2020~2021学年度
武汉市部分学校高三起点质量检测

数学试卷参考答案及评分标准

选择题：

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	B	A	D	A	C	C	D	B	ABC	AB	BC	ABD

填空题：

13. $\frac{8\sqrt{3}}{3}\pi$　　14. -26　　15. $-2\ln 2$　　16. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

解答题：

17.（10分）

解：方案一：选条件①.

$\because \frac{S_{n+1}}{n+1}-\frac{S_n}{n}=\frac{a_1+a_{n+1}}{2}-\frac{a_1+a_n}{2}=\frac{d}{2}$ ，

$\therefore \left\{\frac{S_n}{n}\right\}$ 构成公差为 $\frac{d}{2}$ 的等差数列. ……………………………………5分

$\therefore \frac{S_1}{1}+\frac{S_2}{2}+\cdots+\frac{S_7}{7}=7S_1+\frac{7\times 6}{2}\cdot\frac{d}{2}=7a_1+\frac{21}{2}d=21$ ，

又 $a_1=-3$　$\therefore d=4$，$a_n=a_1+(n-1)d=4n-7$.

因此，选条件①时问题中的数列存在，此时 $a_n=4n-7$. ……………………………10分

方案二：选条件②.

$\frac{1}{a_na_{n+1}}=\frac{1}{a_{n+1}-a_n}(\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+1}})=\frac{1}{d}(\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+1}})$ ，

$\therefore \frac{1}{d}(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_3}+\cdots+\frac{1}{a_6}-\frac{1}{a_7})=-\frac{2}{3}$ ，

$\therefore \frac{1}{d}(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_7})=-\frac{2}{3}$ ，即 $\frac{6}{a_1a_7}=-\frac{2}{3}$. ……………………………………5分

代入 $a_1=-3$ 得 $a_7=3$ ，则 $d=\frac{1}{6}(a_7-a_1)=1$.

$\therefore a_n=a_1+(n-1)d=n-4$ ，此时 $a_4=0$ 不符合条件.

因此，选条件 ②时问题中的数列不存在. ……………………………………10分

方案三：选条件③.

$\because a_n^2-a_{n+1}^2=(a_n-a_{n+1})(a_n+a_{n+1})=-d(a_n+a_{n+1})$ ，

$\therefore -d(a_2+a_3+\cdots+a_6+a_7)=-48$ ，

$\therefore d(S_7-a_1)=48$ ，由 $S_7=7a_1+21d$，$a_1=-3$ ， ……………………………………5分

代入得 $d=2$ 或 $d=-\frac{8}{7}$（舍），

$\therefore a_n=a_1+(n-1)d=2n-5$ ，

因此，选条件③时问题中的数列存在，此时 $a_n=2n-5$. ……………………10分

18.（12分）

解：(1)设 $\angle BAD=\angle CAD=\theta$ ，

则 $\triangle ABC$ 面积 $S=\frac{1}{2}AB\cdot AC\cdot\sin 2\theta=\frac{1}{2}AB\cdot AD\cdot\sin\theta+\frac{1}{2}AC\cdot AD\cdot\sin\theta$ ，

$\therefore \frac{3}{2}\sin 2\theta=2\sin\theta$ ，

即 $3\sin\theta\cos\theta=2\sin\theta$.

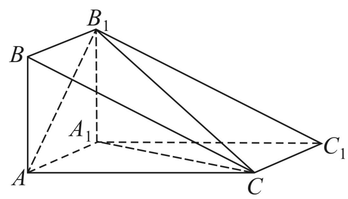
又 $\sin\theta\neq 0$ ，$\therefore \cos\theta=\frac{2}{3}$.

$\therefore \cos\angle BAD=\frac{2}{3}$. ……………………………………………………6分

(2) $\because \cos\theta=\frac{2}{3}$，$\therefore \sin\theta=\frac{\sqrt{5}}{3}$，$\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta=\frac{4\sqrt{5}}{9}$ ，

$\therefore S=\frac{1}{2}AB\cdot AC\cdot\sin 2\theta=\frac{2\sqrt{5}}{3}$. ……………………………………………………12分

19.（12分）



(1)证明：连接 A_1C ，在 $\triangle A_1AC$ 中，$A_1C^2=AA_1^2+AC^2-2AA_1\cdot AC\cdot\cos\angle A_1AC$

即 $A_1C^2=1^2+2^2-2\times1\times2\times\cos 60°=3$，于是 $A_1C^2+AA_1^2=AC^2$，

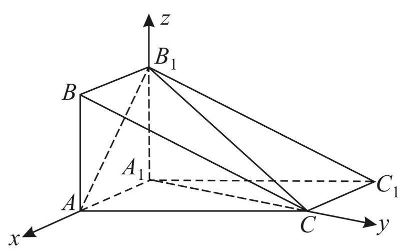
$\therefore AA_1\perp A_1C$,

又 $A_1B_1\perp$ 面 ACC_1A_1 ，$AA_1\subset$ 面 ACC_1A_1 ，$\therefore A_1B_1\perp AA_1$ ，

而 $A_1B_1\cap A_1C=A_1$ ，$\therefore AA_1\perp$ 面 A_1B_1C ，而 $B_1C\subset$ 面 A_1B_1C ，

$\therefore AA_1\perp B_1C$. ……………………………………………………6分

(2)解：如图，以 A_1 为原点，$\overrightarrow{A_1A}$ ，$\overrightarrow{A_1C}$ ，$\overrightarrow{A_1B_1}$ 的方向分别为 x 轴，y 轴，z 轴的正方向，建立如图所示的空间直角坐标系 A_1-xyz .



设 $\boldsymbol{n}=(x_1,y_1,z_1)$ 为平面 AB_1C 的法向量，

$\boldsymbol{m}=(x_2,y_2,z_2)$ 为平面 BB_1C 的法向量，

则 $A_1(0,0,0)$，$A(1,0,0)$，$C(0,\sqrt{3},0)$，$B_1(0,0,1)$，$B(1,0,1)$ ，

$\overrightarrow{AB_1}=(-1,0,1)$，$\overrightarrow{AC}=(-1,\sqrt{3},0)$，$\overrightarrow{BB_1}=(-1,0,0)$，$\overrightarrow{B_1C}=(0,\sqrt{3},-1)$ ，

由 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AB_1}=0\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AC}=0\end{cases}$ 得，$\begin{cases}-x_1+z_1=0\\ -x_1+\sqrt{3}y_1=0\end{cases}$，令 $x_1=\sqrt{3}$ ，则 $y_1=1, z_1=\sqrt{3}, \boldsymbol{n}=(\sqrt{3},1,\sqrt{3})$ ，

由 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{BB_1}=0\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{B_1C}=0\end{cases}$ 得，$\begin{cases}-x_2=0\\ \sqrt{3}y_2-z_2=0\end{cases}$，令 $y_2=1$ ，则 $z_2=\sqrt{3}, \boldsymbol{m}=(0,1,\sqrt{3})$ ，

$\therefore \cos\langle\boldsymbol{n},\boldsymbol{m}\rangle=\frac{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{m}}{|\boldsymbol{n}||\boldsymbol{m}|}=\frac{4}{\sqrt{7}\times2}=\frac{2\sqrt{7}}{7}$ ，

$\therefore$ 二面角 $A-B_1C-B$ 的平面角的余弦值为 $\frac{2\sqrt{7}}{7}$. ……………………………12分

20.（12分）

解：(1)记“三只小球恰在同一个盒子”为事件A，则 $P(A)=\frac{4}{4^3}=\frac{1}{16}$. ……………………3分

(2)记“三只小球在三个不同盒子且每只球编号与所在盒子编号不同”为事件B.

其中，三个盒子中不含4号盒子为事件 B_1，含4号盒子为事件 B_2，

则 $P(B_1)=\frac{2\times1}{4^3}=\frac{2}{64}$，$P(B_2)=\frac{C_3^2\times(1+2\times1)}{4^3}=\frac{9}{64}$.

$\because$ 事件 B_1，B_2 互斥，$\therefore P(B)=P(B_1+B_2)=P(B_1)+P(B_2)=\frac{11}{64}$. ……………………7分

(3) X 可能取值为1，2，3，4.

$P(X=1)=\frac{4^3-3^3}{4^3}=\frac{37}{64}$，

$P(X=2)=\frac{3^3-2^3}{4^3}=\frac{19}{64}$，

$P(X=3)=\frac{2^3-1^3}{4^3}=\frac{7}{64}$，

$P(X=4)=\frac{1}{4^3}=\frac{1}{64}$，

$E(X)=1\times\frac{37}{64}+2\times\frac{19}{64}+3\times\frac{7}{64}+4\times\frac{1}{64}=\frac{25}{16}$. ……………………12分

21.（12分）

解：(1)设椭圆焦距为 $2c(c>0)$，

由 $\begin{cases}b^2+c^2=a^2\\ \frac{c}{a}=\frac{1}{2}\\ \sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{7}\end{cases}$，解得 $a=2,b=\sqrt{3}$.

$\therefore$ 椭圆 E 的标准方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$. ……………………4分

(2)由题意直线 AP,BP 斜率存在且均不为0，设直线 AP 方程为 $y=k(x+r)$，$M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，

由 $\begin{cases}y=k(x+r)\\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1\end{cases}$ 得，$(3+4k^2)x^2+8k^2rx+(4k^2r^2-12)=0$.

$\therefore x_1+x_2=\frac{-8k^2r}{3+4k^2}$，$x_1x_2=\frac{4k^2r^2-12}{3+4k^2}$. ①

又 $k_{OM}+k_{ON}=\frac{y_1}{x_1}+\frac{y_2}{x_2}=\frac{k(x_1+r)}{x_1}+\frac{k(x_2+r)}{x_2}=\frac{2kx_1x_2+kr(x_1+x_2)}{x_1x_2}$， ②

从而①代入②得 $k_{OM}+k_{ON}=\frac{-6k}{k^2r^2-3}$.

又 $AP\perp BP$，以 $-\frac{1}{k}$ 替代 k，以 $-r$ 替代 r，

同理可得 $k_{OS}+k_{OT}=\frac{6k}{r^2-3k^2}$，

$\therefore \frac{-6k}{k^2r^2-3}=\frac{6k}{r^2-3k^2}$，

$\therefore (k^2+1)(r^2-3)=0$ 对 $k\neq0$ 恒成立，解得 $r=\sqrt{3}$ 或 $r=-\sqrt{3}$（舍），经检验，此时 $\Delta>0$，

因此存在 $r=\sqrt{3}$. ……………………12分

22.（12分）

解：（1）$g'(x)=1+\ln x$，

$g'(\mathrm{e})=2$，则$g(\mathrm{e})=\mathrm{e}$，

$\therefore$ 切线方程为 $y-\mathrm{e}=2(x-\mathrm{e})$，

整理得：$2x-y-\mathrm{e}=0.$ ……………………………………………4分

（2）$f'(x)=\dfrac{(x^2-1)\ln x-(x^2+1)}{(x\ln x)^2}=\dfrac{x^2-1}{(x\ln x)^2}(\ln x-\dfrac{x^2+1}{x^2-1})$，

令 $h(x)=\ln x-\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$，即$h(x)=\ln x-\dfrac{2}{x^2-1}-1$.

由 $y=\ln x$和$y=-\dfrac{2}{x^2-1}$ 在$(0,1)$和 $(1+\infty)$ 上单调递增，

$\therefore$ $h(x)$ 在$(0,1)$和 $(1+\infty)$ 上单调递增.

又 $h(\dfrac{1}{\mathrm{e}^2})=\dfrac{3-e^4}{\mathrm{e}^4-1}<0$，$h(\dfrac{1}{\mathrm{e}})=\dfrac{2}{\mathrm{e}^2-1}>0$，

$\therefore$ 存在唯一 $x_1\in(\dfrac{1}{\mathrm{e}^2},\dfrac{1}{\mathrm{e}})$，使 $h(x_1)=0$.

当 $0<x<x_1$ 时，$h(x)<0$，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增.

当 $x_1<x<1$时，$h(x)>0$，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减.

又 $h(\mathrm{e})=\dfrac{-2}{\mathrm{e}^2-1}<0$，$h(\mathrm{e}^2)=\dfrac{\mathrm{e}^4-3}{\mathrm{e}^4-1}>0$，

$\therefore$ 存在唯一 $x_2\in(\mathrm{e},\mathrm{e}^2)$，使 $h(x_2)=0$.

同理，当 $1<x<x_2$ 时，$h(x)<0$，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减.

当 $x>x_2$ 时，$h(x)>0$，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增.

$\therefore f(x)$ 恰有两个极值点 x_1 和 x_2.

$\because$ 当 $h(x_1)=0$ 时，$\ln x_1-\dfrac{x_1^2+1}{x_1^2-1}=0$，则 $h(\dfrac{1}{x_1})=-\ln x_1+\dfrac{x_1^2+1}{x_1^2-1}=0$，

又 $\dfrac{1}{x_1}\in(\mathrm{e},\mathrm{e}^2)$且$h(x_2)=0$，　$\therefore x_2=\dfrac{1}{x_1}$.

$\therefore f(x_1)+f(x_2)=\dfrac{x_1^2+1}{x_1\ln x_1}-\dfrac{x_1^2+1}{x_1\ln x_1}=0.$ ……………………………………12分