$$a>b \Leftrightarrow a-b>0$$

$$\frac{a+m}{b+m}>\frac{a}{b}$$

$$\frac{a^a b^b}{a^b b^a} \geqslant 1$$

$$\frac{|a+b|}{1+|a+b|} \leqslant \frac{|a|}{1+|a|}+\frac{|b|}{1+|b|}$$

第二讲 证明不等式的基本方法

前面已经学习了一些证明不等式的方法. 我们知道，关于实数的大小关系的基本事实、不等式的基本性质、基本不等式以及绝对值不等式 $|x| \leqslant a$ 和 $|x| \geqslant a$ 的解集的规律等，都可以作为证明不等式的出发点. 本讲中，我们进一步学习证明不等式的基本方法.

一 比较法

要证明 $a>b$，最基本的方法就是证明 $a-b>0$，即把不等式两边相减，转化为比较差与 0 的大小.

例 1 已知 a，b 都是正数，且 $a \neq b$，求证 $a^3+b^3>a^2b+ab^2$.

分析：可以把不等式两边相减，通过适当的恒等变形，转化为一个能够明确确定正负的代数式.

证明：
$$\begin{aligned}(a^3+b^3)-(a^2b+ab^2) &= (a^3-a^2b)-(ab^2-b^3) \\ &= a^2(a-b)-b^2(a-b) \\ &= (a^2-b^2)(a-b) \\ &= (a+b)(a-b)^2.\end{aligned}$$

因为 a，b 都是正数，所以

$$a+b>0.$$

又因为 $a \neq b$，所以

$$(a-b)^2>0.$$

于是

$$(a+b)(a-b)^2>0,$$

即

$$(a^3+b^3)-(a^2b+ab^2)>0.$$

所以

$$a^3+b^3>a^2b+ab^2.$$

例 2 如果用 a kg 白糖制出 b kg 糖溶液，则糖的质量分数为 $\frac{a}{b}$. 若在上述溶液中再添

加m kg白糖，此时糖的质量分数增加到$\frac{a+m}{b+m}$. 将这个事实抽象为数学问题，并给出证明.

分析：显然，a，b，m 都是正数，而且 $a<b$. 生活经验告诉我们，在已有的糖溶液中加糖，糖的质量分数增大.

解：可以把上述事实抽象成如下不等式问题：

已知 a，b，m 都是正数，并且 $a<b$，则

$$\frac{a+m}{b+m}>\frac{a}{b}.$$

下面给出证明.

将不等式两边相减，得

$$\frac{a+m}{b+m}-\frac{a}{b}=\frac{m(b-a)}{b(b+m)}.$$

因为 $a<b$，所以 $b-a>0$；又因为 a，b，m 都是正数，所以 $m(b-a)>0$，$b(b+m)>0$. 所以

$$\frac{m(b-a)}{b(b+m)}>0,$$

即

$$\frac{a+m}{b+m}-\frac{a}{b}>0.$$

所以

$$\frac{a+m}{b+m}>\frac{a}{b}.$$

除了把不等式两边相减，通过比较差与 0 的大小来证明不等式外，有时也通过把不等式两边相除，转化为考察所得的商式与 1 的大小关系.

例 3 已知 a，b 是正数，求证 $a^ab^b\geqslant a^bb^a$，当且仅当 $a=b$ 时，等号成立.

分析：由于 a，b 是正数，所以不等式的两边都是正数. 由于要证的不等式两边都是指数的形式，把它们相除并考察商式与 1 的大小关系比较方便.

证明：将不等式两边相除，得

$$\frac{a^ab^b}{a^bb^a}=a^{a-b}\cdot b^{b-a}=\left(\frac{a}{b}\right)^{a-b}.$$

根据要证的不等式的特点（交换 a，b 的位置，不等式不变），不妨设 $a\geqslant b>0$，于是

$$\frac{a}{b}\geqslant 1,\ a-b\geqslant 0.$$

所以

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{a-b}\geqslant 1,$$

当且仅当 $a=b$ 时，等号成立. 所以

$$a^ab^b\geqslant a^bb^a,$$