

专题 21 一元二次方程

知识点 1: 一元二次方程的定义

1. 一元二次方程: 方程两边都是整式, 只含有一个未知数(一元), 并且未知数的最高次数是 2(二次)的方程, 叫做一元二次方程.

2. 一元二次方程的一般形式.

一般地, 任何一个关于 x 的一元二次方程, 经过整理, 都能化成如下形式 $ax^2+bx+c=0$ ($a \neq 0$). 这种形式叫做一元二次方程的一般形式.

一个一元二次方程经过整理化成 $ax^2+bx+c=0$ ($a \neq 0$) 后, 其中 ax^2 是二次项, a 是二次项系数; bx 是一次项, b 是一次项系数; c 是常数项.

知识点 2: 一元二次方程的解法

(1) 开平方法: 运用开平方法解形如 $(x+m)^2=n$ ($n \geq 0$) 的方程; 领会降次——转化的数学思想.

(2) 配方法: 解一元二次方程的一般步骤是现将已知方程化为一般形式; 化二次项系数为 1; 常数项移到右边; 方程两边都加上一次项系数的一半的平方, 使左边配成一个完全平方式; 变形为 $(x+p)^2=q$ 的形式, 如果 $q \geq 0$, 方程的根是 $x=-p \pm \sqrt{q}$; 如果 $q < 0$, 方程无实根.

介绍配方法时, 首先通过实际问题引出形如 $ax^2 = s$ 的方程. 这样的方程可以化为更为简单的形如 $x^2 = t$ 的方程, 由平方根的概念, 可以得到这个方程的解. 进而举例说明如何解形如 $(mx+n)^2 = p$ 的方程. 然后举例说明一元二次方程可以化为形如 $(mx+n)^2 = p$ 的方程, 引出配方法. 最后安排运用配方法解一元二次方程的例题. 在例题中, 涉及二次项系数不是 1 的一元二次方程, 也涉及没有实数根的一元二次方程. 对于没有实数根的一元二次方程, 学了“公式法”以后, 学生对这个内容会有进一步的理解.

(3) 公式法: 一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ ($a \neq 0$) 的根由方程的系数 a 、 b 、 c 而定, 因此:

解一元二次方程时, 可以先将方程化为一般形式 $ax^2+bx+c=0$, 当 $b^2-4ac \geq 0$ 时, 将 a 、 b 、 c 代入式子

$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ 就得到方程的根. (公式所出现的运算, 恰好包括了所学过的六中运算, 加、减、乘、除、

乘方、开方, 这体现了公式的统一性与和谐性。)这个式子叫做一元二次方程的求根公式. 利用求根公式解一元二次方程的方法叫公式法.

(4) 因式分解法: 因式分解法就是利用因式分解的手段, 求出方程的解的方法, 这种方法简单易行, 是解一元二次方程最常用的方法. 主要用提公因式法、平方差公式.

知识点 3: 解有关一元二次方程的实际问题的一般步骤:

第 1 步: 审题. 认真读题, 分析题中各个量之间的关系.

第 2 步: 设未知数. 根据题意及各个量的关系设未知数.

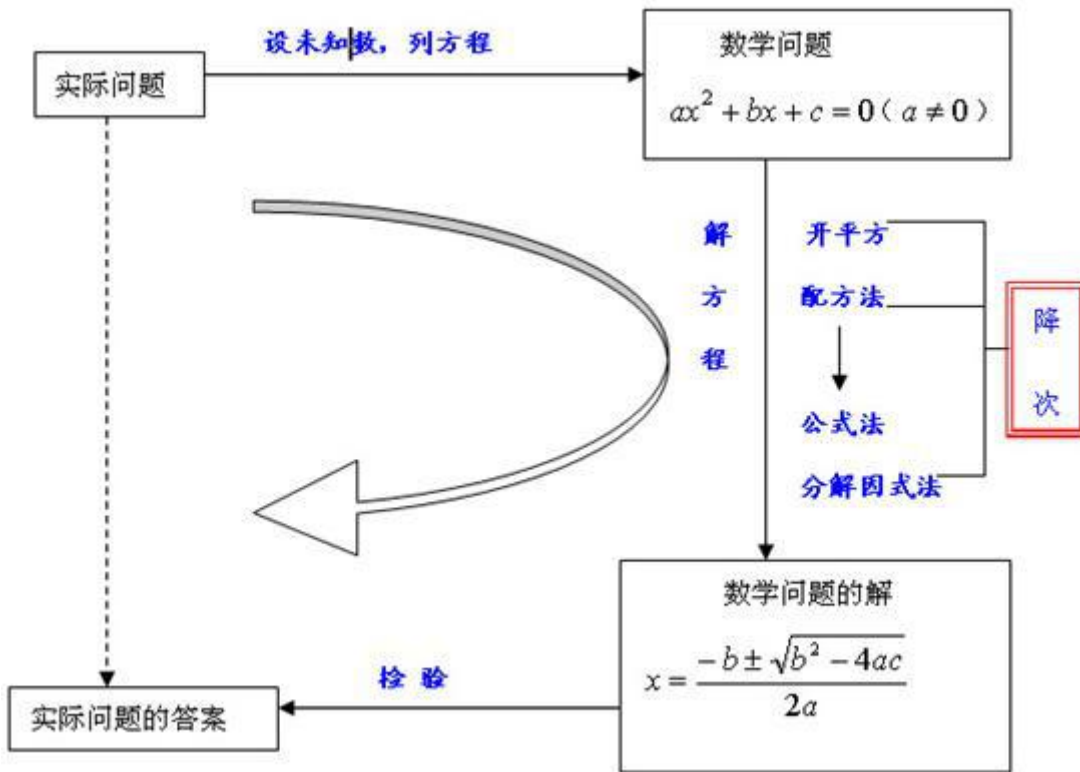
第 3 步: 列方程. 根据题中各个量的关系列出方程.

第 4 步: 解方程. 根据方程的类型采用相应的解法.

第 5 步: 检验. 检验所求得的根是否满足题意.

第 6 步: 答.

1. 对本章知识点回顾的思维导图



2. 理解韦达定理

韦达定理就是研究一元二次方程根与系数的关系的理论。

如果方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 的两个实数根是 x_1, x_2 , 那么 $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$, $x_1x_2 = \frac{c}{a}$ 。也就是说, 对于任何一个有实数根的一元二次方程, 两根之和等于方程的一次项系数除以二次项系数所得的商的相反数; 两根之积等于常数项除以二次项系数所得的商。

【例题 1】(2020·临沂) 一元二次方程 $x^2 - 4x - 8 = 0$ 的解是 ()

- A. $x_1 = -2 + 2\sqrt{3}, x_2 = -2 - 2\sqrt{3}$ B. $x_1 = 2 + 2\sqrt{3}, x_2 = 2 - 2\sqrt{3}$
 C. $x_1 = 2 + 2\sqrt{2}, x_2 = 2 - 2\sqrt{2}$ D. $x_1 = 2\sqrt{3}, x_2 = -2\sqrt{3}$

【例题 2】(2020·泸州) 已知 x_1, x_2 是一元二次方程 $x^2 - 4x - 7 = 0$ 的两个实数根, 则 $x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2^2$ 的值是_____.

【例题 3】(2020·孝感) 已知关于 x 的一元二次方程 $x^2 - (2k+1)x + \frac{1}{2}k^2 - 2 = 0$.

(1) 求证: 无论 k 为何实数, 方程总有两个不相等的实数根;

(2) 若方程的两个实数根 x_1, x_2 满足 $x_1 - x_2 = 3$, 求 k 的值.

【例题 4】(2020·湘西州) 某口罩生产厂生产的口罩 1 月份平均日产量为 20000 个, 1 月底因突然爆发新冠肺炎疫情, 市场对口罩需求量大增, 为满足市场需求, 工厂决定从 2 月份起扩大产能, 3 月份平均日产量达到 24200 个.

(1) 求口罩日产量的月平均增长率;

(2) 按照这个增长率, 预计 4 月份平均日产量为多少?

《一元二次方程》单元精品检测试卷

本套试卷满分 120 分, 答题时间 90 分钟

一、选择题 (每小题 3 分, 共 36 分)

1. (2020·凉山州) 一元二次方程 $x^2 = 2x$ 的根为 ()

- A. $x=0$ B. $x=2$ C. $x=0$ 或 $x=2$ D. $x=0$ 或 $x=-2$

2. (2020·菏泽) 等腰三角形的一边长是 3, 另两边的长是关于 x 的方程 $x^2 - 4x + k = 0$ 的两个根, 则 k 的值为 ()

- A. 3 B. 4 C. 3 或 4 D. 7

3. (2020·南京) 关于 x 的方程 $(x-1)(x+2) = p^2$ (p 为常数) 的根的情况, 下列结论中正确的是 ()

- A. 两个正根 B. 两个负根
C. 一个正根, 一个负根 D. 无实数根

4. (2020·泰安) 将一元二次方程 $x^2 - 8x - 5 = 0$ 化成 $(x+a)^2 = b$ (a, b 为常数) 的形式, 则 a, b 的值分别是 ()

- A. -4, 21 B. -4, 11 C. 4, 21 D. -8, 69

5. (2020•黔西南州) 已知关于 x 的一元二次方程 $(m-1)x^2+2x+1=0$ 有实数根, 则 m 的取值范围是 ()

- A. $m < 2$ B. $m \leq 2$ C. $m < 2$ 且 $m \neq 1$ D. $m \leq 2$ 且 $m \neq 1$

6. (2020•怀化) 已知一元二次方程 $x^2 - kx + 4 = 0$ 有两个相等的实数根, 则 k 的值为 ()

- A. $k = 4$ B. $k = -4$ C. $k = \pm 4$ D. $k = \pm 2$

7. (2020•鄂州) 目前以 5G 等为代表的战略性新兴产业蓬勃发展. 某市 2019 年底有 5G 用户 2 万户, 计划到 2021 年底全市 5G 用户数累计达到 8.72 万户. 设全市 5G 用户数年平均增长率为 x , 则 x 值为 ()

- A. 20% B. 30% C. 40% D. 50%

8. (2020•滨州) 对于任意实数 k , 关于 x 的方程 $\frac{1}{2}x^2 - (k+5)x + k^2 + 2k + 25 = 0$ 的根的情况为 ()

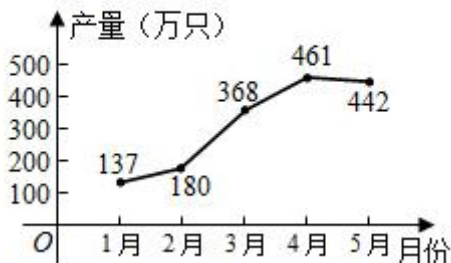
- A. 有两个相等的实数根 B. 没有实数根
C. 有两个不相等的实数根 D. 无法判定

9. (2020•黔东南州) 若菱形 $ABCD$ 的一条对角线长为 8, 边 CD 的长是方程 $x^2 - 10x + 24 = 0$ 的一个根, 则该菱形 $ABCD$ 的周长为 ()

- A. 16 B. 24 C. 16 或 24 D. 48

10. (2020•衢州) 某厂家 2020 年 1~5 月份的口罩产量统计如图所示. 设从 2 月份到 4 月份, 该厂家口罩产量的平均月增长率为 x , 根据题意可得方程 ()

2020 年 1~5 月份某厂家的口罩产量统计图



- A. $180(1-x)^2 = 461$ B. $180(1+x)^2 = 461$
C. $368(1-x)^2 = 442$ D. $368(1+x)^2 = 442$

11. (2020•铜仁市) 已知 m 、 n 、4 分别是等腰三角形(非等边三角形)三边的长, 且 m 、 n 是关于 x 的一元二次方程 $x^2 - 6x + k + 2 = 0$ 的两个根, 则 k 的值等于 ()

- A. 7 B. 7 或 6 C. 6 或 -7 D. 6

12. (2020•遵义) 已知 x_1 、 x_2 是方程 $x^2 - 3x - 2 = 0$ 的两根, 则 $x_1^2 + x_2^2$ 的值为 ()

- A. 5 B. 10 C. 11 D. 13

二、填空题(每空 3 分, 共 36 分)

13. (2020•咸宁) 若关于 x 的一元二次方程 $(x+2)^2 = n$ 有实数根, 则 n 的取值范围是_____.

14. (2020•泰州) 方程 $x^2 + 2x - 3 = 0$ 的两根为 x_1 、 x_2 , 则 $x_1 \cdot x_2$ 的值为_____.

15. (2020•北京) 已知关于 x 的方程 $x^2 + 2x + k = 0$ 有两个相等的实数根, 则 k 的值是_____.

16. (2020•枣庄) 已知关于 x 的一元二次方程 $(a-1)x^2 - 2x + a^2 - 1 = 0$ 有一个根为 $x=0$, 则 $a =$ _____.

17. (2020•烟台) 关于 x 的一元二次方程 $(m-1)x^2 + 2x - 1 = 0$ 有两个不相等的实数根, 则 m 的取值范围是_____.

18. (2020•甘孜州) 三角形的两边长分别为 4 和 7, 第三边的长是方程 $x^2 - 8x + 12 = 0$ 的解, 则这个三角形的周长是_____.

19. (2020•扬州) 方程 $(x+1)^2 = 9$ 的根是_____.

20. (2020•上海) 如果关于 x 的方程 $x^2 - 4x + m = 0$ 有两个相等的实数根, 那么 m 的值是_____.

21. (2020•天水) 一个三角形的两边长分别为 2 和 5, 第三边长是方程 $x^2 - 8x + 12 = 0$ 的根, 则该三角形的周长为_____.

22. (2020•江西) 若关于 x 的一元二次方程 $x^2 - kx - 2 = 0$ 的一个根为 $x=1$, 则这个一元二次方程的另一个根为_____.

23. (2020•成都) 关于 x 的一元二次方程 $2x^2 - 4x + m - \frac{3}{2} = 0$ 有实数根, 则实数 m 的取值范围是_____.

24. (2019 年山东省枣庄市) 已知关于 x 的方程 $ax^2 + 2x - 3 = 0$ 有两个不相等的实数根, 则 a 的取值范围

是_____.

三、解答题（7 个小题，共 48 分）

25.（6 分）（2020•徐州）（1）解方程： $2x^2 - 5x + 3 = 0$

26.（8 分）（2020•广东）已知关于 x, y 的方程组 $\begin{cases} ax + 2\sqrt{3}y = -10\sqrt{3}, \\ x + y = 4 \end{cases}$ 与 $\begin{cases} x - y = 2, \\ x + by = 15 \end{cases}$ 的解相同.

（1）求 a, b 的值；

（2）若一个三角形的一条边的长为 $2\sqrt{6}$ ，另外两条边的长是关于 x 的方程 $x^2 + ax + b = 0$ 的解. 试判断该三角形的形状，并说明理由.

27.（8 分）（2020•随州）已知关于 x 的一元二次方程 $x^2 + (2m+1)x + m - 2 = 0$.

（1）求证：无论 m 取何值，此方程总有两个不相等的实数根；

（2）若方程有两个实数根 x_1, x_2 ，且 $x_1 + x_2 + 3x_1x_2 = 1$ ，求 m 的值.

28.（8 分）（2020•鄂州）已知关于 x 的方程 $x^2 - 4x + k + 1 = 0$ 有两实数根.

（1）求 k 的取值范围；

（2）设方程两实数根分别为 x_1, x_2 ，且 $\frac{3}{x_1} + \frac{3}{x_2} = x_1x_2 - 4$ ，求实数 k 的值.

29.（8 分）（2020•南充）已知 x_1, x_2 是一元二次方程 $x^2 - 2x + k + 2 = 0$ 的两个实数根.

（1）求 k 的取值范围.

（2）是否存在实数 k ，使得等式 $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = k - 2$ 成立？如果存在，请求出 k 的值；如果不存在，请说明理由.

30.（10 分）（2020•上海）去年某商店“十一黄金周”进行促销活动期间，前六天的总营业额为 450 万元，第七天的营业额是前六天总营业额的 12%.

（1）求该商店去年“十一黄金周”这七天的总营业额；

（2）去年，该商店 7 月份的营业额为 350 万元，8、9 月份营业额的月增长率相同，“十一黄金周”这七天的总营业额与 9 月份的营业额相等. 求该商店去年 8、9 月份营业额的月增长率.