微专题一　根的判别式的应用 [学生用书 A6]

一　判断一元二次方程根的情况

教材母题 ▶ (教材 P17 习题 21.2 第 13 题)

无论 p 取何值，方程$(x-3)(x-2)-p^2=0$ 总有两个不等的实数根吗？给出答案并说明理由.

解：是．理由：

原方程可化为 $x^2-5x+(6-p^2)=0$，

$\because \Delta=b^2-4ac=(-5)^2-4\times1\times(6-p^2)=25-24+4p^2=4p^2+1>0$，

$\therefore$故方程$(x-3)(x-2)-p^2=0$ 总有两个不等的实数根.

【思想方法】 一元二次方程根的判别式$\Delta=b^2-4ac$ 可以用来判断根的情况，也可以根据一元二次方程根的情况确定方程中的未知系数.

变形 1 [2017·咸宁]已知 a，b，c 为常数，点 $P(a，c)$在第二象限，则关于 x 的方程 $ax^2+bx+c=0$ 的根的情况是(　B　)

A．有两个相等的实数根

B．有两个不相等的实数根

C．没有实数根

D．无法判断

【解析】 $\because$点 $P(a，c)$在第二象限，$\therefore a<0$，$c>0$，

$\therefore ac<0$，$\therefore -4ac>0$.

又$\because b^2\geqslant0$，$\therefore\Delta=b^2-4ac>0$，

$\therefore$关于 x 的方程 $ax^2+bx+c=0$ 有两个不相等的实数根．故选 B.

变形 2 a，b，c 为常数，且$(a-c)^2>a^2+c^2$，则关于 x 的方程 $ax^2+bx+c=0$ 的根的情况是(　B　)

A．有两个相等的实数根

B．有两个不相等的实数根

C．无实数根

D．有一根为 0

【解析】 由$(a-c)^2>a^2+c^2$得$-2ac>0$，因此$\Delta=b^2-4ac>0$，所以原方程有两个不相等的实数根．故选 B.

变形 3 [2018·娄底]关于 x 的一元二次方程 $x^2-(k+3)x+k=0$ 的根的情况是（ A ）

A．有两不相等实数根

B．有两相等实数根

C．无实数根

D．不能确定

变形 4 [2018·北京]关于 x 的一元二次方程 $ax^2+bx+1=0$.

(1)当 $b=a+2$ 时，利用根的判别式判断方程根的情况；

(2)若方程有两个相等的实数根，写出一组满足条件的 a，b 的值，并求此时方程的根．

解：(1)∵$b=a+2$，

∴$\Delta=b^2-4\times a\times 1=(a+2)^2-4a=a^2+4>0$，

∴原方程有两个不相等的实数根；

(2)答案不唯一，如当 $a=1$，$b=2$ 时，原方程为 $x^2+2x+1=0$，解得 $x_1=x_2=-1$.

变形 5 已知关于 x 的方程 $x^2-(m+2)x+(2m-1)=0$.

(1)求证：方程总有两个不相等的实数根；

(2)若此方程的一个根是 1，请求出方程的另一个根，并求出以此两根为边长的直角三角形的周长．

【解析】(1)根据关于 x 的方程 $x^2-(m+2)x+(2m-1)=0$ 的根的判别式的符号来证明结论；

(2)根据一元二次方程的根的定义求得 m 的值，从而求得方程的另一根．分类讨论：①当两根为直角三角形的两直角边长时，由勾股定理得斜边的长度；②当两根为直角三角形的一直角边和斜边长时，由勾股定理得该直角三角形的另一直角边长，再根据三角形的周长公式进行计算．

解：(1)证明：∵$\Delta=b^2-4ac=[-(m+2)]^2-4\times 1\times(2m-1)=m^2-4m+8=(m-2)^2$

$+4>0$，

∴方程总有两个不相等的实数根；

(2)∵此方程的一个根是 1，

∴$1^2-(m+2)+(2m-1)=0$，解得 $m=2$，

∴原方程为 $x^2-4x+3=0$，

解得 $x_1=1$，$x_2=3$，

∴方程的另一个根为 $x=3$.

①当 1，3 为直角边长时，斜边长为$\sqrt{1^2+3^2}=\sqrt{10}$，

∴直角三角形的周长为 $1+3+\sqrt{10}=4+\sqrt{10}$；

②当 3 为斜边长时，另一条直角边长为$\sqrt{3^2-1^2}=2\sqrt{2}$，∴直角三角形的周长为 $1+3+2\sqrt{2}=4+2\sqrt{2}$.

二　确定一元二次方程中字母系数的值

变形 1　[2018·淮安]若关于 x 的一元二次方程 $x^2-2x-k+1=0$ 有两个相等的实数根，则 k 的值是(　B　)

A．-1　　B．0　C．1　D．2

变形 2　[2018·聊城]已知关于 x 的方程 $(k-1)x^2-2kx+k-3=0$ 有两个相等的实数根，则 k 的值是__$\frac{3}{4}$__.

【解析】　∵关于 x 的方程 $(k-1)x^2-2kx+k-3=0$ 有两个相等的实数根，

∴$\begin{cases}(-2k)^2-4(k-1)(k-3)=0,\\ k-1\neq 0,\end{cases}$ 解得 $k=\frac{3}{4}$.

变形 3　已知关于 x 的一元二次方程 $(a+c)x^2+2bx+(a-c)=0$，其中 a，b，c 分别为△ABC 的三边的长.

(1)如果 $x=-1$ 是方程的根，试判断△ABC 的形状，并说明理由；

(2)如果方程有两个相等的实数根，试判断△ABC 的形状，并说明理由；

(3)如果△ABC 是等边三角形，试求这个一元二次方程的根.

解：(1)△ABC 是等腰三角形.

理由：∵$x=-1$ 是方程的根，∴$2a-2b=0$，

∴$a=b$，∴△ABC是等腰三角形；

(2)△ABC是直角三角形.

理由：∵方程有两个相等的实数根，

∴$\Delta=(2b)^2-4(a+c)(a-c)=0$，

∴$b^2+c^2=a^2$，

∴△ABC是直角三角形；

(3)∵△ABC是等边三角形，∴$a=b=c$，

∴原方程变为$2ax^2+2ax=0$.

又∵$a\neq0$，∴$x_1=0$，$x_2=-1$.

三　确定一元二次方程中字母系数的取值范围

变形1　[2017·遵义]关于x的一元二次方程$x^2+3x+m=0$有两个不相等的实数根，则m的取值范围为(　B　)

A．$m\leqslant\frac{9}{4}$　　B．$m<\frac{9}{4}$

C．$m\leqslant\frac{4}{9}$　　D．$m<\frac{4}{9}$

【解析】　∵一元二次方程有两个不相等的实数根，∴$\Delta>0$，即$\Delta=3^2-4m>0$，解得$m<\frac{9}{4}$.

变形2　[2018·岳阳]关于x的一元二次方程$x^2+2x+k=0$有两个不相等的实数根，则k的取值范围是__$k<1$__.

【解析】　由题意可知：$\Delta=2^2-4k>0$，解得$k<1$.

四　确定一元二次方程中隐含条件字母系数的取值范围

变形1　[2018·菏泽]关于x的一元二次方程$(k+1)x^2-2x+1=0$有两个实数根，则k的取值范围是(　D　)

A．$k\geqslant0$　　B．$k\leqslant0$

C．$k<0$且$k\neq-1$　　D．$k\leqslant0$且$k\neq-1$

【解析】　由题意得$\Delta=b^2-4ac=(-2)^2-4(k+1)\geqslant0$，解得$k\leqslant0$，又∵$k+1\neq0$，即$k\neq-1$，∴$k\leqslant0$且$k\neq-1$.故选D.

变形2　[2017·枣庄]已知关于x的一元二次方程$ax^2-2x-1=0$有两个不相等

的实数根，则 a 的取值范围是__$a>-1$ 且 $a\neq0$__.

【解析】 ∵方程有两个不相等的实数根，∴$a\neq0$ 且$\Delta=(-2)^2-4a\cdot(-1)>0$，解得 $a>-1$ 且 $a\neq0$.

变形 3 [2018·威海]关于 x 的一元二次方程$(m-5)x^2+2x+2=0$ 有实数根，则 m 的最大整数解是__$m=4$__.

【解析】 ∵关于 x 的一元二次方程有实数根，∴$\Delta=2^2-4(m-5)\cdot2=4-8(m-5)\geqslant0$，且 $m-5\neq0$，解得 $m\leqslant5.5$ 且 $m\neq5$，∴m 的最大整数解为 4.

变形 4 如果关于 x 的方程 $mx^2-2(m+2)x+m+5=0$ 没有实数根，试判断关于 x 的方程$(m-5)x^2-2(m-1)x+m=0$ 的根的情况.

解：∵方程 $mx^2-2(m+2)x+m+5=0$ 没有实数根，

∴$m\neq0$，原方程是关于 x 的一元二次方程，

∴$\Delta=[-2(m+2)]^2-4m(m+5)$

$=4(m^2+4m+4-m^2-5m)=4(4-m)<0$，

∴$m>4$.

对于方程$(m-5)x^2-2(m-1)x+m=0$，

当 $m=5$ 时，方程有一个实数根；

当 $m\neq5$ 时，$\Delta=b^2-4ac=[-2(m-1)]^2-4m(m-5)=4(3m+1)>0$，

∴方程有两个不相等的实数根.

综上所述，当 $m=5$ 时，此方程有一个实数根；当 $m>4$ 且 $m\neq5$ 时，此方程有两个不相等的实数根.

变形 5 关于 x 的一元二次方程$(a-6)x^2-8x+9=0$ 有实数根.

(1)求 a 的最大整数值；

(2)当 a 取最大整数值时，

①求出该方程的根；

②求 $2x^2-\dfrac{32x-7}{x^2-8x+11}$的值.

解：(1)∵关于 x 的一元二次方程$(a-6)x^2-8x+9=0$ 有实数根，

∴$a-6\neq0$，$\Delta=b^2-4ac=(-8)^2-4\cdot(a-6)\cdot9\geqslant0$，解得 $a\leqslant\dfrac{70}{9}$且 $a\neq6$.

∴a 的最大整数值为 7；

(2)①当 $a=7$ 时，原一元二次方程变为 $x^2-8x+9=0$.

∵$a=1$，$b=-8$，$c=9$，

∴$\Delta=b^2-4ac=(-8)^2-4\times1\times9=28$，

∴$x=\dfrac{-(-8)\pm\sqrt{28}}{2}$，即 $x=4\pm\sqrt{7}$，

∴$x_1=4+\sqrt{7}$，$x_2=4-\sqrt{7}$；

②∵$x^2-8x+9=0$，∴$x^2-8x=-9$，

∴原式$=2x^2-\dfrac{32x-7}{-9+11}=2x^2-16x+\dfrac{7}{2}$

$=2(x^2-8x)+\dfrac{7}{2}=2\times(-9)+\dfrac{7}{2}=-\dfrac{29}{2}$.