

2018~2019学年广东广州荔湾区广东广雅中学高三 上学期理科期中数学试卷

一、选择题：本大题共12小题，每小题5分，共60分

1 若复数 z 满足 $(-1 + 2i)z = -5i$ ，则 $|z|$ 的值为 () .

- A. 3 B. 5 C. $\sqrt{5}$ D. $\sqrt{3}$

2 命题“ $\forall x > 0, \ln x \geq 1 - \frac{1}{x}$ ”的否定是 () .

- A. $\exists x_0 \leq 0, \ln x_0 \geq 1 - \frac{1}{x_0}$ B. $\exists x_0 \leq 0, \ln x_0 < 1 - \frac{1}{x_0}$
C. $\exists x_0 > 0, \ln x_0 \geq 1 - \frac{1}{x_0}$ D. $\exists x_0 > 0, \ln x_0 < 1 - \frac{1}{x_0}$

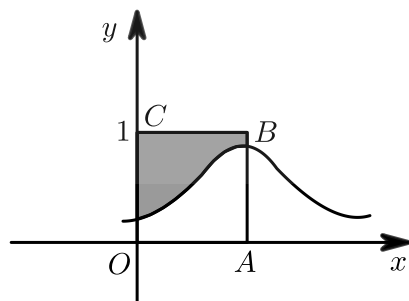
3 已知等比数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 + a_2 = 3, a_2 + a_3 = 6$ ，则 $a_8 = ()$.

- A. 243 B. 128 C. 81 D. 64

4 已知随机变量 $X \sim N(1, 1)$ ，其正态分布密度曲线如图所示，若向正方形 $OABC$ 中随机投掷10000个点，则落入阴影部分的点个数的估计值为 () .

附：若随机变量 $\xi \sim N(\mu, \sigma^2)$ ，则 $P(\mu - \sigma < \xi \leq \mu + \sigma) = 0.6826$ ，

$P(\mu - 2\sigma < \xi \leq \mu + 2\sigma) = 0.9544$.



A. 6038

B. 6587

C. 7028

D. 7539

5 若 $0 < a < b < 1$, 则 a^b , $\log_b a$, $\log_{\frac{1}{a}} b$ 的大小关系是 () .

A. $a^b > \log_b a > \log_{\frac{1}{a}} b$

B. $a^b > \log_{\frac{1}{a}} b > \log_b a$

C. $\log_b a > \log_{\frac{1}{a}} b > a^b$

D. $\log_b a > a^b > \log_{\frac{1}{a}} b$

6 在 $\triangle ABC$ 中, $AD \perp BC$, $\overrightarrow{CD} = 3\overrightarrow{DB}$, $|\overrightarrow{AD}| = 1$, 则 $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} = ()$.

A. 1

B. 2

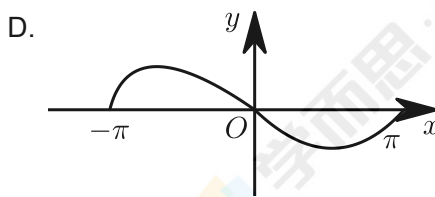
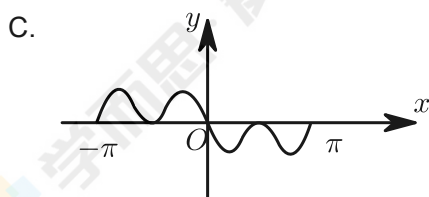
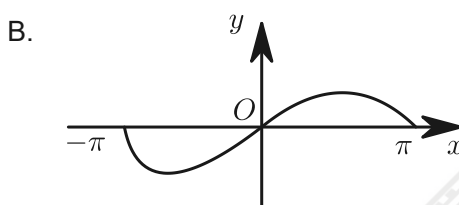
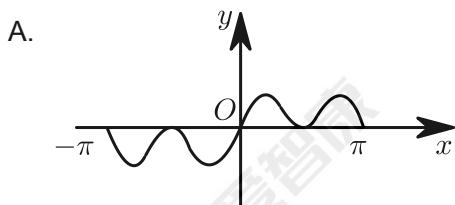
C. 3

D. 4

7 关于函数 $f(x) = 3\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) + 1$, $x \in \mathbf{R}$, 下列说法正确的是 () .

A. 由 $f(x_1) = f(x_2) = 1$, 可得 $x_1 - x_2$ 是 π 的整数倍B. $y = f(x)$ 的表达式可以改写成 $f(x) = 3\cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) + 1$ C. $y = f(x)$ 的图象关于直线 $x = -\frac{\pi}{12}$ 对称D. $y = f(x)$ 的图象关于点 $\left(\frac{3\pi}{4}, 1\right)$ 对称

8 函数 $y = \sin x(1 + \cos 2x)$ 在区间 $[-\pi, \pi]$ 上的大致图象为 () .



9 已知抛物线 $y^2 = 4x$ 的焦点为 F , 准线为 l , P 是 l 上一点, 直线 PF 与抛物线交于 M, N 两点, 若 $\overrightarrow{PF} = 3\overrightarrow{MF}$, 则 $|MN| = ()$.

A. $\frac{16}{3}$

B. 8

C. 16

D. $\frac{8\sqrt{3}}{3}$

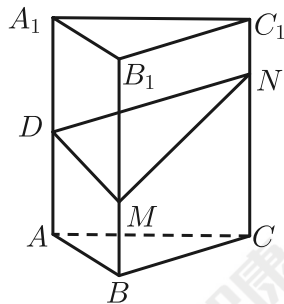
《红海行动》是一部现代化海军题材影片，该片讲述了中国海军“蛟龙突击队”奉命执行撤侨任务的故事。撤侨过程中，海军舰长要求队员们依次完成六项任务，并对任务的顺序提出了如下要求：重点任务A必须排在前三位，且任务E、F必须排在一起，则这六项任务的不同安排方案共有（ ）。

- A. 240种 B. 188种 C. 156种 D. 120种

11 已知 $M = \{\alpha | f(\alpha) = 0\}$, $N = \{\beta | g(\beta) = 0\}$, 若存在 $\alpha \in M, \beta \in N$, 使得 $|\alpha - \beta| < n$, 则称函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 互为“ n 度零点函数”, 若 $f(x) = 3^{2-x} - 1$ 与 $g(x) = x^2 - ae^x$ 互为“1度零点函数”, 则实数 a 的取值范围为（ ）。

- A. $\left(\frac{1}{e^2}, \frac{4}{e}\right]$ B. $\left(\frac{1}{e}, \frac{4}{e^2}\right]$ C. $\left[\frac{4}{e^2}, \frac{2}{e}\right)$ D. $\left[\frac{4}{e^3}, \frac{2}{e^2}\right)$

12 如图，正三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 的各条棱长均相等， D 为 AA_1 的中点， M, N 分别是线段 BB_1 和线段 CC_1 上的动点（含端点），且满足 $BM = C_1N$ ，当 M, N 运动时，下列结论中不正确的是（ ）。



- A. 平面 $DMN \perp$ 平面 BCC_1B_1
 B. 三棱锥 $A_1 - DMN$ 的体积为定值
 C. $\triangle DMN$ 可能为直角三角形
 D. 平面 DMN 与平面 ABC 所成的锐二面角范围为 $\left(0, \frac{\pi}{4}\right]$

二、填空题：每小题5分，共20分

13 已知函数 $f(x) = \begin{cases} a \cdot 2^x, & x \geq 0 \\ 2^{-2}, & x < 0 \end{cases}$, 若 $f[f(-1)] = -1$, 则实数 $a =$ _____.

知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 离心率为 $\sqrt{2}$, 则其渐近线与圆 $(x-a)^2 + y^2 = \frac{1}{4}a^2$ 的位置关系是 _____ .

15 已知二项式 $(2x-3)^n$ 的展开式中二项式系数之和为 64, 则展开式中 x^2 的系数为 _____ .

16 设有四个数的数列 a_1, a_2, a_3, a_4 , 前三个数构成一个等比数列, 其和为 k , 后三个数构成一个等差数列, 其和为 15, 且公差非零. 对于任意固定的实数 k , 若满足条件的数列个数大于 1, 则 k 的取值范围为 _____ .

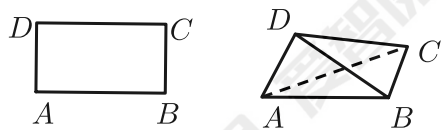
三、解答题:本大题共5个小题, 共60分

17 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = \frac{1}{2}, a_{n+1} = \frac{a_n}{2a_n + 1} (n \in \mathbf{N}^*)$.

(1) 证明数列 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 是等差数列, 并求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

(2) 若数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n = \frac{1}{2^n a_n}$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 S_n .

18 如图, 四边形 $ABCD$ 是矩形, 沿对角线 AC 将 $\triangle ACD$ 折起, 使得点 D 在平面 ABC 上的射影恰好落在边 AB 上.



(1) 求证: 平面 $ACD \perp$ 平面 BCD .

(2) 当 $\frac{AB}{AD} = 2$ 时, 求二面角 $D-AC-B$ 的余弦值.

19 光伏发电是将光能直接转变为电能的一种技术, 具有资源的充足性及潜在的经济性等优点, 在长期的能源战略中具有重要地位, 2015年起, 国家能源局、国务院扶贫办联合在6省的30个县开展光伏扶贫试点, 在某县居民中随机抽取50户, 统计其年用量得到以下统计表. 以样本的频率作为概率.

用电量 (单)	(0, 200]	(200, 400]	(400, 600]	(600, 800]	(800, 1000]
---------	----------	------------	------------	------------	-------------

位: 度)					
户数	7	8	15	13	7

- (1) 在该县居民中随机抽取10户, 记其中年用电量不超过600度的户数为 X , 求 X 的数学期望.
- (2) 在总结试点经验的基础上, 将村级光伏电站稳定为光伏扶贫的主推方式. 已知该县某自然村有居民300户. 若计划在该村安装总装机容量为300千瓦的光伏发电机组, 该机组所发电量除保证该村正常用电外, 剩余电量国家电网以0.8元/度的价格进行收购. 经测算每千瓦装机容量的发电机组年平均发电1000度, 试估计该机组每年所发电量除保证正常用电外还能该村创造直接受益多少元?

20 已知圆 $O: x^2 + y^2 = 8$, 点 $F(2, 0)$, P 为平面内一动点, 以线段 FP 为直径的圆内切于圆 O , 设动点 P 的轨迹为曲线 C .

- (1) 求曲线 C 的标准方程.
- (2) 已知过坐标原点 O 的直线 l 交曲线 C 于 A, B 两点, 若在曲线 C 上存在点 N , 使得 $|AN| = |BN|$, 求 $\triangle ABN$ 的面积的最小值.

21 已知函数 $f(x) = (x-1)e^x - \frac{t}{2}x^2$, 其中 $t \in \mathbf{R}$.

- (1) 讨论函数 $f(x)$ 的单调性.
- (2) 当 $t = 3$ 时, 证明: $\forall x_1 \in \mathbf{R}, x_2 > 0$, 不等式 $f(x_1 + x_2) - f(x_1 - x_2) > -2x_2$ 成立.

四、选做题: 共2题, 选做1题计10分

22 在极坐标系中, 直线 l 的极坐标方程为 $\rho \sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) = 2\sqrt{2}$, 以极点为原点, 极轴为 x 轴的非负半轴建立平面直角坐标系, 曲线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases} x = -1 + 2\cos\varphi \\ y = -2 + 2\sin\varphi \end{cases}$ (φ 为参数).

- (1) 求直线 l 的普通方程和曲线 C_1 的普通方程.
- (2) 若直线 C_2 为曲线 C_1 关于直线 l 的对称曲线, 点 A, B 分别为曲线 C_1, C_2 上的动点, 点 P 的平面直角坐标为 $(2, 2)$, 求 $|AP| + |BP|$ 的最小值.

22

已知函数 $f(x) = |2x - a| + |x - 1|$, $a \in \mathbf{R}$.

- (1) 若不等式 $f(x) + |x - 1| \geq 2$ 对 $\forall x \in \mathbf{R}$ 恒成立, 求实数 a 的取值范围.
- (2) 当 $a < 2$ 时, 函数 $f(x)$ 的最小值为 $a - 1$, 求实数 a 的值.

