2020年秋季高三开学摸底考试（二）

一、单选题（共8小题，满分40分，每小题5分）

1、（2020届山东省德州市高三上期末）已知复数z满足$z=-1+\sqrt{3}i$（其中i为虚数单位），则$\frac{\overline{z}}{|z|}=$（　　）

A．$-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$　　B．$-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$　　C．$\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$　　D．$\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$

【答案】B

【解析】

$\because z=-1+\sqrt{3}i$，$\therefore|z|=\sqrt{(-1)^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}=2$，因此，$\frac{\overline{z}}{|z|}=\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$.

故选：B.

2、（2020届山东省滨州市三校高三上学期联考）设α，β为两个平面，则$\alpha/\!/\beta$的充要条件是（　　）

A．α内有无数条直线与β平行　　B．α，β平行与同一个平面

C．α内有两条相交直线与β内两条相交直线平行D．α，β垂直与同一个平面

【答案】C

【解析】

对于A，α内有无数条直线与β平行，可得α与β相交或α或β平行；

对于B，α，β平行于同一条直线，可得α与β相交或α或β平行；

对于C，α内有两条相交直线与β内两条相交直线平行，可得α∥β；

对于 D，α，β 垂直与同一个平面，可得 α 与 β 相交或 α 或 β 平行.

故选：C.

3、(北京市北大附中高三期末)某学校开设 A 类选修课 3 门，B 类选修课 4 门，一位同学从中共选 3 门，若要求两类课程各至少选一门，则不同的选法共有（　　）.

A．30 种　　B．31 种　　C．35 种　　D．60 种

【答案】A

【解析】

由题意，7 门课程选 3 门有 C_7^3 种方法，

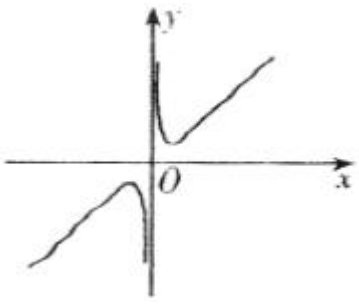
若选择的课程均为 A 课程，有 C_3^3 种方法，

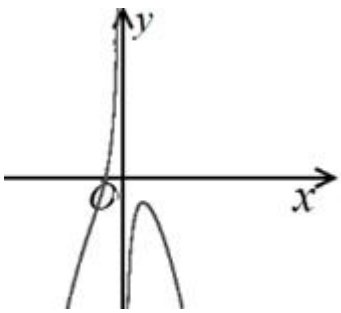
选择的课程均为 B 课程，有 C_4^3 种方法，

满足题意的选择方法有：$C_7^3-C_3^3-C_4^3=35-1-4=30$ 种.

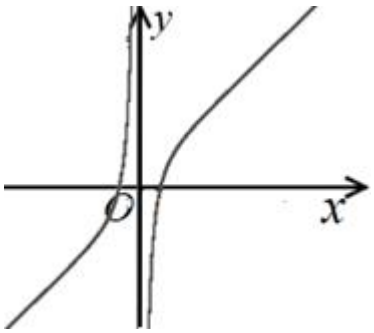
本题选择 A 选项.

4、（2020 届山东省潍坊市高三上期中）函数 $f(x)=x-\dfrac{\ln|x|}{x}$ 的大致图象为（　　）

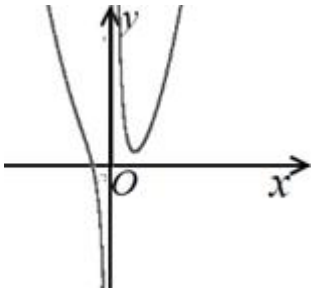
A．

B．

C.



D.



【答案】A

【解析】

函数的定义域为$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，

$f(-x)=-x-\dfrac{ln|-x|}{-x}=-(x-\dfrac{ln|x|}{x})=-f(x)$，则函数$f(x)$是奇函数，图象关于原点对称，排除$B$，$D$，

当$x>0$且$x\to 0$，$f(x)\to+\infty$，排除C.

故选：A.

5、（2020届山东省德州市高三上期末）已知向量$\vec{a}$，$\vec{b}$满足$|\vec{a}|=1$，$|\vec{b}|=2$，$(\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{a}+3\vec{b})=-13$，则$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角为（　　）

A. $\dfrac{\pi}{6}$　　B. $\dfrac{\pi}{3}$　　C. $\dfrac{2\pi}{3}$　　D. $\dfrac{5\pi}{6}$

【答案】C

【解析】

$\because(\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{a}+3\vec{b})=\vec{a}^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}-3\vec{b}^2=-13$，即$2\vec{a}\cdot\vec{b}-11=-13$，得$\vec{a}\cdot\vec{b}=-1$，

则$\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}=-\dfrac{1}{2}$，Q $0\le\theta\le\pi$，$\therefore\theta=\dfrac{2\pi}{3}$.

故选：C.

6、（2020 届山东省滨州市三校高三上学期联考）若 $\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)=\frac{1}{4}$，则 $\cos\left(\frac{\pi}{3}+2\alpha\right)=$（　　）.

A. $-\frac{7}{8}$　　B. $-\frac{1}{4}$　　C. $\frac{1}{4}$　　D. $\frac{7}{8}$

【答案】A

【解析】

$$\cos\left(\frac{\pi}{3}+2\alpha\right)=\cos\left[\pi-\left(\frac{2\pi}{3}-2\alpha\right)\right]=-\cos\left(\frac{2\pi}{3}-2\alpha\right)=-\cos 2\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)=2\sin^2\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)-1$$

$$=2\times\frac{1}{16}-1=-\frac{7}{8}.$$

故选 A .

7、（2020 届山东省泰安市高三上期末）若 $\log_3(2a+b)=1+\log_{\sqrt{3}}\sqrt{ab}$，则 $a+2b$ 的最小值为（　　）

A. 6　　B. $\frac{8}{3}$　　C. 3　　D. $\frac{16}{3}$

【答案】C

【解析】

$\because \log_3(2a+b)=1+\log_{\sqrt{3}}\sqrt{ab}$，

$\therefore \log_3(2a+b)=1+\log_3 ab=\log_3(3ab)$，

$\therefore 2a+b=3ab$，且 $a>0$，$b>0$，

$\therefore \frac{1}{a}+\frac{2}{b}=3$，

$$\therefore a+2b=\frac{1}{3}(a+2b)\left(\frac{1}{a}+\frac{2}{b}\right)=\frac{1}{3}\left(1+\frac{2b}{a}+\frac{2a}{b}+4\right)=\frac{5}{3}+\frac{2}{3}\left(\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right)$$

$\geq \frac{5}{3}+\frac{2}{3}\cdot 2\sqrt{\frac{b}{a}\cdot\frac{a}{b}}=3$，

当且仅当$\frac{b}{a}=\frac{a}{b}$且$\frac{1}{a}+\frac{2}{b}=3$即$a=b=1$时，等号成立；

故选：C.

8、（2020 届山东师范大学附中高三月考）已知$f(x)=\frac{1}{2}x^2-a\ln x$在区间$(0,2)$上有极值点，实数 a 的取值范围是（　　）

A．$(0,2)$　　B．$(-2,0)\cup(0,2)$　　C．$(0,4)$　　D．$(-4,0)\cup(0,4)$

【答案】C

【解析】

$f'(x)=x-\frac{a}{x}=\frac{x^2-a}{x}$,由于函数$f(x)$在$(0,2)$上有极值点，所以$f'(x)$在$(0,2)$上有零点.所以$\begin{cases}a>0\\ \sqrt{a}<2\end{cases}$，

解得$a\in(0,4)$.

故选：D.

二、多选题（共 4 小题，满分 20 分，每小题 5 分，少选的 3 分，多选不得分）

9、（2020 届山东省潍坊市高三上期中）若$x\geq y$，则下列不等式中正确的是（　　）

A．$2^x\geq 2^y$　　B．$\frac{x+y}{2}\geq\sqrt{xy}$　　C．$x^2\geq y^2$　　D．$x^2+y^2\geq 2xy$

【答案】AD

【解析】

对 A，由指数函数的单调性可知，当$x\geq y$，有$2^x\geq 2^y$，故 A 正确；

对 B，当 $x<0, y<0, x>y$ 时，$\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$ 不成立，故 B 错误；

对 C，当 $0 \geq x \geq y$ 时，$x^2 \geq y^2$ 不成立，故 C 错误；

对 D，$\because x^2+y^2-2xy=(x-y)^2 \geq 0$ 成立，从而有 $x^2+y^2 \geq 2xy$ 成立，故 D 正确；

故选：AD.

10、（2020 届山东省滨州市三校高三上学期联考）设函数 $f(x)=\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$，则下列结论正确的是（　　）

A．$-\pi$ 是 $f(x)$ 的一个周期　　B．$f(x)$ 的图像可由 $y=\sin 2x$ 的图像向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 得到

C．$f(x+\pi)$ 的一个零点为 $x=\frac{\pi}{6}$　　D．$y=f(x)$ 的图像关于直线 $x=\frac{17\pi}{12}$ 对称

【答案】ACD

【解析】

$f(x)=\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$ 的最小正周期为 π，故 $-\pi$ 也是其周期，故 A 正确；

$f(x)$ 的图像可由 $y=\sin 2x$ 的图像向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 得到，故 B 错误；

$f(\frac{\pi}{6}+\pi)=f(\frac{7\pi}{6})=\sin\left(\frac{7\pi}{3}-\frac{\pi}{3}\right)=\sin(2\pi)=0$，故 C 正确；

$f(\frac{17\pi}{12})=\sin\left(\frac{17\pi}{6}-\frac{\pi}{3}\right)=\sin\left(\frac{5\pi}{2}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$，故 D 正确.

故选：ACD

11、（2020·枣庄市第三中学高二月考）对任意实数 x，有

$(2x-3)^9=a_0+a_1(x-1)+a_2(x-1)^2+a_3(x-1)^3+\cdots+a_9(x-1)^9$.则下列结论成立的是（　　）

A．$a_2=-144$

B．$a_0=1$

C．$a_0+a_1+a_2+\ldots+a_9=1$

D．$a_0-a_1+a_2-a_3+\cdots-a_9=-3^9$

【答案】ACD

【解析】对任意实数 x，

有 $(2x-3)^9=a_0+a_1(x-1)+a_2(x-1)^2+a_3(x-1)^3+\cdots+a_9(x-1)^9=[-1+2(x-1)]^9$，

$\therefore a_2=-C_9^2\times2^2=-144$，故 A 正确；

故令 $x=1$，可得 $a_0=-1$，故 B 不正确；

令 $x=2$，可得 $a_0+a_1+a_2+\ldots+a_9=1$，故 C 正确；

令 $x=0$，可得 $a_0-a_1+a_2+\ldots-a_9=-3^9$，故 D 正确；故选：ACD.

12、（2020 届山东省潍坊市高三上期中）已知函数 $f(x)=\begin{cases}-x^2-2x,x<0\\f(x-2),x\geq0\end{cases}$，以下结论正确的是（　　）

A．$f(-3)+f(2019)=-3$

B．$f(x)$ 在区间 $[4,5]$ 上是增函数

C．若方程 $f(x)=k\,x+1$ 恰有 3 个实根，则 $k\in\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{4}\right)$

D．若函数 $y=f(x)-b$ 在 $(-\infty,4)$ 上有 6 个零点 $x_i(i=1,2,3,4,5,6)$，则 $\sum_{i=1}^{6}x_if(x_i)$ 的取值范围是 $(0,6)$

【答案】BCD

【解析】

函数 $f(x)$ 的图象如图所示：

对 A，$f(-3)=-9+6=-3$，$f(2019)=f(1)=f(-1)=1$，所以 $f(-3)+f(2019)=-2$，故 A 错误；

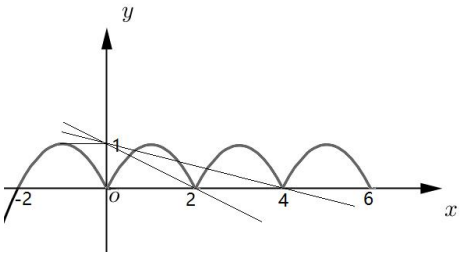
对 B，由图象可知 $f(x)$ 在区间 $[4,5]$ 上是增函数，故 B 正确；

对 C，由图象可知 $k\in\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{4}\right)$，直线 $f(x)=k\ x+1$ 与函数图象恰有 3 个交点，故 C 正确；

对 D，由图象可得，当函数 $y=f(x)-b$ 在 $(-\infty,4)$ 上有 6 个零点 $x_i(i=1,2,3,4,5,6)$，则

$0<b<1$，所以当 $b\to 0$ 时，$\sum_{i=1}^{6}x_if\left(x_i\right)\to 0$；当 $b\to 1$ 时，$\sum_{i=1}^{6}x_if\left(x_i\right)\to 6$，所以 $\sum_{i=1}^{6}x_if\left(x_i\right)$ 的取值范围是 $(0,6)$，故 D 正确.

故选：BCD.



三、填空题（共 4 小题，满分 20 分，每小题 5 分，一题两空，第一空 2 分）

13、（2020 届山东省九校高三上学期联考）直线 $y=x$ 与圆 $x^2-4x+y^2=0$ 相交于 A、B 两点，则 $|AB|=$_____.

【答案】$2\sqrt{2}$

【解析】

圆的标准方程为 $(x-2)^2+y^2=4$，圆心到直线的距离 $d=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$，

所以弦长：$|AB|=2\sqrt{4-d^2}=2\sqrt{2}$.

故答案为：$2\sqrt{2}$

14、.（2020 届山东省烟台市高三上期末）已知随机变量 $X \sim N\left(1,\sigma^2\right)$，$P\left(-1<X<1\right)=0.4$，则 $P\left(X\geq 3\right)=$_____.

【答案】0.1

【解析】

因为随机变量 X 服从正态分布 $N\left(1,\sigma^2\right)$，

所以曲线关于 $x=1$ 对称，

因为 $P\left(-1<X<1\right)=0.4$，

所以 $P\left(X\geq 3\right)=P\left(X\leq -1\right)=0.5-P\left(-1<X<1\right)=0.1$

故答案为：0.1

15、（2020 届山东省滨州市三校高三上学期联考）已知定义在 **R** 上的函数满足 $f(3-x)=-f(3+x)$，且 $f(x)$ 图像关于 $x=1$ 对称，当 $x\in(1,2]$ 时，$f(x)=\log_2(2x+1)$，则 $f\left(\dfrac{825}{2}\right)=$_____.

【答案】-2

【解析】

因为 $f(x)$ 图像关于 $x=1$ 对称，则 $f(x)=f(2-x)$，

$f(x)=f(2-x)=f(3-1-x)=-f(3+1+x)=-f(x+4)=f(x+8)$，

故 $f(x)$ 是以 8 为周期的周期函数，

$\therefore f\left(\dfrac{825}{2}\right)=f\left(8\times 51+4+\dfrac{1}{2}\right)=f\left(4+\dfrac{1}{2}\right)=f\left(3+1+\dfrac{1}{2}\right)=-f\left(3-1-\dfrac{1}{2}\right)=-f\left(\dfrac{3}{2}\right)$

$=-\log_2(2\times\frac{3}{2}+1)=-2$

故答案为：-2.

16、（2020 届山东省九校高三上学期联考）已知数列$\{a_n\}$中，$a_1=\frac{1}{2}$，其前n项和S_n满足$S_n^2-a_nS_n+a_n=0(n\geq 2)$，则$a_2=$_____；$S_{2019}=$_____.

【答案】$-\frac{1}{6}$　　$\frac{1}{2020}$

【解析】

（1）由题：$S_n^2-a_nS_n+a_n=0(n\geq 2)$，令$n=2$，

$S_2^2-a_2S_2+a_2=0,(a_2+\frac{1}{2})^2-a_2(a_2+\frac{1}{2})+a_2=0$，

得：$\frac{3}{2}a_2+\frac{1}{4}=0$，所以$a_2=-\frac{1}{6}$；

（2）由题$S_n^2-a_nS_n+a_n=0(n\geq 2)$，$a_n=S_n-S_{n-1}(n\geq 2)$

$S_n^2-(S_n-S_{n-1})S_n+S_n-S_{n-1}=0(n\geq 2)$，化简得：

$S_nS_{n-1}+S_n-S_{n-1}=0(n\geq 2)$，

$1+\frac{1}{S_{n-1}}-\frac{1}{S_n}=0,\frac{1}{S_n}-\frac{1}{S_{n-1}}=1,(n\geq 2)$，

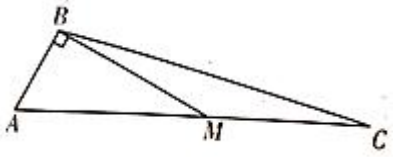
$\{\frac{1}{S_n}\}$是一个以 2 为首项，1 为公差的等差数列，

$\frac{1}{S_n}=n+1$，$S_n=\frac{1}{n+1}$，$S_{2019}=\frac{1}{2020}$

故答案为：(1). $-\frac{1}{6}$　　(2). $\frac{1}{2020}$

四、解答题（共 6 小题，满分 70 分，第 17 题 10 分，其它 12 分）

17、（2020 届山东省潍坊市高三上期末）在①$3asinC=4ccosA$;②$2bsin\dfrac{B+C}{2}=\sqrt{5}asinB$ 这两个条件中任选-一个，补充在下面问题中，然后解答补充完整的题.



在$\triangle ABC$ 中，角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c，已知_____，$a=3\sqrt{2}$.

(1)求 $sinA$;

(2)如图，M 为边 AC 上一点，$MC=MB,\angle ABM=\dfrac{\pi}{2}$，求 $\triangle ABC$ 的面积

【答案】（1）见解析（2）见解析

【解析】

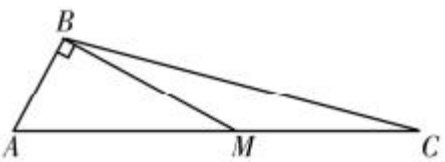
解:若选择条件①，则答案为:

(1)在 $\triangle ABC$ 中，由正弦定理得 $3sinAsinC=4sinCcosA$，

因为 $\sin C\neq 0$，所以 $3sinA=4cosA,9sin^2A=16cos^2A$，

所以 $25sin^2A=16$，因为 $sinA>0$，所以 $sinA=\dfrac{4}{5}$.

(2)解法 1:设 $BM=MC=m$，易知 $cos\angle BMC=-cos\angle BMA=-sinA=-\dfrac{4}{5}$



在 $\triangle BMC$ 中由余弦定理得:$18=2m^2-2m^2\cdot\left(-\frac{4}{5}\right)$，解得 $m=\sqrt{5}$.

所以 $S_{\triangle BMC}=\frac{1}{2}m^2 sin\angle BMC=\frac{1}{2}\times 5\times\frac{3}{5}=\frac{3}{2}$

在 $Rt\triangle ABM$ 中，

$sinA=\frac{4}{5},BM=\sqrt{5},\angle ABM=\frac{\pi}{2}$

所以 $AB=\frac{3\sqrt{5}}{4}$，所以 $S_{\triangle ABM}=\frac{15}{8}$，

所以 $S_{\triangle ABC}=\frac{3}{2}+\frac{15}{8}=\frac{27}{8}$

解法 2:因为 $MB=MC$，所以 $\angle MBC=\angle C$，

因为 $\angle ABM=\frac{\pi}{2}$,所以 $\angle A+2\angle C=\frac{\pi}{2},2\angle C=\frac{\pi}{2}-\angle A$，

所以 $sin2C=sin\left(\frac{\pi}{2}-A\right)=cosA$

因为 A 为锐角，所以 $sin2C=cosA=\frac{3}{5}$

又 $\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=\frac{a}{\sin A}=\frac{15\sqrt{2}}{4}$

所以 $b=\frac{15\sqrt{2}}{4}\sin B,\ c=\frac{15\sqrt{2}}{4}\sin C,$

所以 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}\times\frac{15\sqrt{2}}{4}\sin B\times\frac{15\sqrt{2}}{4}\sin C\times\frac{4}{5}=\frac{45}{4}\sin\left(\frac{\pi}{2}+C\right)\sin C$

$=\frac{45}{4}\sin C\cos C=\frac{45}{4}\sin 2C=\frac{27}{8}$

若选择条件②，则答案为:

(1)因为 $2bsin\frac{B+C}{2}=\sqrt{5}asinB$，所以 $2bsin\frac{\pi-A}{2}=\sqrt{5}asinB$，

由正弦定理得 $2sinBcos\frac{A}{2}=\sqrt{5}sinAsinB$，

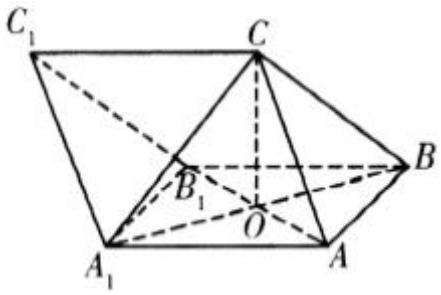
因为 $sinB\neq 0$，所以 $2cos\frac{A}{2}=\sqrt{5}sinA,\ cos\frac{A}{2}=\sqrt{5}sin\frac{A}{2}cos\frac{A}{2}$，

因为 $cos\frac{A}{2}\neq 0$，所以 $sin\frac{A}{2}=\frac{1}{\sqrt{5}}$，

则 $cos\frac{A}{2}=\frac{2}{\sqrt{5}}$，所以 $\sin A=2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}=\frac{4}{5}$.

(2)同选择①

18、（2020 届山东省潍坊市高三上期中）如图，在棱长均为 2 的三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，平面 $A_1CB\perp$ 平面 A_1ABB_1，$AB_1=A_1B$，O 为 AB_1 与 A_1B 的交点.



（1）求证：$AB_1\perp CO$；

（2）求平面 ACC_1A_1 与平面 ABC 所成锐二面角的余弦值.

【答案】（1）详见解析；（2）$\frac{1}{3}$.

【解析】

（1）因为四边形 A_1ABB_1 为菱形，所以 $A_1B\perp AB_1$，

又平面 $A_1CB\perp$ 平面 A_1ABB_1，平面 $A_1CB\cap$ 平面 $A_1ABB_1=A_1B$，

所以 $AB_1\perp$ 平面 A_1CB，

因为 $CO\subset$ 平面 A_1CB，

所以 $AB_1\perp CO$.

（2）因为 $A_1B=AB_1$，所以菱形 A_1ABB_1 为正方形，

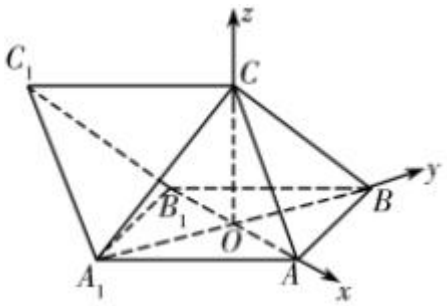
在 $\mathrm{Rt}\Delta COA$ 中，$CO=\sqrt{AC^2-OA^2}=\sqrt{2}$，

在 ΔCOB 中，$CO=OB=\sqrt{2}$，$CB=2$，$CO^2+OB^2=CB^2$，

所以，$CO\perp OB$，又 $CO\perp AB_1$，$A_1B\cap AB_1=O$，

所以，$CO\perp$ 平面 A_1ABB_1；

以 O 为坐标原点，以 OA，OB，OC 所在直线分别为 x 轴，y 轴，z 轴，建立如图所示的空间直角坐标系 $O-xyz$.



$A\left(\sqrt{2},0,0\right)$，$A_1\left(0,-\sqrt{2},0\right)$，$C\left(0,0,\sqrt{2}\right)$，$B\left(0,\sqrt{2},0\right)$，

设平面 ACC_1A_1 的一个法向量为 $\overrightarrow{n_1}=\left(x_1,y_1,z_1\right)$ 平面 ABC 的一个法向量为 $\overrightarrow{n_2}=\left(x_2,y_2,z_2\right)$，则

$$\begin{cases}-\sqrt{2}x_1-\sqrt{2}y_1=0,\\-\sqrt{2}x_1+\sqrt{2}z_1=0,\end{cases}$$

令 $x_1=1$，得 $\overrightarrow{n_1}=(1,-1,1)$，

$$\begin{cases}-\sqrt{2}x_2+\sqrt{2}y_2=0,\\-\sqrt{2}x_2+\sqrt{2}z_2=0,\end{cases}$$

令 $x_2=1$，得 $\overrightarrow{n_2}=(1,1,1)$，

设平面 ACC_1A_1 与平面 ABC 所成锐二面角为 α，

则 $\cos\alpha=\left|\dfrac{\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}}{|\overrightarrow{n_1}||\overrightarrow{n_2}|}\right|=\dfrac{1-1+1}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=\dfrac{1}{3}$，

所以平面 ACC_1A_1 与平面 ABC 所成锐二面角的余弦值为 $\dfrac{1}{3}$.

19、（2020·山东省淄博实验中学高三上期末）近年来，国资委.党委高度重视扶贫开发工作，坚决贯彻落实中央扶贫工作重大决策部署，在各个贫困县全力推进定点扶贫各项工作，取得了积极成效，某贫困县为了响应国家精准扶贫的号召，特地承包了一块土地，已知土地的使用面积以及相应的管理时间的关系如下表所示：

土地使用面积 x（单位：亩）	1	2	3	4	5
管理时间 y（单位：月）	8	10	13	25	24

并调查了某村 300 名村民参与管理的意愿，得到的部分数据如下表所示:

	愿意参与管理	不愿意参与管理
男性村民	150	50
女性村民	50	

（1）求出相关系数r的大小，并判断管理时间y与土地使用面积x是否线性相关？

（2）是否有99.9%的把握认为村民的性别与参与管理的意愿具有相关性？

（3）若以该村的村民的性别与参与管理意愿的情况估计贫困县的情况，则从该贫困县中任取3人，记取到不愿意参与管理的男性村民的人数为x,求x的分布列及数学期望.

参考公式：

$$r=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_1-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_1-\overline{x})^2\sum_{i=1}^{n}(y_i-\overline{y})^2}},\ k^2=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)},$$

其中$n=a+b+c+d$．临界值表：

$P(K^2\geq k_0)$	0.100	0.050	0.025	0.010	0.001
k_0	2.706	3.841	5.024	6.635	10.828

参考数据：$\sqrt{635}\approx 25.2$

【答案】（1）线性相关；（2）有；（3）详见解析.

【解析】

(1)依题意：$\overline{x}=\frac{1+2+3+4+5}{5}=3,\overline{y}=\frac{8+10+13+25+24}{5}=16$

故$\sum_{i=1}^{5}(x-\overline{x})(y-\overline{y})=(-2)\times(-8)\div(-1)\times(-6)+1\times 9+2\times 8=47$

$\sum_{i=1}^{5}(x-\overline{x})^2=4+1+1+4=10,\sum_{i=1}^{5}(y-\overline{y})^2=64+36+9+81+64=254$

则 $r=\dfrac{\sum_{i=1}^{5}(x-x)(y-y)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{5}(x_1-\vec{x})^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{5}(y_1-\bar{y})^2}}=\dfrac{47}{\sqrt{10}\times\sqrt{254}}=\dfrac{47}{2\sqrt{635}}\approx 0.933$，

故管理时间 y 与土地使用面积 x 线性相关.

（2）依题意，完善表格如下：

	愿意参与管理	不愿意参与管理	总计
男性村民	150	50	200
女性村民	50	50	100
总计	200	100	300

计算得 k^2 的观测值为

$$k^2=\frac{300\times(150\times50-50\times50)^2}{200\times100\times200\times100}=\frac{300\times5000\times5000}{200\times100\times200\times100}=18.75>10.828$$

故有 99.9%的把握认为村民的性别与参与管理的意愿具有相关性.

（3）依题意，x 的可能取值为 0，1，2，3，从该贫困县中随机抽取一名，则取到不愿意参与管理的男性村民的概率为 $\dfrac{1}{6}$，

故 $P(X=0)=(\dfrac{5}{6})^3=\dfrac{125}{216}$, $P(X=1)=C_3^1\times(\dfrac{5}{6})^2\times\dfrac{1}{6}=\dfrac{25}{72}$,

$$P(X=2)=C_3^2\times\frac{5}{6}\times(\frac{1}{6})^2=\frac{5}{72},P(X=3)=C_3^3\left(\frac{1}{6}\right)^3=\frac{1}{216}$$

故 x 的分布列为

X	0	1	2	3
P	$\frac{125}{216}$	$\frac{25}{72}$	$\frac{5}{72}$	$\frac{1}{216}$

则数学期望为 $E(X)=0\times\frac{125}{216}+1\times\frac{25}{72}+2\times\frac{5}{72}+3\times\frac{1}{216}=\frac{1}{2}$

（或由 $X\sim B(3,\frac{1}{6})$，得 $E(X)=3\times\frac{1}{6}=\frac{1}{2}$

20、（2020 届山东省日照市高三上期末联考）已知数列 $\{a_n\},\{b_n\}$ 满足：$a_{n+1}+1=2a_n+n, b_n-a_n=n, b_1=2$.

（1）证明数列 $\{b_n\}$ 是等比数列，并求数列 $\{b_n\}$ 的通项；

（2）求数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n .

【答案】（1）见证明；（2）$S_n=2^{n+1}-2-\frac{n^2+n}{2}$

【解析】

（1）证明：因为 $b_n-a_n=n$，

所以 $b_n=a_n+n$.

因为 $a_{n+1}=2a_n+n-1$

所以 $a_{n+1}+(n+1)=2(a_n+n)$

所以 $b_{n+1}=2b_n$.

又 $b_1=2$，

所以$\{b_n\}$是首项为$b_1=2$，公比为 2 的等比数列，

所以$b_n=2\times2^{n-1}=2^n$.

（2）解：由（1）可得$a_n=b_n-n=2^n-n$，

所以$S_n=\left(2^1+2^2+2^3+\cdots+2^n\right)-\left(1+2+3+\cdots+n\right)$

$=\dfrac{2\left(1-2^n\right)}{1-2}+\dfrac{n\left(1+n\right)}{2}$

$=2^{n+1}-2-\dfrac{n^2+n}{2}$.

21、（2020 届山东省泰安市高三上期末）已知函数$f\left(x\right)=e^x-ax$.

(1)当$a>0$时，设函数$f\left(x\right)$的最小值为$g\left(a\right)$，证明：$g\left(a\right)\le1$；

(2)若函数$h\left(x\right)=f\left(x\right)-\dfrac{1}{2}x^2$有两个极值点$x_1,x_2\left(x_1<x_2\right)$，证明：$h\left(x_1\right)+h\left(x_2\right)>2$.

【答案】（1）证明见解析 （2）证明见解析

【解析】

（1）$f'\left(x\right)=e^x-a\left(a>0\right)$，令$f'\left(x\right)=0$，解得$x=\ln a$，

当$x>\ln a$时，$f'\left(x\right)>0$，当$x<\ln a$时，$f'\left(x\right)<0$，

$\therefore f\left(x\right)_{\min}=f\left(\ln a\right)=a-a\ln a$，$\therefore g\left(a\right)=a-a\ln a\left(a>0\right)$，

令$g\left(x\right)=x-x\ln x\left(x>0\right)$，则$g'\left(x\right)=-\ln x$，

令$g'\left(x\right)=0$，解得$x=1$，

$\therefore$ 当$x\in(0,1)$时，$g'(x)>0$，当$x\in(1,+\infty)$时，$g'(x)<0$，

$\therefore g(x)_{\max}=g(1)=1$，$\therefore g(x)\le 1$，

$\therefore$ 当$a>0$时，$g(a)\le 1$；

（2）$h(x)=e^x-ax-\frac{1}{2}x^2$，$h'(x)=e^x-a-x$，

令$\varphi(x)=e^x-a-x$，则$\varphi'(x)=e^x-1$，

令$\varphi'(x)=0$，解得$x=0$，

当$x>0$时，$\varphi'(x)>0$，当$x<0$时，$\varphi'(x)<0$，

$\therefore \varphi(x)_{\min}=\varphi(0)=1-a$，

又函数$h(x)$有两个极值点，则$1-a<0$，

$\therefore a>1$，且$x_1<0<x_2$，

$\therefore$ 当$x\in(-\infty，x_1)$时，$h(x)$单调递增，当$x\in(x_1,0)$时，$h(x)$单调递减，

$\therefore$ 当$x\in(-\infty,0)$时，$h(x)\le h(x_1)$，

又$-x_2\in(-\infty,0)$，$\therefore h(-x_2)\le h(x_1)$，

$\therefore h(x_1)+h(x_2)\ge h(-x_2)+h(x_2)=e^{x_2}+e^{-x_2}-x_2^2$，

令$m(x)=e^x+e^{-x}-x^2(x\ge 0)$，则$m'(x)=e^x-\frac{1}{e^x}-2x$，

令$n(x)=m'(x)$，则$n'(x)=e^x+\frac{1}{e^x}-2\ge 0$，

$\therefore n(x)$在$[0,+\infty)$上单调递增，$\therefore m'(x)=n(x)\ge n(0)=0$，

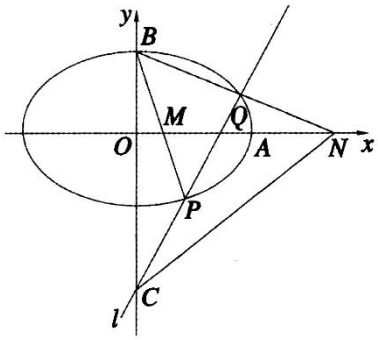
$\therefore m(x)$在$[0,+\infty)$上单调递增，$\therefore m(x)\geq m(0)=2$，

$\because x_2>0$，$\therefore m(x_2)=e^{x_2}+e^{-x_2}-x_2^{\,2}>2$，即$h(-x_2)+h(x_2)>2$，

$\therefore h(x_1)+h(x_2)>2$.

22、（2020 届山东省泰安市高三上期末）已知椭圆$E:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的离心率 e 满足

$2e^2-3\sqrt{2}e+2=0$，右顶点为 A，上顶点为 B，点 C(0，−2)，过点 C 作一条与 y 轴不重合的直线 l，直线 l 交椭圆 E 于 P，Q 两点，直线 BP，BQ 分别交 x 轴于点 M，N；当直线 l 经过点 A 时，l 的斜率为$\sqrt{2}$.



(1)求椭圆 E 的方程；

(2)证明：$S_{\Delta BOM}\cdot S_{\Delta BCN}$为定值.

【答案】（1）$\frac{x^2}{2}+y^2=1$（2）证明见解析

【解析】

（1）由$2e^2-3\sqrt{2}e+2=0$解得$e=\frac{\sqrt{2}}{2}$或$e=\sqrt{2}$（舍去），

$\therefore a=\sqrt{2}c$，又$a^2=b^2+c^2$，

$\therefore a=\sqrt{2}b$，

又 $k_{AC}=\dfrac{0-(-2)}{a-0}=\sqrt{2}$，

$\therefore a=\sqrt{2}$，$\therefore b=1$，

$\therefore$ 椭圆 E 的方程为 $\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$；

（2）由题知，直线 l 的斜率存在，设直线 l 的方程为 $y=kx-2$，

设 $P(x_1,y_1),Q(x_2,y_2)$，

由 $\begin{cases}y=kx-2\\ \dfrac{x^2}{2}+y^2=1\end{cases}$ 得 $(2k^2+1)x^2-8kx+6=0$，

$\therefore x_1+x_2=\dfrac{8k}{2k^2+1},x_1x_2=\dfrac{6}{2k^2+1}$，

$\triangle=(-8k)^2-4\times6\times(2k^2+1)=16k^2-24>0$

$\therefore k^2>\dfrac{3}{2}$，

$\therefore y_1+y_2=k(x_1+x_2)-4=\dfrac{-4}{2k^2+1}$，

$y_1y_2=(kx_1-2)(kx_2-2)=k^2x_1x_2-2k(x_1+x_2)+4=\dfrac{4-2k^2}{2k^2+1}$，

直线 BP 的方程为 $y=\dfrac{y_1-1}{x_1}x+1$，令 $y=0$ 解得 $x=\dfrac{x_1}{1-y_1}$，则 $M\left(\dfrac{x_1}{1-y_1},0\right)$，

同理可得 $N\left(\dfrac{x_2}{1-y_2},0\right)$，

$$\therefore S_{\triangle BOM}\bullet S_{\triangle BCN}=\frac{3}{4}\left|\frac{x_1}{1-y_1}\right|\left|\frac{x_2}{1-y_2}\right|=\frac{3}{4}\left|\frac{x_1x_2}{(1-y_1)(1-y_2)}\right|=\frac{3}{4}\left|\frac{x_1x_2}{1-(y_1+y_2)+y_1y_2}\right|$$

$$=\frac{3}{4}\frac{\frac{6}{2k^2+1}}{\left|1+\frac{4}{2k^2+1}+\frac{4-2k^2}{2k^2+1}\right|}=\frac{1}{2},$$

$\therefore S_{\triangle BOM}\bullet S_{\triangle BON}$ 为定值 $\frac{1}{2}$.