2019～2020学年武汉市高二下期中数学模拟试卷

一、选择题：本大题共12小题，每小题5分，共60分

1 抛物线$y=2x^2$的焦点坐标为（　）．

A. $(1,0)$　　B. $\left(\frac{1}{2},0\right)$　　C. $\left(0,\frac{1}{4}\right)$　　D. $\left(0,\frac{1}{8}\right)$

答案 D

解析 抛物线$y=2x^2$的方程，即$x^2=\frac{1}{2}y$，

$\therefore p=\frac{1}{4}$，

$\therefore$焦点坐标为$\left(0,\frac{1}{8}\right)$．

故选D．

2 给定两个命题p，q．若$\neg p$是q的必要而不充分条件，则p是$\neg q$的（　）．

A. 充分而不必要条件　　B. 必要而不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

答案 A

解析 方法一：借助原命题与逆否命题等价判断．

若$\neg p$是q的必要不充分条件，则$q\Rightarrow\neg p$但$\neg p\nRightarrow q$，其逆否命题为$p\Rightarrow\neg q$但$\neg q\nRightarrow p$，

$\therefore p$是$\neg q$的充分不必要条件．

方法二：$\because\neg p$是q的必要而不充分条件，

$\therefore q$是$\neg p$的充分不必要条件，即$q\Rightarrow\neg p$，但$\neg p$不能$\Rightarrow q$．

其逆否命题为$p\Rightarrow\neg q$．但$\neg q$不能$\Rightarrow p$．

则p是$\neg q$的充分不必要条件．

故选A．

3 下列命题中错误的是（　）．

A. 命题“若$x=y$，则$\sin x=\sin y$”的逆否命题是真命题

B. 命题“$\exists x_0\in(0,+\infty)$，$\ln x_0=x_0-1$”的否定是“$\forall x\in(0,+\infty)$，$\ln x\neq x-1$”

C. 若$p\vee q$为真命题，则$p\wedge q$为真命题

D. 在$\triangle ABC$中，“$A>B$”是“$\sin A>\sin B$”的充要条件

答案 C

解析 A选项：命题“若$x=y$，则$\sin x=\sin y$”是真命题，该命题的逆否命题是真命题．故A正确；

B选项：命题“$\exists x_0>0$，$\ln x_0=x_0-1$”的否定是“$\forall x_0>0$，$\ln x_0\neq x_0-1$”．故B正确；

C选项：若$p\vee q$为真命题，则p，q至少有一个是真命题，当p，q只有一个真命题时，$p\wedge q$为假命题，故C错误；

D选项：充分性：若$A>B$，则$a>b$，

因为$b>0$，

所以$\dfrac{a}{b}>1$．

由正弦定理得$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}$，

所以$\dfrac{a}{b}=\dfrac{\sin A}{\sin B}>1$．

因为$0<B<\pi$，

所以$\sin B>0$．

所以$\sin A>\sin B$，充分性得证．

必要性：若$\sin A>\sin B$，

因为$0<B<\pi$，

所以$\sin B>0$，

所以$\dfrac{\sin A}{\sin B}>1$．

由正弦定理得$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}$，

所以$\dfrac{a}{b}=\dfrac{\sin A}{\sin B}>1$．

因为$b>0$，

所以$a>b$．

所以$A>B$，必要性得证．

所以在$\triangle ABC$中，$A>B$是$\sin A>\sin B$的充要条件．

故D正确．

故选C.

4 已知圆$C_1: x^2+y^2-2x-4y-4=0$与圆$C_2: x^2+y^2+4x-10y+25=0$相交于A、B两点，则线段AB的垂直平分线的方程为（　）．

A. $x+y-3=0$　　B. $x-y+3=0$　　C. $x+3y-1=0$　　D. $3x-y+1=0$

答案　A

解析　圆$C_1: x^2+y^2-2x-4y-4=0$圆心坐标$(1,2)$与圆$C_2: x^2+y^2+4x-10y+25=0$圆心坐标$(-2,5)$，

圆$C_1: x^2+y^2-2x-4y-4=0$与圆$C_2: x^2+y^2+4x-10y+25=0$相交于A、B两点，

线段AB的中垂线方程就是两个圆的圆心连线方程，

在AB的斜率为：-1，所求直线方程为：$y-2=-(x-1)$．

即$x+y-3=0$．

故选：A．

5 过$P(2,2)$的直线l与圆$x^2+y^2-2x+2y-2=0$相交于A，B两点，且$|AB|=2\sqrt{3}$，则直线l的方程为（　）．

A. $4x-3y-2=0$　　B. $4x-3y-2=0$或$x=2$

C. $4x-3y-2=0$或$y=2$　　D. $x=2$或$y=2$

答案　B

解析　圆$x^2+y^2-2x+2y-2=0$化为标准方程为：$(x-1)^2+(y+1)^2=4$，

则圆心坐标为$(1,-1)$，半径为2，

①当过$P(2,2)$的直线方程斜率不存在时，直线l的方程为$x=2$，

此时圆心到l的距离为1，则$|AB|=2\sqrt{4-1}=2\sqrt{3}$，符合题意；

②当过$P(2,2)$的直线方程斜率存在时，

设直线l的方程为：$y-2k(x-2)$，

即$kx-y+2-2k=0$，

$\because |AB|=2\sqrt{3}$，则圆心到直线距离为$\sqrt{4-(\sqrt{3})^2}=1$，

$\therefore \dfrac{|k+1+2-2k|}{\sqrt{k^2+1}}=1$，解得$k=\dfrac{4}{3}$，

此时直线l的方程为：$4x-3y-2=0$，

综上直线l的方程为$x=2$或$4x-3y-2=0$．

故选B．

6 椭圆$\Gamma:\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$与椭圆$\Phi:\dfrac{x^2}{25-k}+\dfrac{y^2}{9-k}=1\ (k<9)$的（　）．

A. 长轴长相等　　B. 短轴长相等　　C. 焦距相等　　D. 离心率相等

答案 C

解析 曲线$\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$的焦点在$x$轴上，其中$a=5$，$b=3$，

那么$c=4$，长轴长为10，短轴长为6，离心率$e=\dfrac{4}{5}$，

焦距为8，

曲线$\dfrac{x^2}{25-k}+\dfrac{y^2}{9-k}=1(k<9)$的焦点在$x$轴上，

其中$a_1=\sqrt{25-k}$，$b_2=\sqrt{9-k}$，$c_1=4$，

长轴长为$2\sqrt{25-k}$，

短轴长为$2\sqrt{9-k}$，离心率$e_2=\dfrac{4}{\sqrt{25-k}}$，焦距为$8$，

因此，焦距相等．

故选C．

7 已知方程$\dfrac{x^2}{4-t}+\dfrac{y^2}{t-1}=1$的曲线为$C$，下面四个命题中正确的个数是（　）．

①当$1<t<4$时，曲线C不一定是椭圆；

②当$t>4$或$t<1$时，曲线C一定是双曲线；

③若曲线C是焦点在x轴上的椭圆，则$1<t<\dfrac{5}{2}$；

④若曲线C是焦点在y轴上的双曲线，则$t>4$．

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

答案 D

解析 由方程$\frac{x^2}{4-t}+\frac{y^2}{t-1}=1$的曲线为$C$，知：

在①中，当$1<t<4$时，曲线C不一定是椭圆，比如$t=2.5$时，曲线C是圆，故①正确；

②当$t>4$或$t<1$时，$(4-t)(t-1)<0$，曲线C一定是双曲线，故②正确；

在③中，若曲线C是焦点在x轴上的椭圆，则$\begin{cases}4-t>0\\t-1>0\\4-t>t-1\end{cases}$，解得$1<t<\frac{5}{2}$，故③正确；

在④中，若曲线C是焦点在y轴上的双曲线，则$\begin{cases}4-t<0\\t-1>0\end{cases}$，解得$t>4$，故④正确 .

故选：D .

8 已知直线$3x+4y+4=0$与圆$M:x^2+y^2-2ax=0(a>0)$相切，则圆M和圆$N:(x-1)^2+(y-1)^2=1$的位置关系是（　）.

A. 相离　　B. 外切　　C. 相交　　D. 内切

答案 C

解析 圆M的标准方程为：$(x-a)^2+y^2=a^2(a>0)$，

则圆心为$(a,0)$，半径$R=a$，

圆心到直线$3x+4y+4=0$的距离$d=\frac{|3a+4|}{\sqrt{3^2+4^2}}$，

$\because$直线$3x+4y+4=0$与圆$M:x^2+y^2-2ax=0(a>0)$相切，

$\therefore\frac{|3a+4|}{\sqrt{3^2+4^2}}=a$，解得$a=2$，

则圆M的圆心为$(2,0)$，半径$R=2$，

圆$N:(x-1)^2+(y-1)^2=1$的圆心为$N(1,1)$，半径$r=1$，

则$MN=\sqrt{(2-1)^2+1}=\sqrt{2}$，

$\because R+r=3$，$R-r=1$，

$\therefore R-r<MN<R+r$，即两个圆相交 .

故选：C .

9 数学家欧拉在1765年发现，任意三角形的外心、重心、垂心位于同一条直线上，这条直线称为欧拉线 . 已知$\triangle ABC$的顶点$A(2,0)$，$B(0,4)$，若其欧拉线的方程为$x-y+2=0$，则顶点C的坐

标为（ ）.

A. $(-4,0)$　　B. $(-2,-2)$　　C. $(-3,1)$　　D. $(-4,-2)$

答案 A

解析 设$C(m,n)$，由重心坐标公式得，

三角形ABC的重心为$\left(\frac{2+m}{3},\frac{4+n}{3}\right)$，

代入欧拉线方程得：$\frac{2+m}{3}-\frac{4+n}{3}+2=0$，

整理得：$m-n+4=0$①，

AB的中点为$(1,2)$，$k_{AB}=\frac{4-0}{0-2}=-2$，

AB的中垂线方程为$y-2=\frac{1}{2}(x-1)$，即$x-2y+3=0$，

联立$\begin{cases}x-2y+3=0\\x-y+2=0\end{cases}$，解得$\begin{cases}x=-1\\y=1\end{cases}$，

$\therefore\triangle ABC$的外心为$(-1,1)$，

则$(m+1)^2+(n-1)^2=3^2+1^2=10$，

整理得：$m^2+n^2+2m-2n=8$②，

联立①②得：$m=-4$，$n=0$或$m=0$，$n=4$，

当$m=0$，$n=4$时B，C重合， 舍去 ，

$\therefore$顶点C的坐标是$(-4,0)$．

故选：A．

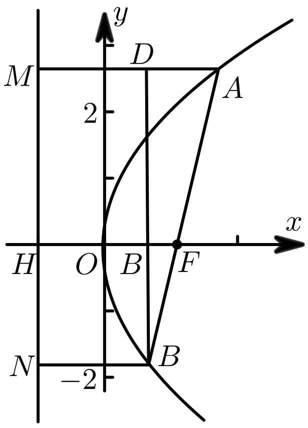
10 直线l过抛物线$y^2=4x$的焦点且与抛物线交于A，B两点， 则$4|AF|+|BF|$的最小值是（ ）．

A. 10　　B. 9　　C. 8　　D. 7

答案 B

解析 抛物线$y^2=4x$的焦点$F(1,0)$，准线方程为$x=-1$，

如图所示， 过B点作$BD\perp AD$，作$AM\perp MN$，$BN\perp MN$，



由抛物线的定义可得$AM=AF=m$，$BN=BF=n$，

$AD=m-n$，$EF=2-n$，

$\therefore \dfrac{2-n}{m-n}=\dfrac{n}{m+n}$，化简得：$\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{m}=1$，

$\therefore 4m+n=(4m+n)\cdot 1=(4m+n)\cdot\left(\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{m}\right)$

$=\dfrac{4m}{n}+\dfrac{n}{m}+5\geqslant 2\sqrt{\dfrac{4m}{n}\cdot\dfrac{n}{m}}+5=9$，

当且仅当$n=2m$时等号成立，

所以$4m+n$的最小值为 9 .

故选：B．

11 若点A，F分别是椭圆$\Gamma:\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$的左顶点和左焦点， 过点$F$的直线交曲线$\Gamma$于$M$，$N$两点，记直线$AM$，$AN$的斜率为$k_1$，$k_2$，其满足$\dfrac{1}{k_1}+\dfrac{1}{k_2}=1$，则直线$MN$的斜率为（　）.

A. 2　　　B. $\dfrac{4}{3}$　　　C. $\dfrac{6}{5}$　　　D. $\dfrac{1}{2}$

答案 B

解析 椭圆$\Gamma:\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$的左焦点为$F_2(-1,0)$，设直线$MN$的方程为$x=my-1$，设点$M(x_1，y_1)$、$N(x_2，y_2)$，

将直线MN与椭圆C的方程联立， 消去x得，$(3m^2+4)y^2-6my-9=0$，

由韦达定理得$y_1+y_2=\dfrac{6m}{3m^2+4}$，$y_1y_2=-\dfrac{9}{3m^2+4}$，

点A的坐标为$(-2,0)$，

$\dfrac{1}{k_1}+\dfrac{1}{k_2}=1$，$1=\dfrac{x_1+2}{y_1}+\dfrac{x_2+2}{y_2}=\dfrac{my_1+1}{y_1}+\dfrac{my_2+1}{y_2}=\dfrac{2my_1y_2+(y_1+y_2)}{y_1y_2}$，

化简得$(2m-1)y_1y_2+(y_1+y_2)=0$，

可得$-\frac{9}{3m^2+4}(2m-1)+\frac{6m}{3m^2+4}=0$，

化简得$4m-3=0$，解得$m=\frac{3}{4}$，

因此，直线MN的方程为：$4x-3y-4=0$．

则直线MN的斜率为：$\frac{4}{3}$．

故选：B．

12 设F_1，F_2分别是椭圆$C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左、右焦点，直线$l$过$F_1$交椭圆$C$于$A$，$B$两点，交$y$轴于$C$点，若满足$\overrightarrow{F_1C}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AF_1}$且$\angle CF_1F_2=30^\circ$，则椭圆的离心率为（　）．

A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$　　B. $\frac{\sqrt{3}}{6}$　　C. $\frac{1}{3}$　　D. $\frac{1}{6}$

答案　A

解析　设F_1，F_2分别是椭圆$C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左、右焦点，$F_1$，$(-c,0)$，直线$l$过$F_1$交椭圆$C$于$A$，$B$两点，交$y$轴于$C$点，若满足$\overrightarrow{F_1C}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AF_1}$且$\angle CF_1F_2=30^\circ$，可得$C\left(0,\frac{\sqrt{3}}{3}c\right)$，

则$\left(c,\frac{\sqrt{3}}{3}c\right)=\frac{3}{2}(-c-x,-y)$，解得$A\left(-\frac{5}{3}c,-\frac{2\sqrt{3}}{9}c\right)$，可得：$\frac{25c^2}{9a^2}+\frac{12c^2}{81b^2}=1$，即：

$\frac{25}{9}e^2+\frac{4e^2}{27(1-e^2)}=1$，$e\in(0,1)$．解得$e=\frac{\sqrt{3}}{3}$．

故选：A．

二、填空题：本大题共4小题，每小题5分，共20分

13 已知双曲线$x^2-\frac{y^2}{15}=1$上的一点P到它的一个焦点的距离等于3，则点P到另一个焦点的距离为______．

答案　5

解析　$\because$双曲线的标准方程$x^2-\frac{y^2}{15}=1$，

$\therefore a=1$，$c=4$，

设点P到另一个焦点的距离为x，

$\because$双曲线上一点P到它的一个焦点的距离等于$3=c-a$，

$\therefore$由双曲线定义知：$|x-3|=2$，解得$x=5$，或$x=1$（舍去）

$\therefore$点P到另一个焦点的距离是5 .

故答案为：5 .

14 当直线$l:(2m+1)x+(m+1)y-7m-4=0(m\in\mathbf{R})$被圆$C:(x-1)^2+(y-2)^2=25$截得的弦最短时，$m$的值为 ______ .

答案 $-\frac{3}{4}$

解析 直线$l:(2m+1)x+(m+1)y-7m-4=0$，

即$m(2x+y-7)+(x+y-4)=0$，

圆$C:(x-1)^2+(y-2)^2=25$的圆心$C(1,2)$，半径为5，

由$\begin{cases}2x+y-7=0\\x+y-4=0\end{cases}$，解得$\begin{cases}x=3\\y=1\end{cases}$，故直线$l$经过定点$A(3,1)$，

要使直线l被圆C截得的弦长最短，需CA和直线l垂直，

故有$K_{CA}\cdot K_l=-1$，即$\frac{2-1}{1-3}\cdot\left(-\frac{2m+1}{m+1}\right)=-1$，

解得$m=-\frac{3}{4}$.

故答案为：$-\frac{3}{4}$.

15 设抛物线$C:y^2=8x$的焦点为F，直线l过F且与抛物线交于P，Q两点．若$|PQ|=\frac{32}{3}$，且$|PF|>|QF|$，则$\frac{|PF|}{|QF|}=$ ______ .

答案 3

解析 抛物线$C:y^2=8x$的焦点为$F(2,0)$，

直线l过F，$y=k(x-2)$代入抛物线方程， 可得：$k^2x^2-(4k^2+8)x+4k^2=0$，

$|PQ|=\frac{32}{3}$，可得$x_1+x_2+p=\frac{32}{3}$，

即：$\frac{4k^2+8}{k^2}+4=\frac{32}{3}$，解得$k=\pm\sqrt{3}$，不妨取$k=\sqrt{3}$，

可得$2(x_1-2)=2+x_1$，$x_1=6$，则$x_2=\frac{2}{3}$，

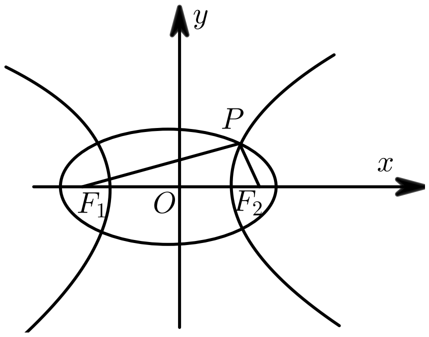
所以：$\frac{|PF|}{|QF|}=\frac{8}{2+\frac{2}{3}}=3$.

故答案为：3．

16 已知椭圆Γ：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$与双曲线$\Omega$：$\dfrac{x^2}{m^2}-\dfrac{y^2}{n^2}=1$共焦点，$F_1$、$F_2$分别为左、右焦点，曲线$\Gamma$与$\Omega$在第一象限交点为$P$，且离心率之积为1．若$\sin\angle F_1PF_2=2\sin\angle PF_1F_2$，则该双曲线的离心率为______．

答案 $\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$

解析 如图，



由椭圆定义，$|PF_1|+|PF_2|=2a$，①

由双曲线定义，$|PF_1|-|PF_2|=2m$，②

联立①②，得$|PF_1|=a+m$，$|PF_2|=a-m$，

在$\triangle PF_1F_2$中，由$\sin\angle F_1PF_2=2\sin\angle PF_1F_2$，

得$\dfrac{\sin\angle F_1PF_2}{\sin\angle PF_1F_2}=2$，即$\dfrac{2c}{|PF_2|}=2$，则$|PF_2|=c$，

$\therefore a-m=c$，

由$\dfrac{c}{a}\cdot\dfrac{c}{m}=1$，得$am=c^2$，

则$c^2-mc-m^2=0$，即$\left(\dfrac{c}{m}\right)^2-\dfrac{c}{m}-1=0$，

解得$m=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$，

$\because$双曲线的离心率大于1，

$\therefore$该双曲线的离心率为$\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$．

故答案为：$\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$．

三、解答题：本大题共6小题，共70分

17 已知命题p：方程：$\frac{x^2}{2m}+\frac{y^2}{9-m}=1$表示焦点在$y$轴上的椭圆，命题$q$：双曲线$\frac{y^2}{5}-\frac{x^2}{m}=1$的离心率$e\in\left(\frac{\sqrt{6}}{2},\sqrt{2}\right)$，若"$p\wedge q$"为假命题，"$p\vee q$"为真命题，求$m$的取值范围．

答案 见解析

解析 若p真，则有$9-m>2m>0$即$0<m<3$

若q真，则有$m>0$且$e^2=1+\frac{a^2}{b^2}=1+\frac{m}{5}\in\left(\frac{3}{2},2\right)$，解得$\frac{5}{2}<m<5$；

因为p或q为真命题，p且q为假命题，则p，q一真一假．

①若p真q假，则$0<m<3$，且$m\geqslant 5$或$m\leqslant\frac{5}{2}$即$0<m\leqslant\frac{5}{2}$，

②若p假q真，则$m\geqslant 3$或$m\leqslant 0$且$\frac{5}{2}<m<5$，即$3\leqslant m<5$，

综上，m的取值范围是$0<m\leqslant\frac{5}{2}$或$3\leqslant m<5$．

18 已知双曲线C：$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{3}=1$．

（1）求与双曲线C有共同的渐近线，且实轴长为6的双曲线的标准方程．

（2）P为双曲线C右支上一动点，点A的坐标是$(4,0)$，求$|PA|$的最小值．

答案 （1）双曲线的标准方程为$\frac{x^2}{9}-\frac{4y^2}{27}=1$或$\frac{y^2}{9}-\frac{x^2}{12}=1$．

（2）$\frac{3\sqrt{21}}{7}$．

解析 （1）由题可设所求双曲线的方程为$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{3}=\lambda$，

①当$\lambda>0$时，方程为$\frac{x^2}{4\lambda}-\frac{y^2}{3\lambda}=1$，

令$4\lambda=\left(\frac{6}{2}\right)^2$得$\lambda=\frac{9}{4}$，

即双曲线方程为$\frac{x^2}{9}-\frac{4y^2}{27}=1$，

②当$\lambda<0$时，方程为$\frac{y^2}{-3\lambda}-\frac{x^2}{-4\lambda}=1$，

令$-3\lambda=\left(\frac{6}{2}\right)^2$得$\lambda=-3$，

即双曲线方程为$\frac{y^2}{9}-\frac{x^2}{12}=1$，

$\therefore$双曲线的标准方程为$\frac{x^2}{9}-\frac{4y^2}{27}=1$或$\frac{y^2}{9}-\frac{x^2}{12}=1$．

（2）设$P(x_0,y_0)(x_0\geqslant 2)$，满足$\frac{x_0^2}{4}+\frac{y_0^2}{3}=1$，

则

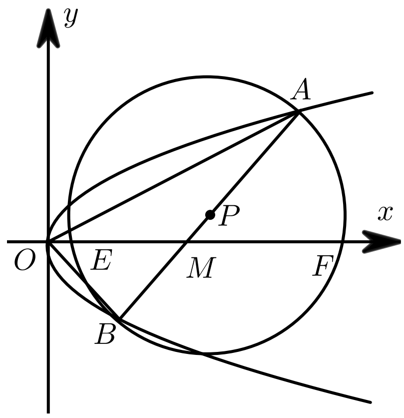
$$|PA|=\sqrt{(x_0-4)^2+y_0^2}=\sqrt{(x_0-4)^2+3\left(\frac{x_0^2}{4}-1\right)}=\sqrt{\frac{7}{4}x_0^2-8x_0+13}$$

$$=\sqrt{\frac{7}{4}\left(x_0-\frac{16}{7}\right)^2+\frac{27}{7}}$$

，

当$x_0=\dfrac{16}{7}$时，$|PA|$有最小值 为$\dfrac{3\sqrt{21}}{7}$.

19 已知直线l与抛物线$C:y^2=2x$交于点A，B两点， 与x轴交于点M，直线OA，OB的斜率之积为$-\dfrac{1}{2}$.



（1）证明：直线AB过定点 .

（2）以AB为直径的圆P交x轴于E，F两点，O为坐标原点， 求$|OE|\cdot|OF|$的值 .

答案 （1）证明见解析 .

（2）8 .

解析 （1）设直线$AB:x=my+n$，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，

由$\begin{cases}y^2=2x\\x=my+n\end{cases}$ 消去x得，$y^2-2my-2n=0$，

$\therefore\begin{cases}\Delta=4m^2+8n>0\\y_1+y_2=2m\\y_1y_2=-2n\end{cases}$，

$\because k_{OA}\cdot k_{OB}=\dfrac{y_1}{x_1}\cdot\dfrac{y_2}{x_2}=\dfrac{y_1y_2}{\frac{y_1^2y_2^2}{4}}=\dfrac{4}{y_1y_2}=-\dfrac{1}{2}$，

则$y_1y_2=-8$，那么$n=4$满足$\Delta=4m^2+8n>0$，

即$AB:x=my+4$，即AB过定点$(4,0)$.

（2）$\because$以$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，

为直径端点的圆的方程为$(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)=0$，

设$E(x_E,0)$，$F(x_F,0)$，则x_E，x_F是方程$(x-x_1)(x-x_2)+(0-y_1)(0-y_2)=0$，

即$x^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2+y_1y_2=0$的两个实根，

$\therefore$有$x_Ex_F=x_1x_2+y_1y_2=\dfrac{{y_1}^2{y_2}^2}{4}+y_1y_2=\dfrac{64}{4}-8=8$，

$\therefore|OE||OF|=|x_Ex_F|=8$．

20 已知圆心在x轴非负半轴上，半径为2的圆C与直线$x-\sqrt{3}y+2=0$相切．

（1）求圆C的方程．

（2）设不过原点O的直线l与圆$O:x^2+y^2=4$相交于不同的两点A，B．①求$\triangle OAB$的面积的最大值；②在圆C上，是否存在点$M(m,n)$，使得直线l的方程为$mx+ny=1$，且此时$\triangle OAB$的面积恰好取到①中的最大值？若存在，求出点M的坐标；若不存在，请说明理由．

答案 （1）$(x-2)^2+y^2=4$．

（2）存在满足要求的点M，其坐标是$\left(\dfrac{1}{8},\pm\dfrac{\sqrt{31}}{8}\right)$．

解析 （1）设圆心是$(x_0,0)(x_0\geqslant 0)$，它到直线$x-\sqrt{3}y+2=0$的距离是$d=2$，

则$\dfrac{|x_0+2|}{\sqrt{1^2+(-\sqrt{3})^2}}=\dfrac{|x_0+2|}{2}=2$，解得$x_0=2$或$x_0=-6$（舍去）．

$\therefore$所求圆C的方程是$(x-2)^2+y^2=4$．

（2）①设圆心O到直线AB的距离为h，则$\triangle OAB$的面积

$$S=\frac{1}{2}|AB|\cdot h=\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{4-h^2}\cdot h\leqslant\sqrt{\left(\frac{4-h^2+h^2}{2}\right)^2}=2．$$

当且仅当$h=\sqrt{2}$时等号成立，$\triangle OAB$的最大面积为2．

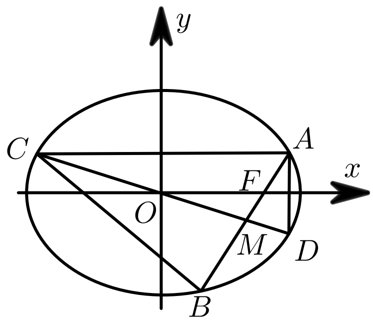
②假设存在点$M(m,n)$，使得直线l的方程为$mx+ny=1$，且此时$\triangle OAB$的面积恰好取到2，

由题得$\begin{cases}m^2+n^2\neq 0\\(m-2)^2+n^2=4\\\dfrac{|m\cdot 0+n\cdot 0-1|}{\sqrt{m^2+n^2}}=\sqrt{2}\end{cases}$，即$\begin{cases}(m-2)^2+n^2=4\\m^2+n^2=\dfrac{1}{2}\end{cases}$，

解得$\begin{cases}m=\dfrac{1}{8}\\n=\pm\dfrac{\sqrt{31}}{8}\end{cases}$，

$\therefore$存在满足要求的点M，其坐标是$\left(\frac{1}{8},\pm\frac{\sqrt{31}}{8}\right)$．

21 已知椭圆$C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$的离心率为$\frac{1}{2}$，过其右焦点$F$且与$x$轴垂直的直线交椭圆$C$于$P$，$Q$两点，椭圆$C$的右顶点为$R$，且满足$|\overrightarrow{RP}+\overrightarrow{PQ}|=2$．



（1）求椭圆C的方程．

（2）若斜率为k（其中$k\neq 0$)的直线l过点F，且与椭圆交于点A，B，弦AB的中点为M，直线OM与椭圆交于点C，D，求四边形$ACBD$面积S的取值范围．

答案 （1）$C:\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$．

（2）$(6,4\sqrt{3})$．

解析 （1）由$e=\frac{c}{a}=\frac{1}{2}$得$a=2c$，$|\overrightarrow{RP}+\overrightarrow{RQ}|=|2\overrightarrow{RF}|=2(a-c)=2$，

$\therefore\begin{cases}a=2\\c=1\end{cases}$，$b^2=a^2-c^2=3$，

$\therefore$椭圆$C:\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$．

（2）斜率为k（其中$k\neq 0$)的直线l过点F，可得直线方程为：$y=k(x-1)$，

由$\begin{cases}\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1\\y=k(x-1)\end{cases}$消$y$得$(4k^2+3)x^2-8k^2x+4k^2-12=0$，

$\therefore\Delta=12^2(k^2+1)$恒正，$x_A+x_B=\frac{8k^2}{4k^2+3}$，$x_Ax_B=\frac{4k^2-12}{4k^2+3}$，

$\therefore|AB|=\sqrt{(1+k^2)\cdot\frac{12^2(k^2+1)}{(4k^2+3)^2}}=\frac{12(k^2+1)}{4k^2+3}$，$M\left(\frac{4k^2}{4k^2+3},-\frac{3k}{4k^2+3}\right)$，

$\therefore k_{OM}=-\frac{3}{4k}$，

（此处也可以用点差法：由$\begin{cases}\frac{x_A^2}{4}+\frac{y_A^2}{3}=1\\\frac{x_B^2}{4}+\frac{y_B^2}{3}=1\end{cases}$，

得$\frac{x_A^2-x_B^2}{4}+\frac{y_A^2-y_B^2}{3}=0$，

$\therefore k=\frac{y_A-y_B}{x_A-x_B}=-\frac{3}{4}\cdot\frac{x_A+x_B}{y_A+y_B}=-\frac{3x_M}{4y_M}$，

$\therefore k_{OM}=\dfrac{y_M}{x_M}=-\dfrac{3}{4k}$，

由$\begin{cases}\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1\\ y=-\dfrac{3}{4k}x\end{cases}$ 得$\begin{cases}x=\pm\dfrac{4k}{\sqrt{4k^2+3}}\\ y=\mp\dfrac{3}{\sqrt{4k^2+3}}\end{cases}$，

即为C、D两点的坐标，

$\therefore$点C，D到直线AB的距离之和为$d_C+d_D=\dfrac{|k(x_C-1)-y_C|+|k(x_D-1)-y_D|}{\sqrt{k^2+1}}$

$=\dfrac{|[k(x_C-1)-y_C]-[k(x_D-1)-y_D]|}{\sqrt{k^2+1}}=\dfrac{|k(x_C-x_D)-(y_C-y_D)|}{\sqrt{k^2+1}}$

$=2\sqrt{\dfrac{4k^2+3}{k^2+1}}$，

$\therefore S=\dfrac{1}{2}|AB|(d_C+d_D)=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{12(k^2+1)}{4k^2+3}\times2\sqrt{\dfrac{4k^2+3}{k^2+1}}$

$=12\sqrt{\dfrac{k^2+1}{4k^2+3}}=12\sqrt{\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{4(4k^2+3)}}\in(6,4\sqrt{3})$，

$\therefore S$的取值范围：$(6,4\sqrt{3})$．

22 如图，已知A，B是椭圆$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$的长轴顶点，$P$，$Q$是椭圆上的两点，且满足$k_{AP}=2k_{QB}$，其中$k_{AP}$、$k_{QB}$分别为直线$AP$、$QB$的斜率．

（1）求证：直线AP和BQ的交点R在定直线上．

（2）求证：直线PQ过定点．

（3）求$\triangle PQB$和$\triangle PQA$面积的比值．

答案 （1）证明见解析．

（2）证明见解析．

（3）2．

解析 （1）根据题意，可设直线AP的方程为$y=k_{AP}(x-2)$，

直线BQ的方程为$y=k_{QB}(x+2)$，

则直线AP和BQ的交点R的横坐标x_0满足：$\dfrac{x_0+2}{x_0-2}=2$，即$x_0=6$．

因此直线AP和BQ的交点R在定直线$x=6$上．

（2）由（1），可设点R的坐标为$(6,m)$，

则直线AP的方程为$y=\dfrac{m}{4}(x-2)$，直线BQ的方程为$y=\dfrac{m}{8}(x+2)$，

联立方程，得$\begin{cases} y=\dfrac{m}{4}(x-2) \\ \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1 \end{cases}$，

消去y得$(m^2+12)x^2-4m^2x+4(m^2-12)=0$．

设$P(x_P,y_P)$，

则根据根与系数的关系，得$2\times x_P=\dfrac{4(m^2-12)}{m^2+12}$，

即$x_P=\dfrac{2(m^2-12)}{m^2+12}$．

代入直线AP的方程得，$y_P=-\dfrac{12m}{m^2+12}$，

故$P\left(\dfrac{2(m^2-12)}{m^2+12},-\dfrac{12m}{m^2+12}\right)$．

联立方程，得$\begin{cases} y=\dfrac{m}{8}(x+2) \\ \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1 \end{cases}$，

消去y得$(m^2+48)x^2+4m^2x+4(m^2-48)=0$．

设$Q(x_Q,y_Q)$，

则$-2\times x_Q=\dfrac{4(m^2-48)}{m^2+48}$，即$x_Q=\dfrac{2(48-m^2)}{m^2+48}$．

代入直线BQ的方程得，$y_Q=\dfrac{24m}{m^2+48}$，

故$Q\left(\dfrac{2(48-m^2)}{m^2+48},\dfrac{24m}{m^2+48}\right)$．

当$\dfrac{2(48-m^2)}{m^2+48}=\dfrac{2(m^2-12)}{m^2+12}$，即$m^2=24$时，

直线PQ与x轴的交点为$T\left(\dfrac{2}{3},0\right)$，

当$\dfrac{2(48-m^2)}{m^2+48}\neq\dfrac{2(m^2-12)}{m^2+12}$，即$m^2\neq 24$时，

下证直线PQ过点$T\left(\dfrac{2}{3},0\right)$．

$$k_{PT}-k_{QT}=\frac{\dfrac{-12m}{m^2+12}-0}{\dfrac{2(m^2-12)}{m^2+12}-\dfrac{2}{3}}-\frac{\dfrac{24m}{m^2+48}-0}{\dfrac{2(48-m^2)}{m^2+48}-\dfrac{2}{3}}$$

$$=\frac{-9m}{m^2-24}-\frac{9m}{24-m^2}$$

$=0$，

故直线PQ过定点$\left(\dfrac{2}{3},0\right)$．

（3）由题意知，$m\neq 0$，再结合（2）中相关结论知，

$S_{\triangle PQB}=\dfrac{1}{2}\cdot BT\cdot|y_Q-y_P|$，

$S_{\triangle PQA}=\dfrac{1}{2}\cdot AT\cdot|y_Q-y_P|$，

故$\dfrac{S_{\triangle PQB}}{S_{\triangle PQA}}=\dfrac{BT}{AT}=\dfrac{\dfrac{2}{3}+2}{2-\dfrac{2}{3}}=2$．