微专题八　与垂径定理有关的辅助线 [学生用书 A38]

一　连半径构造直角三角形

教材母题 ▶(教材 P83 练习第 1 题)

如图 1，在⊙O 中，弦 AB 的长为 8 cm，圆心 O 到 AB 的距离为 3 cm，求⊙O 的半径.

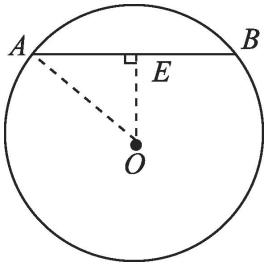


图 1

解：根据题意，得 $AE=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}\times 8=4$(cm)，$OE=3$ cm，

$\therefore OA=\sqrt{AE^2+OE^2}=\sqrt{4^2+3^2}=5$(cm).

【思想方法】 求圆中的弦长时，通常连半径，由半径、弦长的一半以及圆心到弦的距离构成直角三角形进行求解.

变形 1 [2017·呼和浩特]如图 2，CD 为⊙O 的直径，弦 $AB\perp CD$，垂足为 M，若 $AB=12$，$OM:MD=5:8$，则⊙O 的周长为(　B　)

A．26π　　B．13π

C．$\frac{96\pi}{5}$　D．$\frac{39\sqrt{10}\pi}{5}$

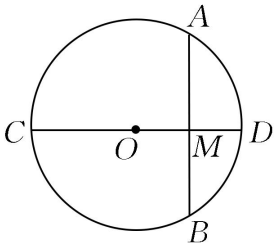
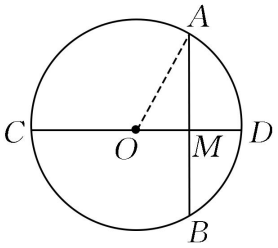


图 2



变形 1 答图

【解析】 如答图，连接 OA，设 $OM=5x$，$MD=8x$，则 $OA=OD=13x$，

又∵$AB=12$，由垂径定理可得 $AM=6$，

∴在 Rt△AOM 中，$(5x)^2+6^2=(13x)^2$，

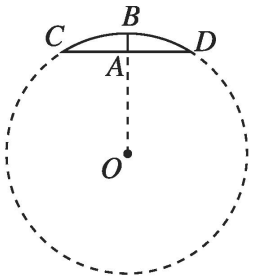
解得 $x=\frac{1}{2}$，∴半径 $OA=\frac{13}{2}$.

根据周长公式 $C=2\pi r$，得⊙O 的周长为 13π.

变形 2 《九章算术》是中国传统数学重要的著作，奠定了中国传统数学的基本框架.《九章算术》中记载：“今有圆材，埋在壁中，不知大小，以锯锯之，深一寸，锯道长一尺，问径几何？”(如图 3①)



①

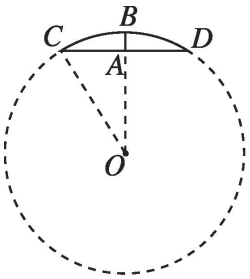


②

图 3

阅读完这段文字后，小智画出了一个圆柱截面示意图(如图②)，其中 $BO\perp CD$ 于点 A，求间径就是要求⊙O 的直径.

再次阅读后，发现 $AB=$__1__寸，$CD=$__10__寸(一尺等于十寸)，通过运用有关知识即可解决这个问题．请你补全题目条件，并帮助小智求出⊙O 的直径.



变形 2 答图

解：如答图，连接 CO.

∵$BO\perp CD$，

∴$CA=\frac{1}{2}CD=5$(寸).

设 $CO=OB=x$ 寸，则

$AO=(x-1)$寸，

∵在 Rt△CAO 中，$\angle CAO=90°$，

∴$AO^2+CA^2=CO^2$，即$(x-1)^2+5^2=x^2$，

解得 $x=13$，∴⊙O 的直径为 26 寸.

二　作弦心距巧解题

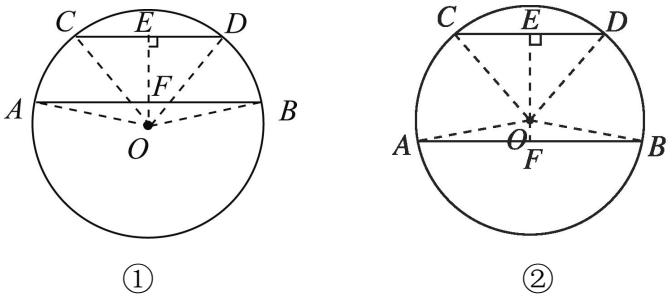
教材母题 ▶(教材 P90 习题 24.1 第 10 题)

⊙O 的半径为 13 cm，AB，CD 是⊙O 的两条弦，$AB\parallel CD$，$AB=24$ cm，$CD=10$ cm.求 AB 和 CD 之间的距离.

解：第一种情况：如答图①，两弦在圆心的同一侧时，已知 $CD=10$ cm，则 $DE=5$ cm.

∵$OD=13$ cm，∴利用勾股定理，可得 $OE=12$ cm.

同理可求 $OF=5$ cm，∴$EF=OE-OF=7$(cm)；



教材母题答图

第二种情况：如答图②，两弦在圆心异侧时，$EF=OE+OF=17$(cm).

综上所述，AB 和 CD 之间的距离为 7 cm 或 17 cm.

【思想方法】 已知弦长和圆的半径，常作弦心距，构造直角三角形，运用垂径定理和勾股定理求解.

变形 1　如图 4，在半径为 5 的⊙O 中，AB，CD 是互相垂直的两条弦，垂足为 P，且 $AB=CD=8$，则 OP 的长为(　C　)

A．3　　B．4

C．$3\sqrt{2}$　　D．$4\sqrt{2}$

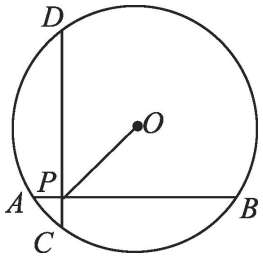
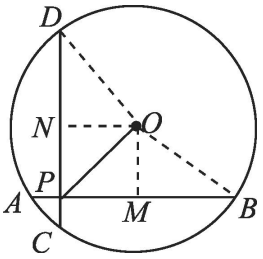


图 4



变形 1 答图

【解析】 如答图，作 $OM\perp AB$ 于点 M，$ON\perp CD$ 于点 N，连接 OB，OD.由垂径定理、勾股定理，得

$OM=ON=\sqrt{5^2-4^2}=3$，

∵弦 AB，CD 互相垂直，∴$\angle DPB=90°$，

∵$OM\perp AB$，$ON\perp CD$，∴$\angle OMP=\angle ONP=90°$，

∴四边形 $MONP$ 是矩形，∵$OM=ON$，

∴四边形 $MONP$ 是正方形，∴$OP=3\sqrt{2}$.故选 C.

变形 2 [2018·枣庄]如图 5，AB 是⊙O 的直径，弦 CD 交 AB 于点 P，$AP=2$，$BP=6$，$\angle APC=30°$，则 CD 的长为(　C　)

A.$\sqrt{15}$　　B．$2\sqrt{5}$　C．$2\sqrt{15}$　D．8

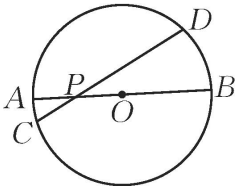
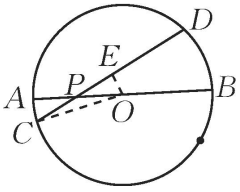


图 5



变形 2 答图

【解析】 如答图，作 $OE\perp CD$ 于 E，连接 OC，

∵$AP=2$，$BP=6$，∴$AB=8$，

∴$OA=OB=4$，∴$OP=2$，

∵$\angle APC=30°$，∴$OE=\frac{1}{2}OP=1$.

在 Rt△OCE 中，$CE=\sqrt{OC^2-OE^2}=\sqrt{15}$，

∴$CD=2CE=2\sqrt{15}$.故选 C.

变形 3 [2018·绥化]如图 6，一下水管道横截面为圆形，直径为 100 cm，下雨

前水面宽为 60 cm，一场大雨过后，水面宽为 80 cm，则水位上升__10 或 70__cm.

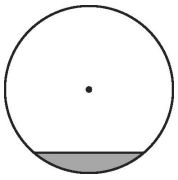
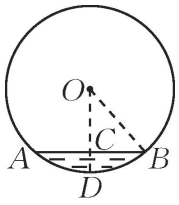


图 6



变形 3 答图

【解析】 作半径 $OD\perp AB$ 于 C，连接 OB，

由垂径定理得 $BC=\frac{1}{2}AB=30$，

在 Rt△OBC 中，$OC=\sqrt{OB^2-BC^2}=40$，

当水位上升到圆心以下时，水面宽 80 cm，

则 $OC'=\sqrt{50^2-40^2}=30$，

水面上升的高度为 40－30＝10(cm)；

当水位上升到圆心以上时，

水面上升的高度为 40＋30＝70(cm)，

综上可得，水面上升的高度为 10 cm 或 70 cm.

变形 4 [2018·海南]如图 7，在平面直角坐标系中，点 A 的坐标是(20，0)，点 B 的坐标是(16，0)，点 C，D 在以 OA 为直径的半圆 M 上，且四边形 $OCDB$ 是平行四边形，则点 C 的坐标为__(2，6)__.

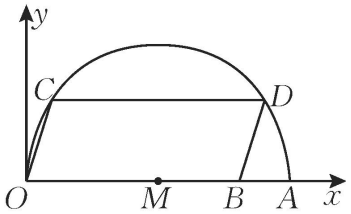
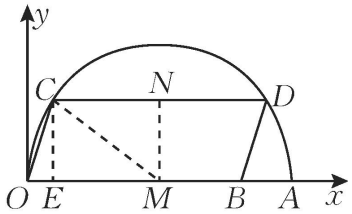


图 7



变形 4 答图

【解析】 如答图，过点 M 作 $MN\perp CD$，垂足为点 N，连接 CM，过点 C 作 $CE\perp OA$，垂足为点 E，

∵点 A 的坐标是(20，0)，∴$CM=OM=10$，

∵点 B 的坐标是(16，0)，∴$CD=OB=16$，

由垂径定理可知，$CN=\frac{1}{2}CD=8$，

在 Rt△CMN 中，$CM=10$，$CN=8$，

由勾股定理可知 $MN=6$，

∴$CE=MN=6$，$OE=OM-EM=10-8=2$，

∴点 C 的坐标为(2，6).

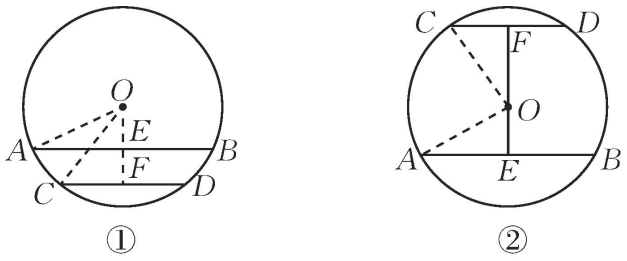
变形 5 [2018·孝感改编]已知⊙O 的半径为 10 cm，AB，CD 是⊙O 的两条弦，$AB\parallel CD$，$AB=16$ cm，$CD=12$ cm，求弦 AB 和 CD 之间的距离.

解：分两种情况：如答图①，当弦 AB 和 CD 在圆心的同侧时，∵$AB=16$ cm，$CD=12$ cm，

∴$AE=\frac{1}{2}AB=8$ cm，$CF=\frac{1}{2}CD=6$ cm，

根据勾股定理，得 $OE=\sqrt{AO^2-AE^2}=\sqrt{10^2-8^2}=6$(cm)，$OF=\sqrt{CO^2-CF^2}=8$(cm).

∴$EF=OF-OE=8-6=2$(cm).



变形 5 答图

如答图②，当弦 AB 和 CD 在圆心的异侧时，$EF=OE+OF=8+6=14$(cm).

∴弦 AB 和 CD 之间的距离是 2 cm 或 14 cm.

变形 6 如图 8，某窗户由矩形和弓形组成，已知弓形的跨度 $AB=3$ m，弓形的高 $EF=1$ m，现计划安装玻璃，请帮工程师求出$\overset{\frown}{AB}$所在⊙O 的半径.

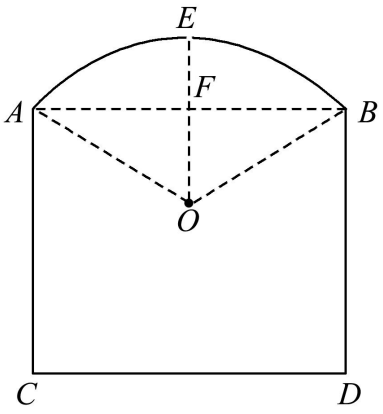


图 8

解：由垂径定理，得 $BF=\frac{1}{2}AB=1.5(\text{m})$，$OE\perp AB$，

设⊙O 的半径为 x m，则 $OF=(x-1)$m.

在 Rt△OBF 中，由勾股定理，得 $x^2=1.5^2+(x-1)^2$，

解得 $x=1.625$，即⊙O 的半径是 1.625 m.

变形 7 有一石拱桥的桥拱是圆弧形，如图 9 所示，正常水位下水面宽 $AB=60$ m，水面到拱顶距离 $CD=18$ m，当洪水泛滥时，水面到拱顶距离为 3.5 m 时需要采取紧急措施，当水面宽 $MN=32$ m 时，是否需要采取紧急措施？请说明理由.

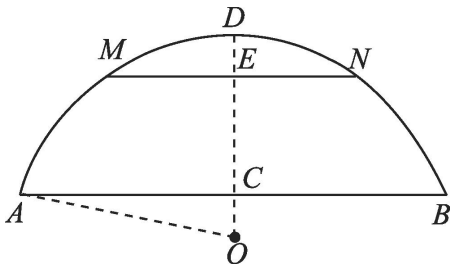
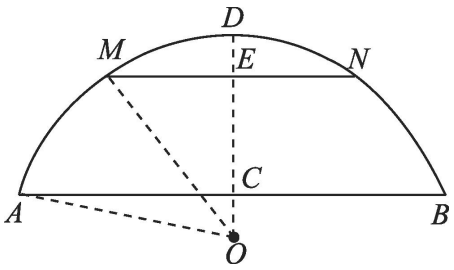


图 9



变形 7 答图

解：不需要采取紧急措施．理由：

设 $OA=R$，在 Rt△AOC 中，$AC=30$ m，$OC=(R-18)$ m，

∴$R^2=30^2+(R-18)^2$，解得 $R=34$.

如答图，连接 OM，设 $DE=x$.

在 Rt△MOE 中，$ME=16$ m，

∴$34^2=16^2+(34-x)^2$，即 $x^2-68x+256=0$，

解得 $x_1=4$，$x_2=64$(不合题意，舍去)，

∴$DE=4$ m，∵4 m＞3.5 m，

∴不需要采取紧急措施.

变形 8 某地有一座圆弧形拱桥，圆心为 O，桥下水面 AB 宽度为 7.2 m，过点 O 作 $OC\perp AB$ 于点 D，交圆弧于点 C，$CD=2.4$ m(如图 10 所示). 现有一艘宽 3 m，船舱顶部为方形并高出水面 AB 2 m 的货船要经过拱桥，此货船能否顺利通过这座拱桥？

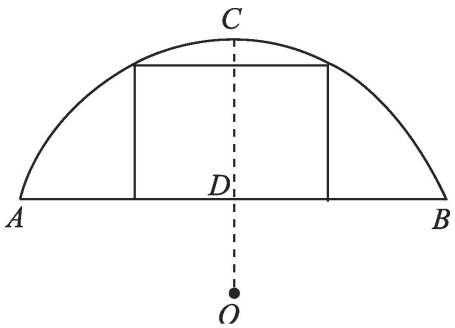
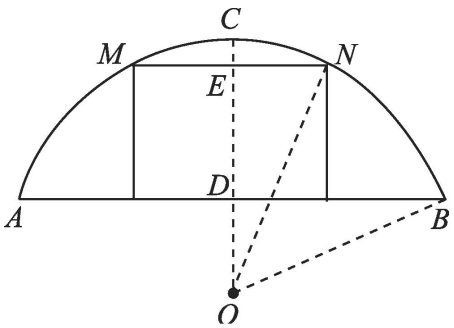


图 10



变形 8 答图

解：如答图，连接 ON，OB，设 DE 为船舱的高.

∵$OC\perp AB$，∴D 为 AB 中点. 又∵$AB=7.2$ m，

∴$BD=\frac{1}{2}AB=3.6$(m)，∵$CD=2.4$ m，

设 $OB=OC=ON=r$ m，则 $OD=(r-2.4)$m.

在 Rt△BOD 中，根据勾股定理，得 $r^2=(r-2.4)^2+3.6^2$，解得 $r=3.9$，

∵$CD=2.4$ m，船舱顶部为方形并高出水面 AB 2 m，

∴$CE=2.4-2=0.4$(m)，

∴$OE=r-CE=3.9-0.4=3.5$(m)，

在 Rt△OEN 中，$EN^2=ON^2-OE^2=3.9^2-3.5^2=2.96$，∴$EN=\sqrt{2.96}$ m，

∴$MN=2EN=2\sqrt{2.96}\approx3.44(m)>3$(m)，

∴此货船能顺利通过这座拱桥.