}.$$

请同学们自己推导.

对于一个给定的精确度，我们可以根据上述公式，求出方程 $x^3+2x^2+10x-20=0$ 的近似解.

下面，我们给出牛顿法的算法框图. 同学们可以根据它编一个程序，让计算机帮你完成计算任务.



❶ 起始点当然是越接近零点越好，我们可以事先对零点作一个估计. 如果使用信息技术工具，这种估计是比较容易的.

思考?

1. 不同的初始值对求方程的近似解有影响吗？如果有，影响在什么地方？

2. 你还知道其他求方程近似解的方法吗？你认为牛顿法的优点和缺点是什么？