2020年秋季高一开学分班考试（三）

一、单选题（共8小题，满分40分，每小题5分）

1、已知集合$A=\{x\mid x-a\leqslant 0\}$，若$2\in A$，则$a$的取值范围为（　　）

A．$(-\infty,-2]$　　B．$(-\infty,2]$　　C．$[2,+\infty)$　　D．$[-2,+\infty)$

【答案】C

【解析】因为集合$A=\{x\mid x-a\leqslant 0\}$，所以$A=\{x\mid x\leqslant a\}$，

又因为$2\in A$，则$a\geqslant 2$，即$a\in[2,+\infty)$，故选：C．

2、函数$f(x)=\sqrt{2x-1}+\dfrac{1}{x-2}$的定义域为（　　）

A．$[0,2)$　　B．$(2,+\infty)$

C．$\left[\dfrac{1}{2},2\right)\cup(2,+\infty)$　　D．$(-\infty,2)\cup(2,+\infty)$

【答案】C

【解析】由$\begin{cases}2x-1\geq 0\\ x-2\neq 0\end{cases}$，解得$x\geq\dfrac{1}{2}$且$x\neq 2$．

∴函数$f(x)=\sqrt{2x-1}+\dfrac{1}{x-2}$的定义域为$\left[\dfrac{1}{2},2\right)\cup(2,+\infty)$．故选：$C$．

3、下列命题正确的是（　　）

A．若$a>b$，则$\dfrac{1}{a}<\dfrac{1}{b}$　　B．若$a>b$，则$a^2>b^2$

C．若$a>b$，$c<d$，则$a-c>b-d$　　D．若$a>b$，$c>d$，则$ac>bd$

【答案】C

【解析】A.若$a>b$，则$\dfrac{1}{a}<\dfrac{1}{b}$，取$a=1,b=-1$　不成立

B.若$a>b$，则$a^2>b^2$，取$a=0,b=-1$　不成立

C. 若$a>b$，$c<d$，则$a-c>b-d$，正确

D. 若$a>b$，$c>d$，则$ac>bd$，取$a=1,b=-1,c=1,d=-2$　不成立，故答案选C

4、已知函数 $f(x)=\begin{cases}2x,0\le x\le 1,\\ 2,1<x<2,\\ \frac{1}{2},x\ge 2,\end{cases}$，则 $f\left\{f[f(\frac{3}{2})]\right\}$ 的值为（　　）

A．1　　B．2　　C．-3　　D．$\frac{1}{2}$

【答案】A

【解析】由题意得，$f(\frac{3}{2})=2$，$f(2)=\frac{1}{2}$，$f(\frac{1}{2})=2\times\frac{1}{2}=1$，

所以 $f\left\{f[f(\frac{3}{2})]\right\}=f[f(2)]=f(\frac{1}{2})=1$，故选：A.

5、已知 $x>2$，函数 $y=\frac{4}{x-2}+x$ 的最小值是（ ）

A．5　　B．4　　C．8　　D．6

【答案】D

【解析】因为该函数的单调性较难求，所以可以考虑用不等式来求最小值，

$y=\frac{4}{x-2}+x=\frac{4}{x-2}+(x-2)+2$，因为 $x>2\Rightarrow x-2>0$，由重要不等式可知 $\frac{4}{x-2}+(x-2)\ge 4$，所以 $y\ge 6$，本题正确选项为 D.

6、下列函数既是偶函数，又在 $(-\infty,0)$ 上单调递减的是（　　）

A．$y=2^{|x|}$　　B．$y=x^{-\frac{2}{3}}$　　C．$y=\frac{1}{x}-x$　　D．$y=\ln\left(x^2+1\right)$

【答案】A

【解析】对于 A 选项，$y=2^{|x|}$ 为偶函数，且当 $x<0$ 时，$y=2^{-x}=\frac{1}{2^x}$ 为减函数，符合题意.

对于 B 选项，$y=x^{-\frac{2}{3}}$ 为偶函数，根据幂函数单调性可知 $y=x^{-\frac{2}{3}}$ 在 $(-\infty,0)$ 上递增，不符合题意.

对于 C 选项，$y=\frac{1}{x}-x$ 为奇函数，不符合题意.

对于 D 选项，$y=\ln\left(x^2+1\right)$ 为偶函数，根据复合函数单调性同增异减可知，$y=\ln\left(x^2+1\right)$ 在区间 $(-\infty,0)$ 上单调递减，符合题意.故选：A

7、若正数 x,y 满足 $x^2+xy-2=0$，则 $3x+y$ 的最小值是（　　）

A．4　　B．$2\sqrt{2}$　　C．2　　D．$4\sqrt{2}$

【答案】A

【解析】因为正数 x,y 满足 $x^2+xy-2=0$，所以 $y=\frac{2}{x}-x$，

所以 $3x+y=2x+\frac{2}{x}\geq 2\sqrt{2x\cdot\frac{2}{x}}=4$，当且仅当 $2x=\frac{2}{x}$，即 $x=1$ 时，等号成立.

故选：A

8、函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 单调递减，且为奇函数.若 $f(1)=-1$，则满足 $-1\leq f(x-2)\leq 1$ 的 x 取值范围是（　　）

A．$[-2,2]$　　B．$[-1,1]$　　C．$[0,4]$　　D．$[1,3]$

【答案】D

【解析】$\because f(x)$ 为奇函数，$\therefore f(-x)=-f(x)$.

$\because f(1)=-1$，$\therefore f(-1)=-f(1)=1$.

故由 $-1\leq f(x-2)\leq 1$，得 $f(1)\leq f(x-2)\leq f(-1)$.

又 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 单调递减，$\therefore -1\leq x-2\leq 1$，$\therefore 1\leq x\leq 3$.故选：D

二、多选题（共 4 小题，满分 200 分，每小题 5 分）

9、下列各式既符合分数指数幂的定义,值又相等的是(　　)

A．$(-1)^{\frac{1}{3}}$ 和 $(-1)^{\frac{2}{6}}$　　B．0^{-2} 和 $0^{\frac{1}{2}}$　　C．$2^{\frac{1}{2}}$ 和 $4^{\frac{1}{4}}$

D．$4^{-\frac{3}{2}}$ 和 $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$　　E. $3^{\frac{4}{3}}$ 和 $\frac{1}{3^{-\frac{4}{3}}}$

【答案】CE

【解析】A 不符合题意，$(-1)^{\frac{1}{3}}$ 和 $(-1)^{\frac{2}{6}}$ 均符合分数指数幂的定义，但 $(-1)^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{-1}=-1$，$(-1)^{\frac{2}{6}}=\sqrt[6]{(-1)^2}=1$；

B 不符合题意，0 的负分数指数幂没有意义；

C 符合题意，$4^{\frac{1}{4}}=\sqrt[4]{2^2}=2^{\frac{1}{2}}$；

D 不符合题意，$4^{-\frac{3}{2}}$ 和 $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$ 均符合分数指数幂的定义，但 $4^{-\frac{3}{2}}=\frac{1}{4^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{8}$，$\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}=2^3=8$；

E 符合题意，$\frac{1}{3^{-\frac{4}{3}}}=3^{\frac{4}{3}}$.故选：CE.

10、对任意实数a，b，c，给出下列命题，其中真命题是（　　）

A．“$a=b$”是“$ac=bc$”的充要条件　　B．“$a>b$”是“$a^2>b^2$”的充分条件

C．“$a<5$”是“$a<3$”的必要条件　　D．“$a+5$是无理数”是“a是无理数”的充要条件

【答案】CD

【解析】对于A，因为“$a=b$”时$ac=bc$成立，$ac=bc$，$c=0$时，$a=b$不一定成立，所以“$a=b$”是“$ac=bc$”的充分不必要条件，故A错，对于B，$a=-1$，$b=-2$，$a>b$时，$a^2<b^2$；$a=-2$，$b=1$，$a^2>b^2$时，$a<b$，所以“$a>b$”是“$a^2>b^2$”的既不充分也不必要条件，故B错，对于C，因为“$a<3$”时一定有“$a<5$”成立，所以“$a<5$”是“$a<3$”的必要条件，C正确；对于D“$a+5$是无理数”是“a是无理数”的充要条件，D正确.故选：CD

11、下面命题正确的是（　　）

A．“$a>1$”是“$\frac{1}{a}<1$”的充分不必要条件

B．命题“若$x<1$,则$x^2<1$”的否定是“ 存在$x<1$,则$x^2\geq 1$”.

C．设$x,y\in R$,则“$x\geq 2$且$y\geq 2$”是“$x^2+y^2\geq 4$”的必要而不充分条件

D．设$a,b\in \mathbf{R}$,则“$a\neq 0$”是“$ab\neq 0$”的必要不充分条件

【答案】ABD

【解析】选项A:根据反比例函数的性质可知：由$a>1$,能推出$\frac{1}{a}<1$,但是由$\frac{1}{a}<1$,不能推出$a>1$,例如当$a<0$时,符合$\frac{1}{a}<1$,但是不符合$a>1$,所以本选项是正确的；

选项B: 根据命题的否定的定义可知：命题“若$x<1$,则$x^2<1$”的 否 定 是“ 存 在$x<1$,则$x^2\geq 1$”.所以本选项是正确的；

选项C:根据不等式的性质可知：由$x\geq 2$且$y\geq 2$能推出$x^2+y^2\geq 4$,本选项是不正确的；

选项D: 因为b可以等于零,所以由$a\neq 0$不能推出$ab\neq 0$,再判断由$ab\neq 0$能不能推出$a\neq 0$,最后判断本选项是否正确.故选：ABD

12、已知函数$f\left(x\right)=\lg\left(x^2+ax-a-1\right)$，给出下述论述，其中正确的是（　　）

A．当$a=0$时，$f\left(x\right)$的定义域为$\left(-\infty,-1\right)\cup\left(1,+\infty\right)$

B．$f\left(x\right)$一定有最小值；

C．当$a=0$时，$f\left(x\right)$的值域为R；

D．若 $f(x)$ 在区间 $[2,+\infty)$ 上单调递增，则实数 a 的取值范围是 $\{a \mid a \geq -4\}$

【答案】AC

【解析】对 *A*,当 $a=0$ 时,解 $x^2-1>0$ 有 $x \in (-\infty,-1) \cup (1,+\infty)$,故 *A* 正确

对 *B*,当 $a=0$ 时, $f(x)=\lg(x^2-1)$,此时 $x \in (-\infty,-1) \cup (1,+\infty)$, $x^2-1 \in (0,+\infty)$,

此时 $f(x)=\lg(x^2-1)$ 值域为 R,故 *B* 错误.

对 *C*,同 *B*,故 *C* 正确.

对 *D*, 若 $f(x)$ 在区间 $[2,+\infty)$ 上单调递增,此时 $y=x^2+ax-a-1$ 对称轴 $x=-\dfrac{a}{2} \leq 2$.

解得 $a \geq -4$.但当 $a=-4$ 时 $f(x)=\lg(x^2-4x+3)$ 在 $x=2$ 处无定义,故 *D* 错误.

故选 *AC*

三、填空题（共 4 小题，满分 20 分，每小题 5 分，一题两空，第一空 2 分）

13、正实数 x,y 满足：$2x+y=1$，则 $\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{y}$ 的最小值为_____.

【答案】9

【解析】$\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{y}=\left(\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{y}\right)(2x+y)=5+\dfrac{2y}{x}+\dfrac{2x}{y} \geq 5+2\sqrt{\dfrac{2y}{x}\cdot\dfrac{2x}{y}} \geq 5+2\sqrt{4}=9$,

当且仅当 $x=y=\dfrac{1}{3}$ 时取等号．故答案为：9.

14、若幂函数图像过点 $(8,4)$，则此函数的解析式是 $y=$ _____.

【答案】 $x^{\frac{2}{3}}$

【解析】设幂函数的解析式为 $y=x^{\alpha}$，

由于函数图象过点 $(8,4)$，故有 $4=8^{\alpha}$，解得 $\alpha=\dfrac{2}{3}$，

所以该函数的解析式是 $y=x^{\frac{2}{3}}$，故答案为： $x^{\frac{2}{3}}$.

15、函数 $f(x)=\dfrac{x^2+4x+3}{x-6}$ 的值域为_____.

【答案】 $\left(-\infty,16-6\sqrt{7}\right] \cup \left[16+6\sqrt{7},+\infty\right)$

【解析】设$x-6=t,x=t+6,g(t)=\dfrac{t^2+16t+63}{t}=t+\dfrac{63}{t}+16$，

当$t>0$时，$g(t)\geq 6\sqrt{7}+16$，

当且仅当$t=3\sqrt{7},x=3\sqrt{7}+6$时等号成立；

同理当$t<0$时，$g(t)\leq -6\sqrt{7}+16$，

当且仅当$t=-3\sqrt{7},x=-3\sqrt{7}+6$时等号成立；

所以函数的值域为$\left(-\infty,16-6\sqrt{7}\right]\cup\left[16+6\sqrt{7},+\infty\right)$.

故答案为: $\left(-\infty,16-6\sqrt{7}\right]\cup\left[16+6\sqrt{7},+\infty\right)$.

16、已知函数$f\left(x\right)=\begin{cases}\left(1-2a\right)x+3a & x<1\\ 2^{x-1} & x\geq 1\end{cases}$的值域为$R$，则实数$a$的取值范围是_____.

【答案】$\left[0,\dfrac{1}{2}\right)$

【解析】当$x\geq 1$时,$f\left(x\right)=2^{x-1}$,此时值域为$\left[1,+\infty\right)$

若值域为R,则当$x<1$时.$f\left(x\right)=\left(1-2a\right)x+3a$为单调递增函数,且最大值需大于等于 1，即

$\begin{cases}1-2a>0\\ 1-2a+3a\geq 1\end{cases}$,解得$0\leq a<\dfrac{1}{2}$，故答案为:$\left[0,\dfrac{1}{2}\right)$

四、解答题（共 6 小题，满分 70 分，第 17 题 10 分，其它 12 分）

17、已知集合 A＝{x|2a≤x≤a＋3}，B＝{x|x^2＋x－6≤0}．若 A∪B＝B，求实数 a 的取值范围．

【解析】 B＝{x|x^2＋x－6≤0}

＝{x|(x＋3)(x－2)≤0}

＝{x|－3≤x≤2}

＝[－3，2].

因为 A∪B＝B，所以 A⊆B.

①当 A＝∅时，2a>a＋3，

解得 a>3；

②当 A≠∅，即 a≤3 时，

因为 A＝[2a，a＋3]，

所以$\begin{cases}2a\geq-3,\\a+3\leq2,\end{cases}$

解得$-\frac{3}{2}\leq a\leq-1$，

综上，实数 a 的取值范围为$\left[-\frac{3}{2},\ -1\right]\cup(3,\ +\infty)$.

18、已知$A=\left\{x\,|\,x^2-3ax+2a^2>0,a>0\right\}$，

$B=\left\{x\,|\,x^2-x-6\geq0\right\}$,若$x\in A$是$x\in B$的必要不充分条件,求实数$a$的取值范围.

【解析】解出$B=\left\{x\,|\,x\leq-2或x\geq3\right\}$，$A=\left\{x\,|\,x<a或x>2a，\ a>0\right\}$

因为$x\in A$是$x\in B$的必要不充分条件，所以 B 是 A 的真子集.

所以$\begin{cases}a>-2\\2a<3\end{cases}\Rightarrow0<a<\frac{3}{2}$
$\quad\ \ a>0$

故答案为：$0<a<\frac{3}{2}$

19、化简下列各式：

(1) $\left(\lg\frac{1}{4}-\lg25\right)\div100^{-\frac{1}{2}}$；

(2) $\log_225\cdot\log_34\cdot\log_59$；

(3) $\frac{1}{2}\lg\frac{32}{49}-\frac{4}{3}\lg\sqrt{8}+\lg\sqrt{245}$.

【解析】 (1) 原式＝$\lg\frac{1}{100}\times10=-2\times10=-20$.

(2) 原式＝$\frac{\lg25}{\lg2}\times\frac{\lg4}{\lg3}\times\frac{\lg9}{\lg5}=\frac{2\lg5}{\lg2}\times\frac{2\lg2}{\lg3}\times\frac{2\lg3}{\lg5}=8$.

(3) 原式＝$\lg\frac{4\sqrt{2}}{7}-\lg4+\lg7\sqrt{5}=\lg\left(\frac{4\sqrt{2}}{7}\times\frac{1}{4}\times7\sqrt{5}\right)=\frac{1}{2}$.

20、判断下列函数的奇偶性：

(1) f(x)＝$x\lg(x+\sqrt{x^2+1})$；

(2) f(x)＝$(1-x)\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$；

(3) f(x)＝$\begin{cases}-x^2+2x+1,&x>0,\\x^2+2x-1,&x<0;\end{cases}$

(4) f(x)＝$\frac{\sqrt{4-x^2}}{|x+3|-3}$.

【解析】 (1) 因为 $x+\sqrt{x^2+1}>0$ 恒成立，

所以函数 f(x)的定义域为 **R**，关于原点对称，

所以 $f(x)-f(-x)=x[\lg(x+\sqrt{x^2+1})+\lg(-x+\sqrt{x^2+1})]=0$，

所以 $f(x)=f(-x)$，所以 f(x)为偶函数.

(2) 由题意得，$\begin{cases}\frac{1+x}{1-x}\geq 0,\\ 1-x\neq 0,\end{cases}$ 解得 $-1\leq x<1$，

所以定义域不关于原点对称，

所以 f(x)为非奇非偶函数.

(3) f(x)定义域为$(-\infty，0)\cup(0，+\infty)$关于原点对称.

不妨设 $x>0$，

所以 $f(x)+f(-x)=-x^2+2x+1+x^2-2x-1=0$，

所以 $f(x)=-f(-x)$，所以 f(x)为奇函数.

(4) 由题意得，$\begin{cases}4-x^2\geq 0,\\ |x+3|\neq 3,\end{cases}$ 解得 $x\in[-2，0)\cup(0，2]$关于原点对称，

所以 $f(x)+f(-x)=\frac{\sqrt{4-x^2}}{x}-\frac{\sqrt{4-x^2}}{x}=0$，

所以 $f(x)=-f(-x)$，

所以 f(x)为奇函数.

21、已知函数 $f\left(x\right)=\log_a\frac{x-b}{x+b}\ \ \left(a>0,a\neq 0,b\neq 0\right)$.

（1）求函数 $f\left(x\right)$ 的定义域；

（2）判断函数 $f\left(x\right)$ 的奇偶性，并说明理由；

【解析】(1)由 $\frac{x-b}{x+b}>0$，化为：$\left(x-b\right)\left(x+b\right)>0$.

当 $b>0$ 时，解得 $x>b$ 或 $x<-b$；$b<0$ 时，解得 $x>-b$ 或 $x<b$.

∴函数 $f\left(x\right)$ 的定义域为：$b>0$ 时，$x\in(-\infty,-b)\bigcup(b,+\infty)$，$b<0$ 时，$x\in(-\infty,b)\bigcup(-b,+\infty)$.

(2)∵定义域关于原点对称，

$f(-x)=log_a\frac{-x-b}{-x+b}=-\log_a\frac{x-b}{x+b}=-f(x)$，

∴函数 $f\left(x\right)$ 为奇函数.

22、已知奇函数 $f(x)=\dfrac{a\cdot 2^x-1}{2^x+1}$ 的定义域为 $[-a-2,3b]$.

(1)求实数 a ,b 的值;

(2)若 $x\in[-a-2,3b]$,方程 $[f(x)]^2+f(x)-m=0$ 有解,求 m 的取值范围.

【解析】（1）因为奇函数定义域关于原点对称，所以 $-a-2+3b=0$.

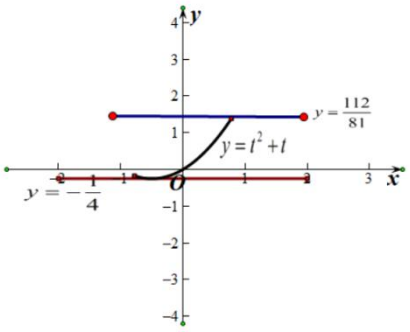
又根据定义在 $x=0$ 有定义，所以 $f(0)=\dfrac{a\cdot 2^0-1}{2^0+1}=0$，解得 $a=1$，$b=1$.

（2）$x\in[-3,3]$，令 $f(x)=\dfrac{2^x-1}{2^x+1}=t$，$\left(-\dfrac{7}{9}\le t\le\dfrac{7}{9}\right)$

则方程 $[f(x)]^2+f(x)-m=0$ 有解等价于 $t^2+t-m=0$ $\left(-\dfrac{7}{9}\le t\le\dfrac{7}{9}\right)$ 有解

也等价于 $y=t^2+t$ $\left(-\dfrac{7}{9}\le t\le\dfrac{7}{9}\right)$ 与 $y=m$ 有交点.

画出图形根据图形判断：



由图可知：$-\dfrac{1}{4}\le m\le\dfrac{112}{81}$ 时有交点，即方程 $[f(x)]^2+f(x)-m=0$ 有解.