微专题六　二次函数的应用 [学生用书 A26]

一　二次函数的实际应用

教材母题 ▶(教材 P51 探究 3)

图 1 中是抛物线形拱桥，当拱顶离水面 2 m 时，水面宽 4 m．水面下降 1　m，水面宽度增加多少？

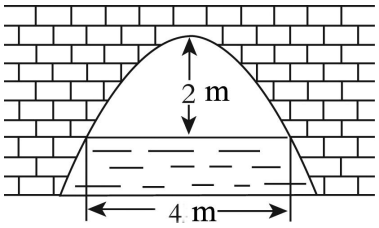
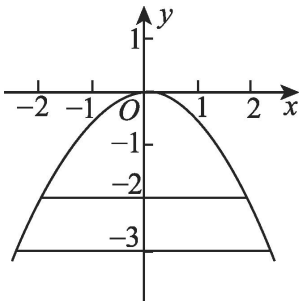


图 1



教材母题答图

解：如答图，以抛物线的顶点为原点，以抛物线的对称轴为 y 轴建立直角坐标系，可设这条抛物线表示的二次函数为 $y=ax^2(a\neq 0)$.

由抛物线经过点(2，−2)，可得

$-2=a\cdot 2^2$，解得 $a=-\frac{1}{2}$.

∴这条抛物线表示的二次函数为 $y=-\frac{1}{2}x^2$.

当水面下降 1 m 时，水面的纵坐标为 $y=-3$.

由 $y=-3$，得 $-3=-\frac{1}{2}x^2$，解得 $x_1=\sqrt{6}$，$x_2=-\sqrt{6}$，

∴此时水面宽度为 $2\sqrt{6}$ m，

∴水面宽度增加$(2\sqrt{6}-4)$m.

【思想方法】 建模：把问题中各个量用两个变量 x，y 来表示，并建立两种量的二次函数关系，再根据二次函数的图象和性质解决实际问题．应用最多的是根据二次函数的最值确定最大利润，最节省方案等问题．注意：建立平面直角坐标系时，遵从就简避繁的原则，这样求解析式比较方便．

变形 1　某隧道横断面由抛物线与矩形的三边组成，尺寸如图 2 所示．

(1)以隧道横断面抛物线的顶点为原点，以抛物线的对称轴为 y 轴建立平面直角坐

标系，求该抛物线对应的函数解析式；

(2)某卡车空车时能通过此隧道，现装载一集装箱，集装箱宽 3 m，车与集装箱共高 4.5 m，此车能否通过隧道？请说明理由.

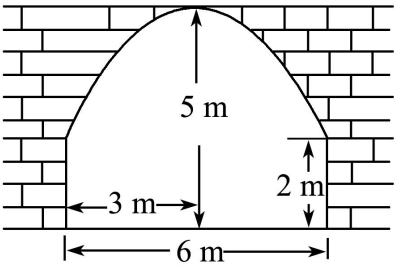


图 2

解：(1)设抛物线对应的函数解析式为 $y=ax^2(a\neq0)$，

∵抛物线的顶点为原点，隧道宽 6 m，高 5 m，矩形的高为 2 m，

∴抛物线过点(−3，−3)，

代入 $y=ax^2$，得 $-3=9a$，解得 $a=-\frac{1}{3}$，

∴函数解析式为 $y=-\frac{x^2}{3}$；

(2)不能．理由：将 $x=1.5$ 代入函数解析式，得 $y=-0.75$，

此宽度下路面上方能容纳的车辆最大高度为 $5-0.75=4.25$(m)＜4.5 m，

∴此车不能通过此隧道.

变形 2 [2017·金华]甲、乙两人进行羽毛球比赛，羽毛球飞行的路线为抛物线的一部分，如图 3 所示，甲在 O 点正上方 1 m 的 P 处发出一球，羽毛球飞行的高度 y(m)与水平距离 x(m)之间满足函数解析式 $y=a(x-4)^2+h$.已知点 O 与球网的水平距离为 5 m，球网的高度为 1.55 m.

(1)当 $a=-\frac{1}{24}$时，

①求 h 的值；

②通过计算判断此球能否过网；

(2)若甲发球过网后，羽毛球飞行到与点 O 的水平距离为 7 m，离地面的高度为$\frac{12}{5}$ m 的 Q 处时，乙扣球成功，求 a 的值.

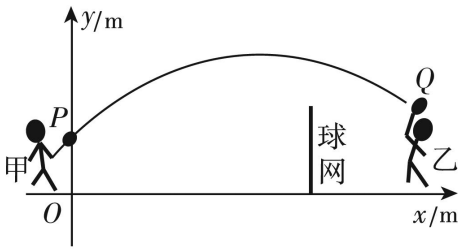


图 3

解：(1)①把(0，1)，$a=-\frac{1}{24}$代入 $y=a(x-4)^2+h$，得 $1=-\frac{1}{24}\times16+h$，解得 $h=\frac{5}{3}$.

②把 $x=5$ 代入 $y=-\frac{1}{24}(x-4)^2+\frac{5}{3}$，得 $y=-\frac{1}{24}\times(5-4)^2+\frac{5}{3}=1.625$.

∵1.625>1.55，∴此球能过网；

(2)把点(0，1)，$\left(7,\ \frac{12}{5}\right)$代入 $y=a(x-4)^2+h$，得$\begin{cases}16a+h=1,\\ 9a+h=\frac{12}{5},\end{cases}$解得$\begin{cases}a=-\frac{1}{5},\\ h=\frac{21}{5}.\end{cases}$∴$a=-\frac{1}{5}$.

变形 3　如图 4，某乒乓球馆使用发球机进行辅助训练，出球口在桌面中线端点 A 处的正上方，假设每次发出的乒乓球的运动路线固定不变，且落在中线上. 在乒乓球运行时，设乒乓球与端点 A 的水平距离为 x(m)，与桌面的高度为 y(m)，运动时间为 t(s)，经过多次测试后，得到如下部分数据：

t(s)	0	0.16	0.2	0.4	0.6	0.64	0.8	…
x(m)	0	0.4	0.5	1	1.5	1.6	2	…
y(m)	0.25	0.378	0.4	0.45	0.4	0.378	0.25	…

(1)当 t 为何值时，乒乓球达到最大高度？

(2)乒乓球落在桌面时，与端点 A 的水平距离是多少？

(3)乒乓球落在桌面上弹起，y 与 x 满足 $y=a(x-3)^2+k$.

①用含 a 的代数式表示 k；

②球网高度为 0.14 m，球桌长(1.4×2)m.若球弹起后，恰好有唯一的击球点，可以将球沿直线扣杀到点 A，求 a 的值.

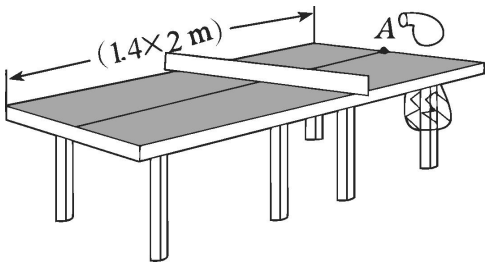


图 4

解：以点 A 为原点，以桌面中线为 x 轴，乒乓球运动方向为正方向，建立平面直角坐标系.

(1)由表格中的数据，可得 $t=0.4$ s.

答：当 t 为 0.4 s 时，乒乓球达到最大高度；

(2)由表格中数据，可判断 y 是 x 的二次函数．可设 $y=m(x-1)^2+0.45(m\neq 0)$.

将(0，0.25)代入，可得 $m=-\frac{1}{5}$.

$\therefore y=-\frac{1}{5}(x-1)^2+0.45$.

当 $y=0$ 时，得 $-\frac{1}{5}(x-1)^2+0.45=0$，解得 $x_1=\frac{5}{2}$，$x_2=-\frac{1}{2}$(不合题意，舍去).

答：乒乓球落在桌面时与端点 A 的水平距离是 $\frac{5}{2}$ m；

(3)①由(2)得乒乓球落在桌面上时，对应的点为 $\left(\frac{5}{2},\ 0\right)$.

代入 $y=a(x-3)^2+k$，得 $a\cdot\left(\frac{5}{2}-3\right)^2+k=0$，化简整理，得 $k=-\frac{1}{4}a$；

②根据题意，可知扣杀路线在直线 $y=\frac{1}{10}x$ 上.

由①，得 $y=a(x-3)^2-\frac{1}{4}a$，

联立，得 $a(x-3)^2-\frac{1}{4}a=\frac{1}{10}x$，

整理，得 $20ax^2-(120a+2)x+175a=0$.

当 $\Delta=[-(120a+2)]^2-4\cdot 20a\cdot 175a=0$ 时符合题意，

解得 $a_1=\frac{-6+\sqrt{35}}{10}$，$a_2=\frac{-6-\sqrt{35}}{10}$.

当 $a_1=\frac{-6+\sqrt{35}}{10}$ 时，求得 $x=-\frac{\sqrt{35}}{2}$，不符合题意，舍去；

当 $a_2=\dfrac{-6-\sqrt{35}}{10}$ 时，求得 $x=\dfrac{\sqrt{35}}{2}$，符合题意.

答：当 $a=\dfrac{-6-\sqrt{35}}{10}$ 时，能恰好将球沿直线扣杀到点 A.

二　二次函数的综合运用

教材母题 ▶ (教材 P47 习题 22.2 第 4 题)

抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 与 x 轴的公共点是(−1，0)，(3，0)，求这条抛物线的对称轴.

解：解法一：∵点(−1，0)，(3，0)的纵坐标相等，

∴这两点是抛物线上关于对称轴对称的两个点，

∴这条抛物线的对称轴是 $x=\dfrac{(-1)+3}{2}=1$；

解法二：∵函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象与 x 轴的交点的横坐标就是方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两根 x_1，x_2，

∴$x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}=(-1)+3=2$，

∴这条抛物线的对称轴是 $x=-\dfrac{b}{2a}=1$.

【思想方法】 (1)二次函数的图象是抛物线，是轴对称图形，充分利用抛物线的轴对称性是研究二次函数的性质的关键；(2)已知二次函数图象上几个点的坐标，一般用待定系数法直接列方程(组)求解函数解析式；(3)已知二次函数图象上的一个点(除顶点外)和对称轴，便能确定与此点关于对称轴对称的另一个点的坐标.

变形 1　如图 5，抛物线 $y=x^2-mx-3(m>0)$ 交 y 轴于点 C，$CA\perp y$ 轴，交抛物线于点 A，点 B 在抛物线上，且在第一象限内，$BE\perp y$ 轴，交 y 轴于点 E，交 AO 的延长线于点 D，$BE=2AC$.

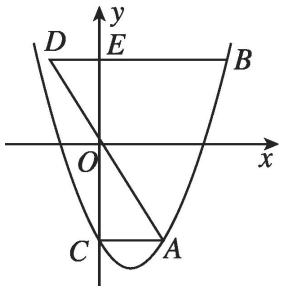


图 5

(1)用含 m 的代数式表示 BE 的长；

(2)当 $m=\sqrt{3}$时，判断点 D 是否落在抛物线上，并说明理由.

解：(1)∵点 C 的坐标为$(0，-3)$，$AC\perp OC$，

∴点 A 的纵坐标为-3，

当 $y=-3$ 时，$-3=x^2-mx-3$，

解得 $x_1=0$，$x_2=m$，

∴点 A 的坐标为$(m，-3)$，

∴$AC=m$，∴$BE=2AC=2m$；

(2)点 D 在抛物线上．理由：∵$m=\sqrt{3}$，

∴点 A 的坐标为$(\sqrt{3}，-3)$，∴直线 OA 为 $y=-\sqrt{3}x$，

∴抛物线解析式为 $y=x^2-\sqrt{3}x-3$，

∴点 B 的坐标为$(2\sqrt{3}，3)$，

∴点 D 的纵坐标为 3，

对于函数 $y=-\sqrt{3}x$，当 $y=3$ 时，$x=-\sqrt{3}$，

∴点 D 的坐标为$(-\sqrt{3}，3)$.

∵对于函数 $y=x^2-\sqrt{3}x-3$，当 $x=-\sqrt{3}$时，$y=3$，

∴点 D 落在抛物线上.

变形 2 [2018·泰安节选]如图 6，在平面直角坐标系中，二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 交 x 轴于点 $A(-4，0)$，$B(2，0)$，交 y 轴于点 $C(0，6)$，在 y 轴上有一点 $E(0，-2)$，连接 AE.

(1)求二次函数的解析式；

(2)若点 D 为抛物线在 x 轴负半轴上方的一个动点，求$\triangle ADE$ 面积的最大值.

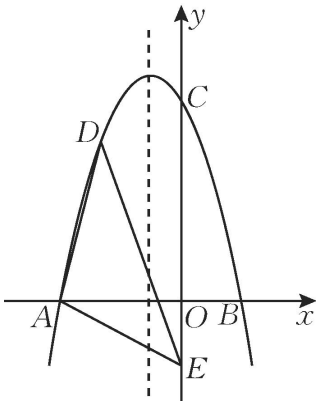
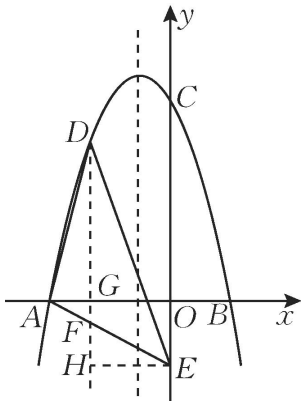


图 6



变形 2 答图

解：(1)∵二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 经过点 $A(-4,0)$，$B(2,0)$，$C(0,6)$，

$$\therefore \begin{cases} 16a-4b+c=0, \\ 4a+2b+c=0, \\ c=6, \end{cases} \text{解得} \begin{cases} a=-\dfrac{3}{4}, \\ b=-\dfrac{3}{2}, \\ c=6, \end{cases}$$

∴二次函数的解析式为 $y=-\dfrac{3}{4}x^2-\dfrac{3}{2}x+6$；

(2)由 $A(-4,0)$，$E(0,-2)$，可求 AE 所在直线解析式为 $y=-\dfrac{1}{2}x-2$，

如答图，过点 D 作 x 轴的垂线，交 AE 于点 F，交 x 轴于点 G，过点 E 作 $EH\perp DF$，垂足为 H，

设 $D\left(m,\ -\dfrac{3}{4}m^2-\dfrac{3}{2}m+6\right)$，则 $F\left(m,\ -\dfrac{1}{2}m-2\right)$，

$$\therefore DF=-\frac{3}{4}m^2-\frac{3}{2}m+6-\left(-\frac{1}{2}m-2\right)=-\frac{3}{4}m^2-m+8,$$

$\therefore S_{\triangle ADE}=S_{\triangle ADF}+S_{\triangle EDF}$