微专题十七　相似三角形的性质及其应用 [学生用书 B74]

教材母题 ▶(教材 P58 复习题 27 第 11 题)

如图 1，一块材料的形状是锐角三角形 ABC，边 $BC=120$ mm，高 $AD=80$ mm，把它加工成正方形零件，使正方形的一边在 BC 上，其余两个顶点分别在 AB，AC 上，这个正方形零件的边长是多少？

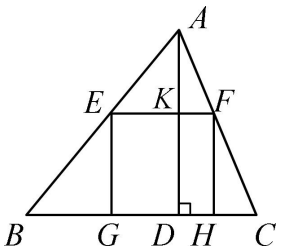


图 1

解：设正方形零件的边长为 x mm.

∵四边形 $EFHG$ 为正方形，∴$EF\parallel BC$，

∴$\angle AEF=\angle B$，$\angle AFE=\angle C$，

∴$\triangle AEF\backsim\triangle ABC$，同理$\triangle AEK\backsim\triangle ABD$，

∴$\dfrac{AK}{AD}=\dfrac{AE}{AB}=\dfrac{EF}{BC}$，即$\dfrac{80-x}{80}=\dfrac{x}{120}$.

解得 $x=48$(mm).

答：正方形零件的边长是 48 mm.

变形 1　一块材料的形状是锐角三角形，如图 2 中的$\triangle ABC$，边 $BC=120$ mm，高 $AD=80$ mm，把它加工成矩形零件，使矩形的一边在 BC 上，其余两个顶点分别在 AB，AC 上．问这个矩形的最大面积是多少？

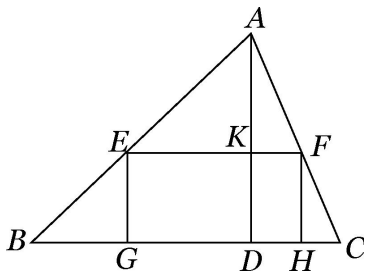


图 2

解：根据题意，得$\angle ADC=90°$，$\angle ADB=90°$.

∵四边形 $EGHF$ 是矩形，

∴$EF/\!/BC$，$\angle EGH=90°$，

∴$\angle EKD=\angle ADC=90°$，

∴$AK\perp EF$，且四边形 $EGDK$ 是矩形，

∴$EG=KD$.

设 $EG=a$ mm，矩形 $EGHF$ 的面积为 y mm^2，

则 $AK=AD-KD=(80-a)$mm.

∵$EF/\!/BC$，

∴$\angle AEF=\angle B$，$\angle AFE=\angle C$，

∴$\triangle AEF\backsim\triangle ABC$，

∴$\frac{EF}{BC}=\frac{AK}{AD}$，即$\frac{EF}{120}=\frac{80-a}{80}$，

∴$EF=\frac{3}{2}(80-a)$，

∴$y=a\cdot\frac{3}{2}(80-a)=-\frac{3}{2}(a-40)^2+2\,400$.

由二次函数的性质知，当 $a=40$ 时，y 有最大值 2 400.

∴这个矩形的最大面积是 2 400 mm^2.

变形 2 [2018·永州]如图 3①，在$\triangle ABC$ 中，矩形 $EFGH$ 的一边 EF 在 AB 上，顶点 G，H 分别在 BC，AC 上，CD 是边 AB 上的高，CD 交 GH 于点 I，若 $CI=4$，$HI=3$，$AD=\frac{9}{2}$，矩形 $DFGI$ 恰好为正方形.

(1)求正方形 $DFGI$ 的边长；

(2)如图②，延长 AB 至 P，使得 $AC=CP$，将矩形 $EFGH$ 沿 BP 的方向向右平移，当点 G 刚好落在 CP 上时，试判断移动后的矩形与$\triangle CBP$ 重叠部分的形状是三角形还是四边形，为什么？

(3)如图③，连接 DG，将正方形 $DFGI$ 绕点 D 顺时针旋转一定的角度得到正方形 $DF'G'I'$.正方形 $DF'G'I'$分别与线段 DG，DB 相交于点 M，N，求$\triangle MNG'$的周长.

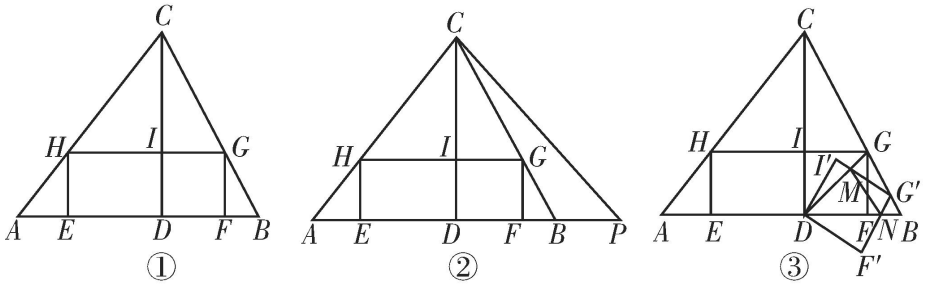


图 3

解：(1)∵ $HI \parallel AD$，∴$\frac{HI}{AD}=\frac{CI}{CD}$，∴$\frac{\frac{3}{2}}{9}=\frac{4}{CD}$，

∴$CD=6$，

∴$ID=CD-CI=2$，即正方形的边长为 2；

(2)如答图①，设点 G 落在 PC 上时对应的点为 G'，点 F 对应的点为 F'.

∵$CA=CP$，$CD\perp PA$，

∴$\angle ACD=\angle PCD$，$\angle A=\angle P$，

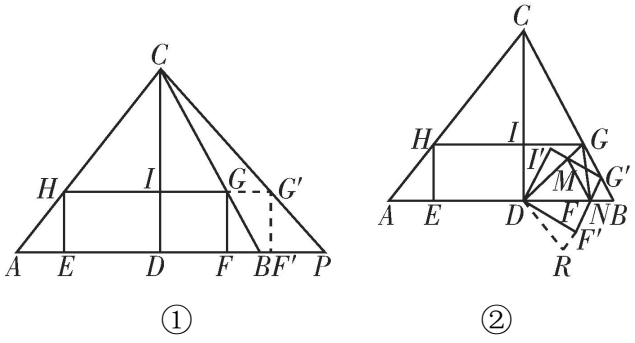
∵$HG' \parallel PA$，∴$\angle CHG'=\angle A$，$\angle CG'H=\angle P$，

∴$\angle CHG'=\angle CG'H$，∴$CH=CG'$，∴$IH=IG'=DF'=3$，

∵$IG \parallel DB$，∴$\frac{GI}{BD}=\frac{CI}{CD}$，∴$\frac{2}{DB}=\frac{4}{6}$，

∴$DB=3$，∴$DB=DF'=3$，∴点 B 与点 F'重合，

∴移动后的矩形与△CBP 重叠部分是△BGG'；



变形 2 答图

(3)如答图②，将△DMI'绕点 D 顺时针旋转 90°得到△DRF'，此时 N，F'，R 共线.

∵ $\angle MDN=\angle NDF'+\angle MDI'=\angle NDF'+\angle F'DR=\angle NDR=45°$，

又∵ $DN=DN$，$DM=DR$，∴△$NDM\cong$△NDR，

∴$MN=NR=NF'+RF'=NF'+MI'$，

∴△MNG'的周长$=MN+MG'+NG'=MG'+MI'+NG'+NF'=2I'G'=4$.