

当且仅当 $a=b$ 时, 等号成立.



- 习题2.1
1. 已知 $a>b$, 求证 $a^3-b^3>ab(a-b)$.
 2. 已知 $ad\neq bc$, 求证 $(a^2+b^2)(c^2+d^2)>(ac+bd)^2$.
 3. 已知 $a\neq b$, 求证 $a^4+6a^2b^2+b^4>4ab(a^2+b^2)$.
 4. 已知 a, b, c 是正数, 求证 $a^{2a}b^{2b}c^{2c}\geq a^{b+c}b^{c+a}c^{a+b}$.

二 综合法与分析法

在不等式的证明中, 我们经常从已知条件、不等式的性质和基本不等式等出发, 通过逻辑推理, 推导出所要证明的结论.

例1 已知 $a, b, c>0$, 且不全相等, 求证

$$a(b^2+c^2)+b(c^2+a^2)+c(a^2+b^2)>6abc.$$

分析: 观察欲证不等式的特点, 左边三项每一项都是两个数的平方和与另一个数的乘积, 右边是三个数的乘积的 6 倍. 这种结构特点启发我们采用如下方法.

证明: 因为 $b^2+c^2\geq 2bc$, $a>0$, 所以

$$a(b^2+c^2)\geq 2abc. \quad ①$$

因为 $c^2+a^2\geq 2ac$, $b>0$, 所以

$$b(c^2+a^2)\geq 2abc. \quad ②$$

因为 $a^2+b^2\geq 2ab$, $c>0$, 所以

$$c(a^2+b^2)\geq 2abc. \quad ③$$

由于 a, b, c 不全相等, 所以上述①②③式中至少有一个不取等号, 把它们相加得

$$a(b^2+c^2)+b(c^2+a^2)+c(a^2+b^2)>6abc.$$

一般地, 从已知条件出发, 利用定义、公理、定理、性质等, 经过一系列的推理、论证而得出命题成立, 这种证明方法叫做综合法 (synthetical method). 综合法又叫顺推证法或由因导果法.

例2 已知 $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbf{R}_+$, 且 $a_1a_2\cdots a_n=1$, 求证

$$(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)\geq 2^n.$$

分析: 观察要证明的结论, 左边是 n 个因式的乘积, 右边是 2 的 n 次方, 再结合 $a_1a_2\cdots a_n=1$, 发现如果能将左边转化为 a_1, a_2, \dots, a_n 的乘积, 问题就能得到解决.

证明: 因为 $a_1 \in \mathbf{R}_+$, 所以 $\frac{1+a_1}{2} \geq \sqrt{1 \cdot a_1} = \sqrt{a_1}$, 即

$$1+a_1 \geq 2\sqrt{a_1}.$$

同理,

$$1+a_2 \geq 2\sqrt{a_2},$$

.....

$$1+a_n \geq 2\sqrt{a_n}.$$

本例的结论是在条件 $a_1 a_2 \cdots a_n = 1$ 下得出的, 我们称它为条件不等式. 在证明条件不等式时, 命题中的条件能启发我们的证明思路.

因为 $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbf{R}_+$, 由不等式的性质, 得

$$(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n) \geq 2^n \sqrt{a_1 a_2 \cdots a_n} = 2^n.$$

因为 $a_i=1$ 时, $1+a_i \geq 2\sqrt{a_i}$ 取等号, 所以原式在 $a_1=a_2=\cdots=a_n=1$ 时取等号.

证明命题时, 我们还常常从要证的结论出发, 逐步寻求使它成立的充分条件, 直至所需条件为已知条件或一个明显成立的事实(定义、公理或已证明的定理、性质等), 从而得出要证的命题成立, 这种证明方法叫做分析法(analytical method). 这是一种执果索因的思考和证明方法.

例3 求证 $\sqrt{2}+\sqrt{7} < \sqrt{3}+\sqrt{6}$.

分析: 从不等式的结构不易发现需要用不等式的哪些性质或事实解决这个问题, 因此用分析法.

证明: 因为 $\sqrt{2}+\sqrt{7}$ 和 $\sqrt{3}+\sqrt{6}$ 都是正数, 所以要证

$$\sqrt{2}+\sqrt{7} < \sqrt{3}+\sqrt{6},$$

只需证

$$(\sqrt{2}+\sqrt{7})^2 < (\sqrt{3}+\sqrt{6})^2.$$

展开得

$$9+2\sqrt{14} < 9+2\sqrt{18},$$

只需证

$$\sqrt{14} < \sqrt{18},$$

只需证

$$14 < 18.$$

因为 $14 < 18$ 成立, 所以 $\sqrt{2}+\sqrt{7} < \sqrt{3}+\sqrt{6}$ 成立.

从上述证明过程可以发现, 如果从 $14 < 18$ 出发逐步倒推, 即

$$\begin{aligned} 14 < 18 &\Rightarrow \sqrt{14} < \sqrt{18} \Rightarrow 9+2\sqrt{14} < 9+2\sqrt{18} \\ &\Rightarrow (\sqrt{2}+\sqrt{7})^2 < (\sqrt{3}+\sqrt{6})^2 \Rightarrow \sqrt{2}+\sqrt{7} < \sqrt{3}+\sqrt{6}, \end{aligned}$$

也能得出结论, 这实际上就是综合法证明. 因此, 综合过程正好与分析过程相反. 只是如果没有分析过程, 我们很难想到要以 $14 < 18$ 作为证明的出发点.

当问题比较复杂时, 通常把分析法和综合法结合起来使用. 以分析法寻找证明的思路,

而用综合法叙述、表达整个证明过程.

例4 已知 $a, b, c > 0$, 求证

$$\frac{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}{a+b+c} \geq abc.$$

分析: 要证的不等式可以化为

$$a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2 \geq abc(a+b+c),$$

即

$$a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2 \geq a^2bc+b^2ac+c^2ab.$$

观察上式, 左边各项是两个字母的平方之积, 右边各项涉及三个字母, 可以考虑用 $x^2(y^2+z^2) \geq 2x^2yz$.

证明: 因为 $b^2+c^2 \geq 2bc$, $a^2 > 0$, 所以

$$a^2(b^2+c^2) \geq 2a^2bc. \quad ①$$

因为 $c^2+a^2 \geq 2ac$, $b^2 > 0$, 所以

$$b^2(c^2+a^2) \geq 2b^2ac. \quad ②$$

因为 $a^2+b^2 \geq 2ab$, $c^2 > 0$, 所以

$$c^2(a^2+b^2) \geq 2c^2ab. \quad ③$$

①②③相加得

$$2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2) \geq 2a^2bc+2b^2ac+2c^2ab,$$

从而

$$a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2 \geq abc(a+b+c).$$

由 $a, b, c > 0$, 得 $a+b+c > 0$, 于是 $\frac{1}{a+b+c} > 0$. 由不等式的基本性质, 得

$$\frac{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}{a+b+c} \geq abc.$$

在思考数学命题时, 执果索因和由因导果总是不断交替地出现在思维过程中. 有些问题一时难以看出综合推理的出发点, 我们可以从要证的结论入手, 去逐步地推求使之成立所需的条件, 这就是用分析法证明的理由. 但必须注意, 推演过程中的每一步都是寻求相应结论成立的充分条件, 这时又需以综合推理来考虑如何得到使这一步成立的条件. 这样反复推演直到找出起始条件, 就完成了证明的思考过程.



1. 求证 $a^2+b^2+5 \geq 2(2a-b)$.
2. 已知 $a, b, c \in \mathbb{R}_+$, 用综合法证明:
 - (1) $(ab+a+b+1)(ab+ac+bc+c^2) \geq 16abc$;
 - (2) $2(a^3+b^3+c^3) \geq a^2(b+c)+b^2(a+c)+c^2(a+b)$.