

专题 27 相似

知识点1：相似三角形定义

对应角相等，对应边成比例的两个三角形叫做相似三角形。互为相似形的三角形叫做相似三角形

知识点 2：相似三角形的判定：

定理1. 平行于三角形一边的直线(或两边的延长线)和其他两边相交, 所构成的三角形与原三角形相似;

定理2. 如果一个三角形的两个角与另一个三角形的两个角对应相等, 那么这两个三角形相似;

定理3. 如果两个三角形的两组对应边的比相等, 并且相应的夹角相等, 那么这两个三角形相似;

定理4. 如果两个三角形的三组对应边的比相等, 那么这两个三角形相似;

定理5. 斜边与一条直角边对应成比例的两直角三角形相似。

定理6. 直角三角形被斜边上的高分成的两个直角三角形与原直角三角形相似，并且分成的两个直角三角形也相似。

知识点 3：相似三角形的性质：

性质1. 相似三角形的一切对应线段(对应高、对应中线、对应角平分线、外接圆半径、内切圆半径等)的比等于相似比。

性质2. 相似三角形周长的比等于相似比。

性质3. 相似三角形面积的比等于相似比的平方。

知识点 4：位似

1. 位似图形、位似中心、位似的定义

每幅图的两个多边形不仅相似，而且对应顶点的连线相交于一点，像这样的两个图形叫做位似图形，这点叫做位似中心。这时我们说这两个图形关于这点位似。

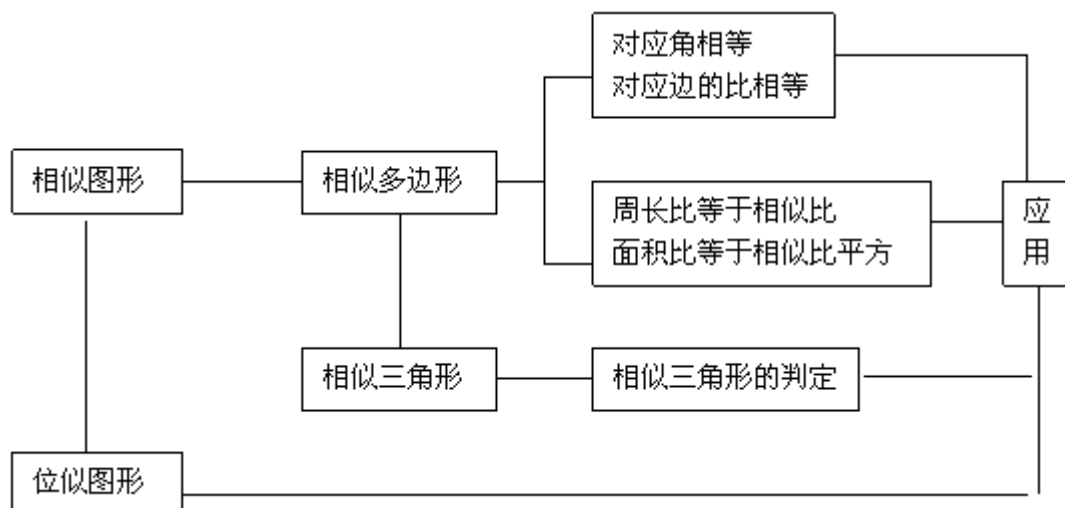
2. 位似比

两个相似图形的相似比，成为位似比。

3. 位似图形的性质。

4. 要知道用位似将一个图形放大或者缩小的办法。能说出平移、轴对称、旋转和位似之间的异同，并举出一些他们的实际应用的例子。

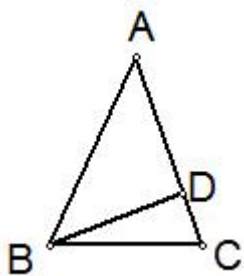
一、用思维导图记忆本单元知识内在联系



二、以一道几何题解法为例，说明添加辅助线，构造相似形的方法和技巧。

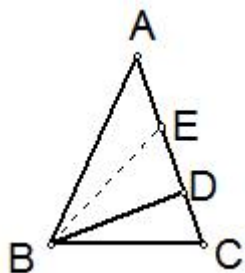
已知：如图， $\triangle ABC$ 中， $AB=AC$ ， $BD \perp AC$ 于 D 。

求证： $BC^2 = 2CD \cdot AC$ 。



整体分析：欲证 $BC^2 = 2CD \cdot AC$ ，只需证 $\frac{BC}{2CD} = \frac{AC}{BC}$ 。但因为结论中有“2”，无法直接找到它们所在的相似三角形，因此需要结合图形特点及结论形式，通过添加辅助线，对其中某一线段进行倍、分变形，构造出单一线段后，再证明三角形相似。由“2”所放的位置不同，证法也不同。

证法一（构造 2CD）：如图，我们很容易想到，在 AC 截取 $DE = DC$ ，（或者说在 AC 上取一点 E，使得 $CD = DE$ ，这样就有 $CE = 2CD$ ）



$\because BD \perp AC$ 于 D,

$\therefore BD$ 是线段 CE 的垂直平分线,

$\therefore BC = BE$, $\therefore \angle C = \angle BEC$,

又 $\because AB = AC$,

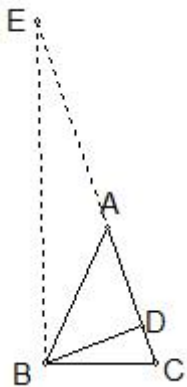
$\therefore \angle C = \angle ABC$.

$\therefore \triangle BCE \sim \triangle ACB$.

$$\therefore \frac{BC}{CE} = \frac{AC}{BC}, \quad \therefore \frac{BC}{2CD} = \frac{AC}{BC}$$

$\therefore BC^2 = 2CD \cdot AC$.

证法二（构造 2AC）：如图，在 CA 的延长线上截取 $AE = AC$ ，连结 BE，得到 $\triangle EBC$ 。



$\because AB=AC,$

$\therefore AB=AC=AE.$

$\therefore \angle EBC=90^{\circ},$

又 $\because BD \perp AC.$

$\therefore \angle EBC=\angle BDC=\angle EDB=90^{\circ},$

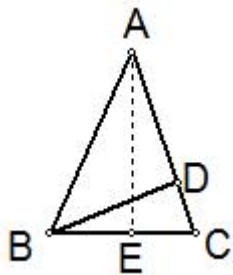
$\therefore \angle E=\angle DBC,$

$\therefore \triangle EBC \sim \triangle BDC$

$$\therefore \frac{BC}{CD} = \frac{CE}{BC} \text{ 即 } \frac{BC}{CD} = \frac{2AC}{BC}$$

$\therefore BC^2 = 2CD \cdot AC.$

证法三（构造 $\frac{1}{2}BC$ ）：如图，取 BC 的中点 E，连结 AE，则 $EC = \frac{1}{2}BC$ 。



又 $\because AB=AC,$

$$\therefore AE \perp BC, \angle ACE = \angle C$$

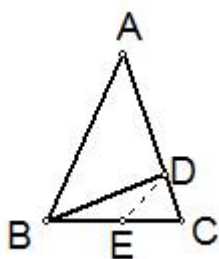
$$\therefore \angle AEC = \angle BDC = 90^\circ$$

$$\therefore \triangle ACE \sim \triangle BCD.$$

$$\therefore \frac{CE}{CD} = \frac{AC}{BC} \text{ 即 } \frac{\frac{1}{2}BC}{CD} = \frac{AC}{BC}.$$

$$\therefore BC^2 = 2CD \cdot AC.$$

证法四 (构造 $\frac{1}{2}BC$): 如图, 取 BC 中点 E, 连结 DE, 则 $CE = \frac{1}{2}BC$.



$$\because BD \perp AC, \therefore BE = EC = ED,$$

$$\therefore \angle EDC = \angle C$$

$$\text{又} \because AB = AC, \therefore \angle ABC = \angle C,$$

$$\therefore \triangle ABC \sim \triangle EDC.$$

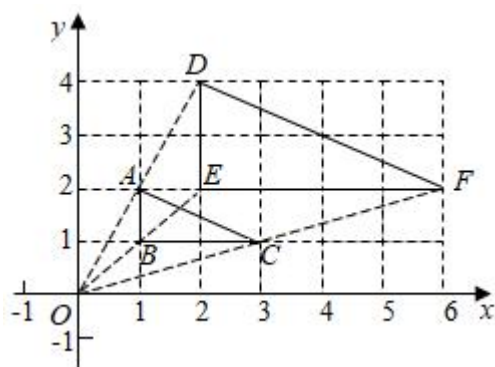
$$\therefore \frac{BC}{CD} = \frac{AC}{EC}, \text{ 即 } \frac{BC}{CD} = \frac{AC}{\frac{1}{2}BC}.$$

$$\therefore BC^2 = 2CD \cdot AC.$$

说明: 此题充分展示了添加辅助线, 构造相似形的方法和技巧. 在解题中方法要灵活, 思路要开阔.

【例题 1】(2020•重庆) 如图, 在平面直角坐标系中, $\triangle ABC$ 的顶点坐标分别是 $A(1, 2)$, $B(1, 1)$, $C(3, 1)$, 以原点为位似中心, 在原点的同侧画 $\triangle DEF$, 使 $\triangle DEF$ 与 $\triangle ABC$ 成位似图形, 且相似比为 2:1, 则线段

DF 的长度为 ()



- A. $\sqrt{5}$ B. 2 C. 4 D. $2\sqrt{5}$

【答案】D

【解析】把 A 、 C 的横纵坐标都乘以 2 得到 D 、 F 的坐标，然后利用两点间的距离公式计算线段 DF 的长.

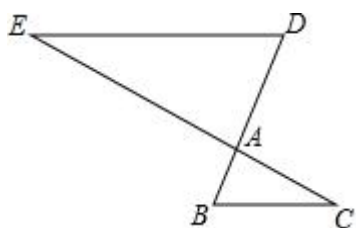
$\because$ 以原点为位似中心，在原点的同侧画 $\triangle DEF$ ，使 $\triangle DEF$ 与 $\triangle ABC$ 成位似图形，且相似比为 2: 1，

而 $A(1, 2)$ ， $C(3, 1)$ ，

$\therefore D(2, 4)$ ， $F(6, 2)$ ，

$\therefore DF = \sqrt{(2-6)^2 + (4-2)^2} = 2\sqrt{5}$.

【例题 2】(2020·盐城) 如图， $BC \parallel DE$ ，且 $BC < DE$ ， $AD = BC = 4$ ， $AB + DE = 10$ ，则 $\frac{AE}{AC}$ 的值为_____.



【解析】2

【分析】由平行线得三角形相似，得出 $AB \cdot DE$ ，进而求得 AB ， DE ，再由相似三角形求得结果.

【解析】 $\because BC \parallel DE$ ，

$\therefore \triangle ADE \sim \triangle ABC$ ，

$$\therefore \frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC} = \frac{AE}{AC}, \text{ 即 } \frac{4}{AB} = \frac{DE}{4} = \frac{AE}{AC},$$

$$\therefore AB \cdot DE = 16,$$

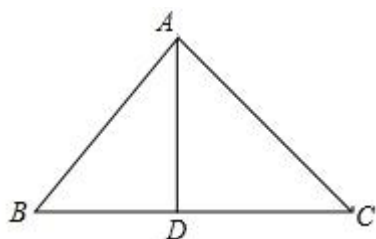
$$\therefore AB + DE = 10,$$

$$\therefore AB = 2, DE = 8,$$

$$\therefore \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC} = \frac{8}{4} = 2$$

【例题 3】（辅助线添法） 已知在 $\triangle ABC$ 中， AD 是 $\angle BAC$ 的平分线.

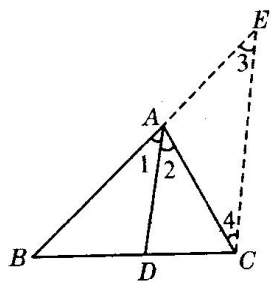
求证： $AB/AC = BD/CD$



【答案】 见解析。

【解析】 比例线段常由平行线而产生，因而研究比例线段问题，常应注意平行线的作用，在没有平行线时，可以添加平行线而促成比例线段的产生。此题中 AD 为 $\triangle ABC$ 内角 A 的平分线，这里不存在平行线，于是可考虑过定点作某定直线的平行线，添加了这样的辅助线后，就可以利用平行关系找出相应的比例线段，再比较所证的比例式与这个比例式的关系，去探求问题的解决。

证法 1：如图，过 C 点作 $CE \parallel AD$ ，交 BA 的延长线于 E 。



在 $\triangle BCE$ 中， $\because DA \parallel CE$,

$$\therefore BD/DC=BA/AE$$

又 $\because CE \parallel AD$,

$\therefore \angle 1 = \angle 3$, $\angle 2 = \angle 4$, 且 AD 平分 $\angle BAC$,

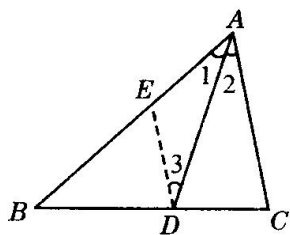
$\because \angle 1 = \angle 2$, 于是 $\angle 3 = \angle 4$,

$$\therefore AC = AE.$$

$$\therefore BD/DC=BA/AC$$

证法 2: 由于 BD 、 CD 是点 D 分 BC 而得, 故可过分点 D 作平行线.

如图, 过 D 作 $DE \parallel AC$ 交 AB 于 E , 则 $\angle 2 = \angle 3$.



$\because \angle 1 = \angle 2$, $\therefore \angle 1 = \angle 3$.

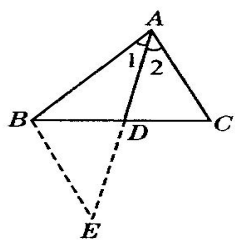
于是 $EA = ED$.

$$\text{又} \because \frac{BE}{EA} = \frac{BD}{DC},$$

$$\therefore \frac{AB}{AC} = \frac{BE}{ED} = \frac{BE}{EA},$$

$$\therefore \frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CD}.$$

证法 3: 欲证式子左边为 $AB:AC$, 而 AB 、 AC 不在同一直线上, 又不平行, 故考虑将 AB 转移到与 AC 平行的位置. 如图, 过 B 作 $BE \parallel AC$, 交 AD 的延长线于 E , 则 $\angle 2 = \angle E$.



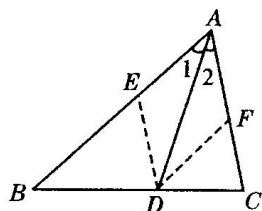
$$\therefore \angle 1 = \angle 2,$$

$$\therefore \angle 1 = \angle E, AB = BE.$$

$$\text{又} \because \frac{BD}{DC} = \frac{BE}{AC},$$

$$\therefore \frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CD}.$$

证法 4: 由于 AD 是 $\angle BAC$ 的平分线, 故可过 D 分别作 AB、AC 的平行线, 构造相似三角形求证. 如图, 过 D 点作 $DE \parallel AC$ 交 AB 于 E, $DF \parallel AB$ 交 AC 于 F.



易证四边形 AEDF 是菱形. 则 $DE = DF$.

由 $\triangle BDE \sim \triangle DFC$, 得

$$\frac{BD}{DC} = \frac{BE}{DF} = \frac{BE}{DE}.$$

$$\text{又} \because \frac{BE}{DE} = \frac{AB}{AC},$$

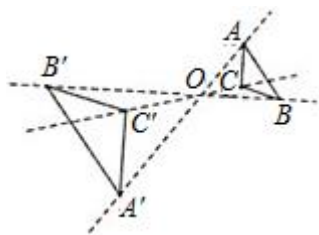
$$\therefore \frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC}.$$

《相似》单元精品检测试卷

本套试卷满分 120 分，答题时间 90 分钟

一、选择题（每小题 3 分，共 30 分）

1. （2019 湖南邵阳）如图，以点 O 为位似中心，把 $\triangle ABC$ 放大为原图形的 2 倍得到 $\triangle A'B'C'$ ，以下说法中错误的是（ ）



- A. $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$
- B. 点 C 、点 O 、点 C' 三点在同一直线上
- C. $AO:AA' = 1:2$
- D. $AB \parallel A'B'$

【答案】C

【解析】直接利用位似图形的性质进而分别分析得出答案.

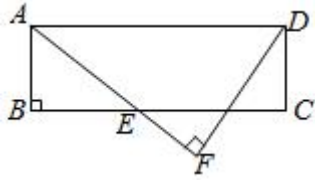
解：∵以点 O 为位似中心，把 $\triangle ABC$ 放大为原图形的 2 倍得到 $\triangle A'B'C'$ ，

∴ $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ ，点 C 、点 O 、点 C' 三点在同一直线上， $AB \parallel A'B'$ ，

$AO:OA' = 1:2$ ，故选项 C 错误，符合题意.

【点评】此题主要考查了位似变换，正确把握位似图形的性质是解题关键.

2. （2020•牡丹江）如图，在矩形 $ABCD$ 中， $AB=3$ ， $BC=10$ ，点 E 在 BC 边上， $DF \perp AE$ ，垂足为 F . 若 $DF=6$ ，则线段 EF 的长为（ ）



A. 2

B. 3

C. 4

D. 5

【答案】B

【分析】证明 $\triangle AFD \sim \triangle EBA$ ，得到 $\frac{AF}{BE} = \frac{AD}{AE} = \frac{DF}{AB}$ ，求出 AF ，即可求出 AE ，从而可得 EF 。

【解析】 $\because$ 四边形 $ABCD$ 为矩形，

$$\therefore AB = CD = 3, BC = AD = 10, AD \parallel BC,$$

$$\therefore \angle AEB = \angle DAF,$$

$$\therefore \triangle AFD \sim \triangle EBA,$$

$$\therefore \frac{AF}{BE} = \frac{AD}{AE} = \frac{DF}{AB},$$

$$\because DF = 6,$$

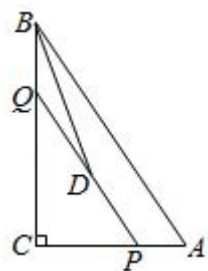
$$\therefore AF = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8,$$

$$\therefore \frac{8}{BE} = \frac{10}{AE} = \frac{6}{3},$$

$$\therefore AE = 5,$$

$$\therefore EF = AF - AE = 8 - 5 = 3.$$

3. (2019•海南省) 如图，在 $Rt\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $AB = 5$ ， $BC = 4$ 。点 P 是边 AC 上一动点，过点 P 作 $PQ \parallel AB$ 交 BC 于点 Q ， D 为线段 PQ 的中点，当 BD 平分 $\angle ABC$ 时， AP 的长度为 ()



A. $\frac{8}{13}$

B. $\frac{15}{13}$

C. $\frac{25}{13}$

D. $\frac{32}{13}$

【答案】B.

【解析】本题考查的是相似三角形的判定和性质，掌握相似三角形的判定定理和性质定理是解题的关键．

根据勾股定理求出 AC ，根据角平分线的定义、平行线的性质得到 $\angle QBD = \angle BDQ$ ，得到 $QB = QD$ ，根据相似三角形的性质列出比例式，计算即可．

$$\because \angle C = 90^\circ, AB = 5, BC = 4,$$

$$\therefore AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} = 3,$$

$$\because PQ \parallel AB,$$

$$\therefore \angle ABD = \angle BDQ, \text{ 又 } \angle ABD = \angle QBD,$$

$$\therefore \angle QBD = \angle BDQ,$$

$$\therefore QB = QD,$$

$$\therefore QP = 2QB,$$

$$\because PQ \parallel AB,$$

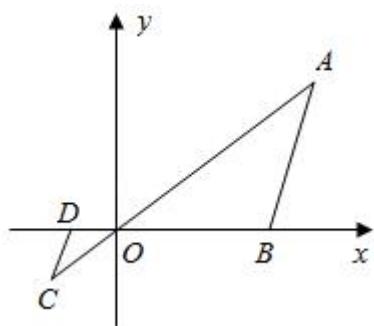
$$\therefore \triangle CPQ \sim \triangle CAB,$$

$$\therefore \frac{CP}{CA} = \frac{CQ}{CB} = \frac{PQ}{AB}, \text{ 即 } \frac{CP}{3} = \frac{4-QB}{4} = \frac{2QB}{5},$$

$$\text{解得, } CP = \frac{24}{13},$$

$$\therefore AP = CA - CP = \frac{15}{13}$$

4. (2020•嘉兴) 如图，在直角坐标系中， $\triangle OAB$ 的顶点为 $O(0, 0)$ ， $A(4, 3)$ ， $B(3, 0)$ 。以点 O 为位似中心，在第三象限内作与 $\triangle OAB$ 的位似比为 $\frac{1}{3}$ 的位似图形 $\triangle OCD$ ，则点 C 坐标 ()



- A. $(-1, -1)$ B. $(-\frac{4}{3}, -1)$ C. $(-1, -\frac{4}{3})$ D. $(-2, -1)$

【答案】B

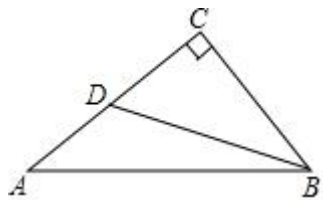
【分析】根据关于以原点为位似中心的对应点的坐标的关系，把 A 点的横纵坐标都乘以 $-\frac{1}{3}$ 即可。

【解析】 $\because$ 以点 O 为位似中心，位似比为 $\frac{1}{3}$ ，

而 $A(4, 3)$ ，

$\therefore A$ 点的对应点 C 的坐标为 $(-\frac{4}{3}, -1)$ 。

5. (2020•安徽) 如图， $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle C=90^\circ$ ，点 D 在 AC 上， $\angle DBC=\angle A$ 。若 $AC=4$ ， $\cos A=\frac{4}{5}$ ，则 BD 的长度为 ()



- A. $\frac{9}{4}$ B. $\frac{12}{5}$ C. $\frac{15}{4}$ D. 4

【答案】C

【分析】在 $\triangle ABC$ 中，由三角函数求得 AB ，再由勾股定理求得 BC ，最后在 $\triangle BCD$ 中由三角函数求得 BD 。

【解析】 $\because \angle C=90^\circ$ ， $AC=4$ ， $\cos A=\frac{4}{5}$ ，

$$\therefore AB=\frac{AC}{\cos A}=5,$$

$$\therefore BC=\sqrt{AB^2-AC^2}=3,$$

$$\because \angle DBC=\angle A.$$

$$\therefore \cos \angle DBC=\cos \angle A=\frac{BC}{BD}=\frac{4}{5},$$

$$\therefore BD=3 \times \frac{5}{4}=\frac{15}{4}$$

6. (2020•无锡) 如图，等边 $\triangle ABC$ 的边长为3，点 D 在边 AC 上， $AD=\frac{1}{2}$ ，线段 PQ 在边 BA 上运动， $PQ=\frac{1}{2}$ ，有下列结论：

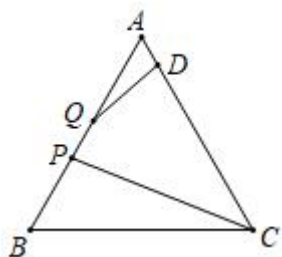
① CP 与 QD 可能相等；

② $\triangle AQD$ 与 $\triangle BCP$ 可能相似；

③四边形 $PCDQ$ 面积的最大值为 $\frac{31\sqrt{3}}{16}$ ；

④四边形 $PCDQ$ 周长的最小值为 $3+\frac{\sqrt{37}}{2}$ 。

其中，正确结论的序号为（ ）



A. ①④

B. ②④

C. ①③

D. ②③

【答案】D

【解析】①利用图象法可知 $PC > DQ$ ，故①错误。

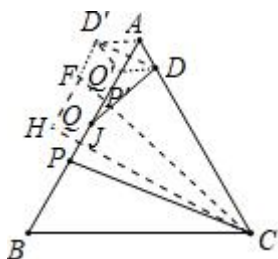
② $\because \angle A = \angle B = 60^\circ$ ， $\therefore$ 当 $\angle ADQ = \angle CPB$ 时， $\triangle ADQ \sim \triangle BPC$ ，故②正确。

③ 设 $AQ = x$ ，则四边形 $PCDQ$ 的面积 $= \frac{\sqrt{3}}{4} \times 3^2 - \frac{1}{2} \times x \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \times 3 \times (3 - x - \frac{1}{2}) \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{8} + \frac{5\sqrt{3}}{8}x$ ，

$\because x$ 的最大值为 $3 - \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$ ，

$\therefore x = \frac{5}{2}$ 时，四边形 $PCDQ$ 的面积最大，最大值 $= \frac{31\sqrt{3}}{16}$ ，故③正确，

如图，作点 D 关于 AB 的对称点 D' ，作 $D'F \parallel PQ$ ，使得 $D'F = PQ$ ，连接 CF 交 AB 于点 P' ，此时四边形 $P'CD'Q'$ 的周长最小。



过点 C 作 $CH \perp D'F$ 交 $D'F$ 的延长线于 H ，交 AB 于 J 。

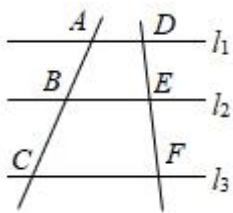
由题意， $DD' = 2AD \cdot \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ， $HJ = \frac{1}{2}DD' = \frac{\sqrt{3}}{4}$ ， $CJ = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ ， $FH = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ ，

$\therefore CH = CJ + HJ = \frac{7\sqrt{3}}{4}$ ，

$\therefore CF = \sqrt{FH^2 + CH^2} = \sqrt{(\frac{3}{4})^2 + (\frac{7\sqrt{3}}{4})^2} = \frac{\sqrt{39}}{2}$ ，

$\therefore$ 四边形 $P'CD'Q'$ 的周长的最小值 $= 3 + \frac{\sqrt{39}}{2}$ ，故④错误。

7. (2020•成都) 如图，直线 $l_1 \parallel l_2 \parallel l_3$ ，直线 AC 和 DF 被 l_1 ， l_2 ， l_3 所截， $AB=5$ ， $BC=6$ ， $EF=4$ ，则 DE 的长为 ()



A. 2

B. 3

C. 4

D. $\frac{10}{3}$

【答案】D

【分析】根据平行线分线段成比例定理得出比例式，代入求出即可．

【解析】 $\because$ 直线 $l_1 \parallel l_2 \parallel l_3$,

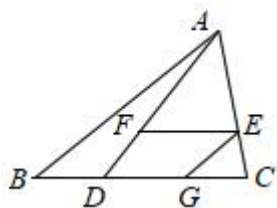
$$\therefore \frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF},$$

$$\because AB=5, BC=6, EF=4,$$

$$\therefore \frac{5}{6} = \frac{DE}{4},$$

$$\therefore DE = \frac{10}{3}$$

8. (2020•哈尔滨) 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, 点 D 在 BC 边上, 连接 AD , 点 E 在 AC 边上, 过点 E 作 $EF \parallel BC$, 交 AD 于点 F , 过点 E 作 $EG \parallel AB$, 交 BC 于点 G , 则下列式子一定正确的是 ()



A. $\frac{AE}{EC} = \frac{EF}{CD}$

B. $\frac{EF}{CD} = \frac{EG}{AB}$

C. $\frac{AF}{FD} = \frac{BG}{GC}$

D. $\frac{CG}{BC} = \frac{AF}{AD}$

【答案】C

【分析】根据平行线分线段成比例性质进行解答便可．

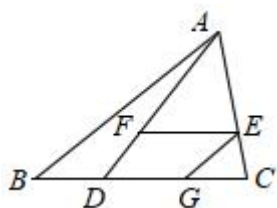
【解析】 $\because EF \parallel BC$,

$$\therefore \frac{AF}{FD} = \frac{AE}{EC},$$

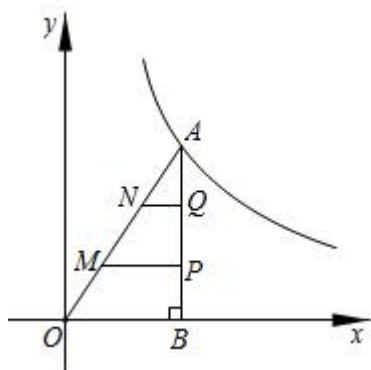
$$\because EG \parallel AB,$$

$$\therefore \frac{AE}{EC} = \frac{BG}{GC},$$

$$\therefore \frac{AF}{FD} = \frac{BG}{GC}$$



9. (2020•遵义) 如图, $\triangle ABO$ 的顶点 A 在函数 $y = \frac{k}{x}$ ($x > 0$) 的图象上, $\angle ABO = 90^\circ$, 过 AO 边的三等分点 M 、 N 分别作 x 轴的平行线交 AB 于点 P 、 Q . 若四边形 $MNPQ$ 的面积为 3, 则 k 的值为 ()



A. 9

B. 12

C. 15

D. 18

【答案】D

【分析】易证 $\triangle ANQ \sim \triangle AMP \sim \triangle AOB$, 由相似三角形的性质: 面积比等于相似比的平方可求出 $\triangle ANQ$ 的面积, 进而可求出 $\triangle AOB$ 的面积, 则 k 的值也可求出.

【解析】

$$\because NQ \parallel MP \parallel OB,$$

$$\therefore \triangle ANQ \sim \triangle AMP \sim \triangle AOB,$$

$\because M, N$ 是 OA 的三等分点,

$$\therefore \frac{AN}{AM} = \frac{1}{2}, \quad \frac{AN}{AO} = \frac{1}{3},$$

$$\therefore \frac{S_{\triangle ANQ}}{S_{\triangle AMP}} = \frac{1}{4},$$

$\because$ 四边形 $MNPQ$ 的面积为 3,

$$\therefore \frac{S_{\triangle ANQ}}{3 + S_{\triangle ANQ}} = \frac{1}{4},$$

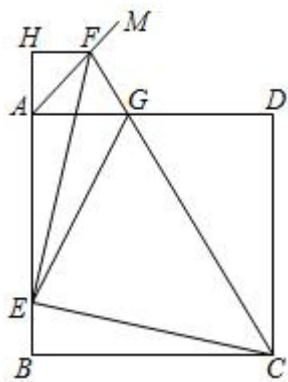
$$\therefore S_{\triangle ANQ} = 1,$$

$$\therefore \frac{1}{S_{\triangle AOB}} = \left(\frac{AN}{AO}\right)^2 = \frac{1}{9},$$

$$\therefore S_{\triangle AOB} = 9,$$

$$\therefore k = 2S_{\triangle AOB} = 18$$

10. (2020•铜仁市) 如图, 正方形 $ABCD$ 的边长为 4, 点 E 在边 AB 上, $BE=1$, $\angle DAM=45^\circ$, 点 F 在射线 AM 上, 且 $AF=\sqrt{2}$, 过点 F 作 AD 的平行线交 BA 的延长线于点 H , CF 与 AD 相交于点 G , 连接 EC 、 EG 、 EF . 下列结论: ① $\triangle ECF$ 的面积为 $\frac{17}{2}$; ② $\triangle AEG$ 的周长为 8; ③ $EG^2 = DG^2 + BE^2$; 其中正确的是 ()



A. ①②③

B. ①③

C. ①②

D. ②③

【答案】C

【解析】如图，在正方形 $ABCD$ 中， $AD \parallel BC$ ， $AB=BC=AD=4$ ， $\angle B=\angle BAD=90^\circ$ ，

$$\therefore \angle HAD=90^\circ，$$

$$\because HF \parallel AD, \therefore \angle H=90^\circ，$$

$$\because \angle HAF=90^\circ - \angle DAM=45^\circ，$$

$$\therefore \angle AFH=\angle HAF.$$

$$\because AF=\sqrt{2}, \therefore AH=HF=1=BE. \therefore EH=AE+AH=AB-BE+AH=4=BC,$$

$$\therefore \triangle EHF \cong \triangle CBE \text{ (SAS)}, \therefore EF=EC, \angle HEF=\angle BCE,$$

$$\because \angle BCE+\angle BEC=90^\circ, \therefore \angle HEF+\angle BEC=90^\circ, \therefore \angle FEC=90^\circ,$$

$\therefore \triangle CEF$ 是等腰直角三角形，

在 $\text{Rt}\triangle CBE$ 中， $BE=1$ ， $BC=4$ ，

$$\therefore EC^2=BE^2+BC^2=17,$$

$$\therefore S_{\triangle ECF}=\frac{1}{2}EF \cdot EC=\frac{1}{2}EC^2=\frac{17}{2}, \text{ 故①正确;}$$

过点 F 作 $FQ \perp BC$ 于 Q ，交 AD 于 P ，

$$\therefore \angle APF=90^\circ = \angle H = \angle HAD,$$

$\therefore$ 四边形 $APFH$ 是矩形，

$$\because AH=HF, \therefore \text{矩形 } AHFP \text{ 是正方形}, \therefore AP=PF=AH=1,$$

同理：四边形 $ABQP$ 是矩形，

$$\therefore PQ=AB=4, BQ=AP=1, FQ=FP+PQ=5, CQ=BC-BQ=3,$$

$$\because AD \parallel BC, \therefore \triangle FPG \sim \triangle FQC,$$

$$\therefore \frac{FP}{FQ} = \frac{PG}{CQ}, \therefore \frac{1}{5} = \frac{PG}{3}, \therefore PG = \frac{3}{5}, \therefore AG = AP + PG = \frac{8}{5},$$

在 $\text{Rt}\triangle EAG$ 中，根据勾股定理得， $EG = \sqrt{AG^2 + AE^2} = \frac{17}{5}$ ，

$\therefore \triangle AEG$ 的周长为 $AG + EG + AE = \frac{8}{5} + \frac{17}{5} + 3 = 8$ ，故②正确；

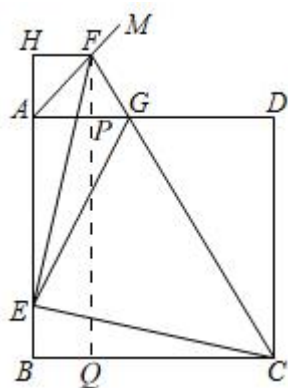
$\because AD = 4$ ， $\therefore DG = AD - AG = \frac{12}{5}$ ，

$\therefore DG^2 + BE^2 = \frac{144}{25} + 1 = \frac{169}{25}$ ，

$\because EG^2 = \left(\frac{17}{5}\right)^2 = \frac{289}{25} \neq \frac{169}{25}$ ，

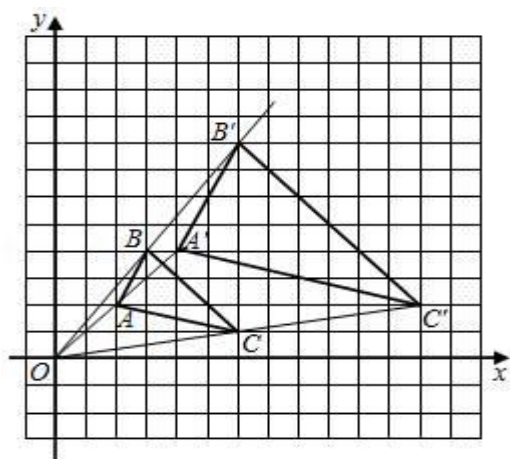
$\therefore EG^2 \neq DG^2 + BE^2$ ，故③错误，

$\therefore$ 正确的有①②，



二、填空题（每空 3 分，共 30 分）

11. （2019 广西百色）如图， $\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 是以坐标原点 O 为位似中心的位似图形，若点 $A(2, 2)$ ， $B(3, 4)$ ， $C(6, 1)$ ， $B'(6, 8)$ ，则 $\triangle A'B'C'$ 的面积为_____.



【答案】18.

【解析】直接利用位似图形的性质得出对应点位置进而得出答案.

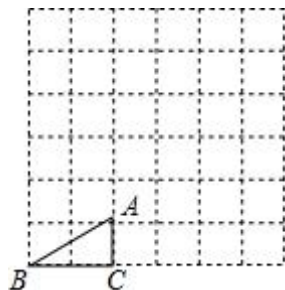
$\because \triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 是以坐标原点 O 为位似中心的位似图形, 点 $A(2, 2)$, $B(3, 4)$, $C(6, 1)$, $B'(6, 8)$,

$\therefore A'(4, 4)$, $C'(12, 2)$,

$\therefore \triangle A'B'C'$ 的面积为: $6 \times 8 - \frac{1}{2} \times 2 \times 4 - \frac{1}{2} \times 6 \times 6 - \frac{1}{2} \times 2 \times 8 = 18$.

【点评】此题主要考查了位似变换以及三角形面积求法, 正确得出对应点位置是解题关键.

12. (2020•湖州) 在每个小正方形的边长为1的网格图形中, 每个小正方形的顶点称为格点, 顶点都是格点的三角形称为格点三角形. 如图, 已知 $\text{Rt}\triangle ABC$ 是 6×6 网格图形中的格点三角形, 则该图中所有与 $\text{Rt}\triangle ABC$ 相似的格点三角形中, 面积最大的三角形的斜边长是_____.

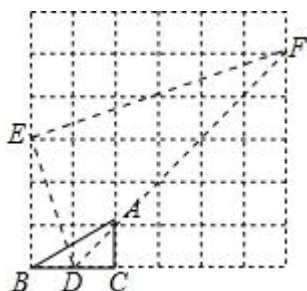


【解析】 $5\sqrt{2}$.

【解析】 $\because$ 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $AC=1$, $BC=2$,

$$\therefore AB = \sqrt{5}, AC:BC = 1:2,$$

$\therefore$ 与 $\text{Rt}\triangle ABC$ 相似的格点三角形的两直角边的比值为 1:2,



若该三角形最短边长为 4, 则另一直角边长为 8, 但在 6×6 网格图形中, 最长线段为 $6\sqrt{2}$, 但此时画出的直角三角形为等腰直角三角形, 从而画不出端点都在格点且长为 8 的线段, 故最短直角边长应小于 4, 在图中尝试, 可画出 $DE = \sqrt{10}$, $EF = 2\sqrt{10}$, $DF = 5\sqrt{2}$ 的三角形,

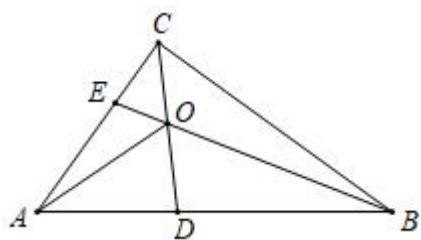
$$\therefore \frac{\sqrt{10}}{1} = \frac{2\sqrt{10}}{2} = \frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{5}} = \sqrt{10},$$

$$\therefore \triangle ABC \sim \triangle DEF,$$

$$\therefore \angle DEF = \angle C = 90^\circ,$$

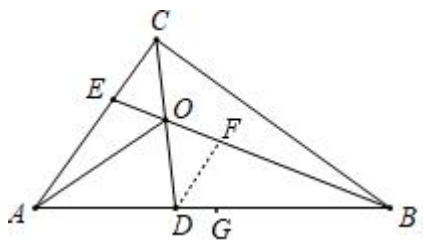
$\therefore$ 此时 $\triangle DEF$ 的面积为: $\sqrt{10} \times 2\sqrt{10} \div 2 = 10$, $\triangle DEF$ 为面积最大的三角形, 其斜边长为: $5\sqrt{2}$.

13. (2020•无锡) 如图, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, $AB = 4$, 点 D , E 分别在边 AB , AC 上, 且 $DB = 2AD$, $AE = 3EC$, 连接 BE , CD , 相交于点 O , 则 $\triangle ABO$ 面积最大值为_____.



【解析】 $\frac{8}{3}$.

【解析】 如图, 过点 D 作 $DF \parallel AE$,



$$\text{则} \frac{DF}{AE} = \frac{BD}{BA} = \frac{2}{3},$$

$$\therefore \frac{EC}{AE} = \frac{1}{3},$$

$$\therefore DF = 2EC,$$

$$\therefore DO = 2OC,$$

$$\therefore DO = \frac{2}{3}DC,$$

$$\therefore S_{\triangle ADO} = \frac{2}{3}S_{\triangle ADC}, \quad S_{\triangle BDO} = \frac{2}{3}S_{\triangle BDC},$$

$$\therefore S_{\triangle ABO} = \frac{2}{3}S_{\triangle ABC},$$

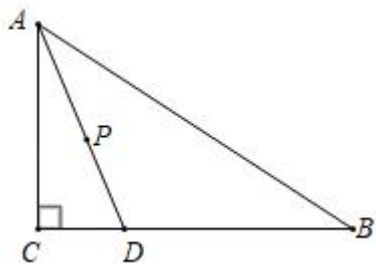
$$\because \angle ACB = 90^\circ,$$

$$\therefore C \text{ 在以 } AB \text{ 为直径的圆上, 设圆心为 } G,$$

$$\text{当 } CG \perp AB \text{ 时, } \triangle ABC \text{ 的面积最大为: } \frac{1}{2} \times 4 \times 2 = 4,$$

$$\text{此时 } \triangle ABO \text{ 的面积最大为: } \frac{2}{3} \times 4 = \frac{8}{3}.$$

14. (2019•浙江宁波) 如图所示, $Rt\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $AC = 12$, 点 D 在边 BC 上, $CD = 5$, $BD = 13$. 点 P 是线段 AD 上一动点, 当半径为 6 的 $\odot P$ 与 $\triangle ABC$ 的一边相切时, AP 的长为_____.



【答案】6.5 或 $3\sqrt{13}$.

【解析】∵在 $Rt\triangle ABC$ 中， $\angle C=90^\circ$ ， $AC=12$ ， $BD+CD=18$ ，

$$\therefore AB = \sqrt{12^2 + 18^2} = 6\sqrt{13},$$

在 $Rt\triangle ADC$ 中， $\angle C=90^\circ$ ， $AC=12$ ， $CD=5$ ，

$$\therefore AD = \sqrt{AC^2 + CD^2} = 13,$$

当 $\odot P$ 于 BC 相切时，点 P 到 BC 的距离 = 6，

过 P 作 $PH \perp BC$ 于 H ，

则 $PH=6$ ，

∵ $\angle C=90^\circ$ ，

∴ $AC \perp BC$ ，

∴ $PH \parallel AC$ ，

∴ $\triangle DPH \sim \triangle DAC$ ，

$$\therefore \frac{PD}{DA} = \frac{PH}{AC},$$

$$\therefore \frac{PD}{13} = \frac{6}{12},$$

∴ $PD=6.5$ ，

∴ $AP=6.5$ ；

当 $\odot P$ 于 AB 相切时，点 P 到 AB 的距离 = 6，

过 P 作 $PG \perp AB$ 于 G ，

则 $PG=6$ ，

∵ $AD=BD=13$ ，

∴ $\angle PAG = \angle B$ ，

$$\because \angle AGP = \angle C = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle AGP \sim \triangle BCA,$$

$$\therefore \frac{AP}{AB} = \frac{PG}{AC},$$

$$\therefore \frac{AP}{6\sqrt{13}} = \frac{6}{12},$$

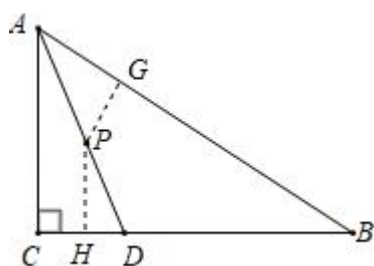
$$\therefore AP = 3\sqrt{13},$$

$$\because CD = 5 < 6,$$

$\therefore$ 半径为 6 的 $\odot P$ 不与 $\triangle ABC$ 的 AC 边相切,

综上所述, AP 的长为 6.5 或 $3\sqrt{13}$,

故答案为: 6.5 或 $3\sqrt{13}$.



15. 2019 黑龙江省龙东地区) 一张直角三角形纸片 ABC , $\angle ACB = 90^\circ$, $AB = 10$, $AC = 6$, 点 D 为 BC 边上的任一点, 沿过点 D 的直线折叠, 使直角顶点 C 落在斜边 AB 上的点 E 处, 当 $\triangle BDE$ 是直角三角形时, 则 CD 的长为_____.

【答案】3 或 $\frac{24}{7}$.

【解析】在 $\triangle BDE$ 中, $\angle B$ 是锐角, $\therefore$ 有两种可能, $\angle DEB$ 或 $\angle EDB$ 是直角, 由此画出示意图, 逐步求解即可.

如图 1, $\angle DEB$ 是直角时, $\because \angle ACB = 90^\circ$, $AB = 10$, $AC = 6$, $\therefore BC = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$, 设 $CD = x$, 则 $BD = 8 - x$, 由折叠

知 $CD = ED = x$, $\because \angle ACB = \angle DEB = 90^\circ$, $\therefore \triangle BED \sim \triangle BCA$, $\therefore \frac{AC}{AB} = \frac{DE}{DB}$, 即 $\frac{6}{10} = \frac{x}{8-x}$, 解得 $x = 3$;

如图 2, $\angle EDB$ 是直角时, $ED \parallel AC$, $\therefore \triangle BED \sim \triangle BAC$, $\therefore \frac{AC}{CB} = \frac{ED}{DB}$, 即 $\frac{6}{8} = \frac{x}{8-x}$, 解得 $x = \frac{24}{7}$, 综上, CD 的长

为 3 或 $\frac{24}{7}$.

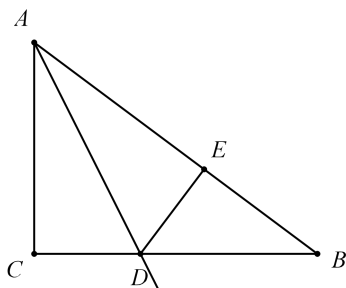


图 1

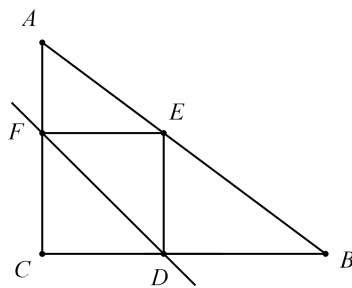
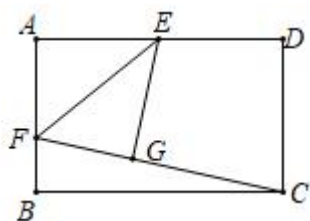


图 2

16. (2019•山东泰安) 如图, 矩形 $ABCD$ 中, $AB = 3\sqrt{6}$, $BC = 12$, E 为 AD 中点, F 为 AB 上一点, 将 $\triangle AEF$ 沿 EF 折叠后, 点 A 恰好落到 CF 上的点 G 处, 则折痕 EF 的长是_____.



【答案】 $2\sqrt{15}$.

【解析】 本题考查了矩形的性质, 轴对称的性质, 相似三角形的判定与性质等, 解题关键是能够作出适当的辅助线, 连接 CE , 构造相似三角形, 最终利用相似的性质求出结果.

连接 EC , 利用矩形的性质, 求出 EG , DE 的长度, 证明 EC 平分 $\angle DCF$, 再证 $\angle FEC = 90^\circ$, 最后证 $\triangle FEC \sim \triangle EDC$, 利用相似的性质即可求出 EF 的长度.

如图, 连接 EC ,

$\because$ 四边形 $ABCD$ 为矩形,

$\therefore \angle A = \angle D = 90^\circ$, $BC = AD = 12$, $DC = AB = 3\sqrt{6}$,

$\because E$ 为 AD 中点,

$$\therefore AE = DE = \frac{1}{2}AD = 6$$

由翻折知, $\triangle AEF \cong \triangle GEF$,

$$\therefore AE = GE = 6, \quad \angle AEF = \angle GEF, \quad \angle EGF = \angle EAF = 90^\circ = \angle D,$$

$$\therefore GE = DE,$$

$\therefore EC$ 平分 $\angle DCG$,

$$\therefore \angle DCE = \angle GCE,$$

$$\because \angle GEC = 90^\circ - \angle GCE, \quad \angle DEC = 90^\circ - \angle DCE,$$

$$\therefore \angle GEC = \angle DEC,$$

$$\therefore \angle FEC = \angle FEG + \angle GEC = \frac{1}{2} \times 180^\circ = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle FEC = \angle D = 90^\circ,$$

又 $\because \angle DCE = \angle GCE$,

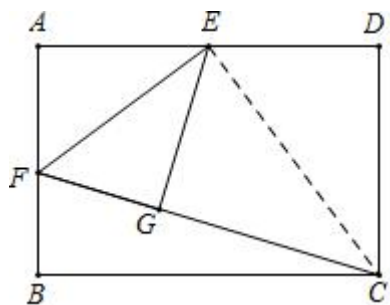
$$\therefore \triangle FEC \sim \triangle EDC,$$

$$\therefore \frac{FE}{DE} = \frac{EC}{DC},$$

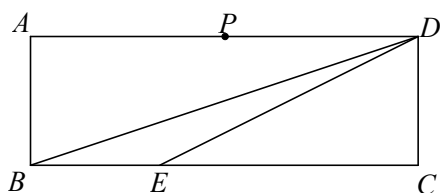
$$\because EC = \sqrt{DE^2 + DC^2} = \sqrt{6^2 + (3\sqrt{6})^2} = 3\sqrt{10},$$

$$\therefore \frac{FE}{6} = \frac{3\sqrt{10}}{3\sqrt{6}},$$

$$\therefore FE = 2\sqrt{15}$$



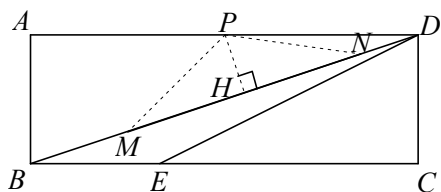
17. (2019 江苏常州) 如图, 在矩形 $ABCD$ 中, $AD=3AB=3\sqrt{10}$. 点 P 是 AD 的中点, 点 E 在 BC 上, $CE=2BE$, 点 M 、 N 在线段 BD 上. 若 $\triangle PMN$ 是等腰三角形且底角与 $\angle DEC$ 相等, 则 $MN=$ _____.



【答案】6.

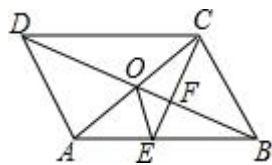
【解析】本题考查了矩形的性质、相似三角形的性质与判定、等腰三角形的性质、勾股定理、锐角三角函数等几何知识点. 首先由勾股定理, 求得 $BD=10$, 然后由 “ $AD=3AB=3\sqrt{10}$. 点 P 是 AD 的中点, 点 E 在 BC 上, $CE=2BE$ ”, 求得 $PD=\frac{3\sqrt{10}}{2}$, $CE=2\sqrt{10}$, 这样由 $\tan \angle DEC = \frac{DC}{EC} = \frac{1}{2}$; 第四步过点 P 作 $PH \perp BD$ 于点 H , 在 BD 上依次取点 M 、 N , 使 $MH=NH=2PH$, 于是因此 $\triangle PMN$ 是所求符合条件的图形; 第五步由 $\triangle DPH \sim \triangle DBA$, 得 $\frac{PH}{BA} = \frac{PD}{BD}$, 即 $\frac{PH}{\sqrt{10}} = \frac{\frac{3\sqrt{10}}{2}}{10}$, 得 $PH = \frac{3}{2}$, 于是 $MN=4PH=6$, 本题答案为 6.

得 $\frac{PH}{BA} = \frac{PD}{BD}$, 即 $\frac{PH}{\sqrt{10}} = \frac{\frac{3\sqrt{10}}{2}}{10}$, 得 $PH = \frac{3}{2}$, 于是 $MN=4PH=6$, 本题答案为 6.



18. (2019•山东省滨州市) 如图, $\square ABCD$ 的对角线 AC , BD 交于点 O , CE 平分 $\angle BCD$ 交 AB 于点 E , 交 BD 于

点 F ，且 $\angle ABC=60^\circ$ ， $AB=2BC$ ，连接 OE 。下列结论：① $EO \perp AC$ ；② $S_{\triangle AOD}=4S_{\triangle OCF}$ ；③ $AC:BD=\sqrt{21}:7$ ；④ $FB^2=OF \cdot DF$ 。其中正确的结论有_____（填写所有正确结论的序号）



【答案】①③④.

【解析】 $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$\therefore CD \parallel AB$ ， $OD=OB$ ， $OA=OC$ ，

$\therefore \angle DCB + \angle ABC = 180^\circ$ ，

$\because \angle ABC = 60^\circ$ ，

$\therefore \angle DCB = 120^\circ$ ，

$\because EC$ 平分 $\angle DCB$ ，

$\therefore \angle ECB = \frac{1}{2} \angle DCB = 60^\circ$ ，

$\therefore \angle EBC = \angle BCE = \angle CEB = 60^\circ$ ，

$\therefore \triangle ECB$ 是等边三角形，

$\therefore EB = BC$ ，

$\because AB = 2BC$ ，

$\therefore EA = EB = EC$ ，

$\therefore \angle ACB = 90^\circ$ ，

$\because OA = OC$ ， $EA = EB$ ，

$\therefore OE \parallel BC$ ，

$\therefore \angle AOE = \angle ACB = 90^\circ$ ，

$\therefore EO \perp AC$, 故①正确,

$\because OE \parallel BC$,

$\therefore \triangle OEF \sim \triangle BCF$,

$$\therefore \frac{OE}{BC} = \frac{OF}{FB} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore OF = \frac{1}{3} OB,$$

$\therefore S_{\triangle AOD} = S_{\triangle BOC} = 3S_{\triangle OCF}$, 故②错误,

$$\text{设 } BC = BE = EC = a, \text{ 则 } AB = 2a, AC = \sqrt{3}a, OD = OB = \sqrt{a^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2} = \frac{\sqrt{7}}{2}a,$$

$$\therefore BD = \sqrt{7}a,$$

$\therefore AC : BD = \sqrt{3}a : \sqrt{7}a = \sqrt{21} : 7$, 故③正确,

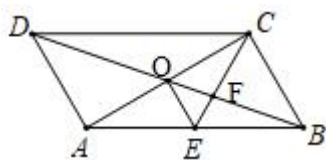
$$\because OF = \frac{1}{3} OB = \frac{\sqrt{7}}{6}a,$$

$$\therefore BF = \frac{\sqrt{7}}{3}a,$$

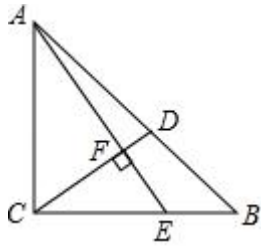
$$\therefore BF^2 = \frac{7}{9}a^2, OF \cdot DF = \frac{\sqrt{7}}{6}a \cdot \left(\frac{\sqrt{7}}{2}a + \frac{\sqrt{7}}{6}a\right) = \frac{7}{9}a^2,$$

$\therefore BF^2 = OF \cdot DF$, 故④正确,

故答案为①③④.



19. (2019 四川泸州) 如图, 在等腰 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $AC = 15$, 点 E 在边 CB 上, $CE = 2EB$, 点 D 在边 AB 上, $CD \perp AE$, 垂足为 F , 则 AD 的长为_____.



【答案】 $9\sqrt{2}$

【解析】 过 D 作 $DH \perp AC$ 于 H ,

$\because$ 在等腰 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C=90^\circ$, $AC=15$,

$\therefore AC=BC=15$,

$\therefore \angle CAD=45^\circ$,

$\therefore AH=DH$,

$\therefore CH=15-DH$,

$\because CF \perp AE$,

$\therefore \angle DHA=\angle DFA=90^\circ$,

$\therefore \angle HAF=\angle HDF$,

$\therefore \triangle ACE \sim \triangle DHC$,

$\therefore \frac{DH}{AC} = \frac{CH}{CE}$,

$\because CE=2EB$,

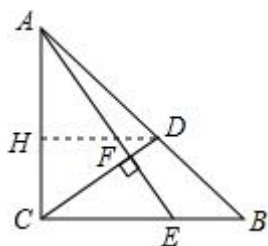
$\therefore CE=10$,

$\therefore \frac{DH}{15} = \frac{15-DH}{10}$,

$\therefore DH=9$,

$\therefore AD=9\sqrt{2}$,

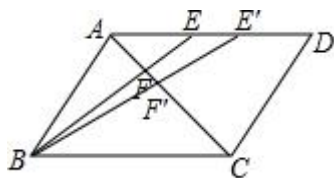
故答案为： $9\sqrt{2}$.



20. (2019•四川省凉山州) 在 $\square ABCD$ 中, E 是 AD 上一点, 且点 E 将 AD 分为 2: 3 的两部分, 连接 BE 、 AC 相交于 F , 则 $S_{\triangle AEF} : S_{\triangle CBF}$ 是_____.

【答案】 4: 25 或 9: 25.

【解析】 本题考查的是相似三角形的判定和性质、平行四边形的性质, 掌握相似三角形的面积比等于相似比的平方是解题的关键.



分 $AE : ED = 2 : 3$ 、 $AE : ED = 3 : 2$ 两种情况, 根据相似三角形的性质计算即可.

①当 $AE : ED = 2 : 3$ 时,

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$\therefore AD \parallel BC$, $AE : BC = 2 : 5$,

$\therefore \triangle AEF \sim \triangle CBF$,

$\therefore S_{\triangle AEF} : S_{\triangle CBF} = \left(\frac{2}{5}\right)^2 = 4 : 25$;

②当 $AE : ED = 3 : 2$ 时,

同理可得, $S_{\triangle AEF} : S_{\triangle CBF} = \left(\frac{3}{5}\right)^2 = 9 : 25$ 。

三、解答题 (6 个小题, 每题 10 分, 共 60 分)

21. (2020•菏泽) 如图 1, 四边形 $ABCD$ 的对角线 AC , BD 相交于点 O , $OA=OC$, $OB=OD+CD$.

(1) 过点 A 作 $AE \parallel DC$ 交 BD 于点 E , 求证: $AE=BE$;

(2) 如图 2, 将 $\triangle ABD$ 沿 AB 翻折得到 $\triangle ABD'$.

①求证: $BD' \parallel CD$;

②若 $AD' \parallel BC$, 求证: $CD^2 = 2OD \cdot BD$.

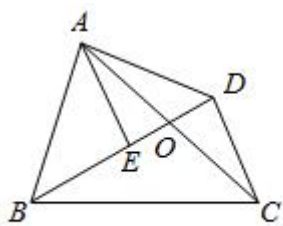


图 1

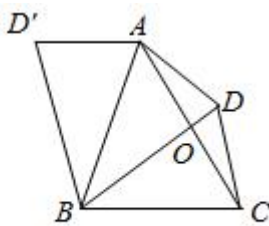


图 2

【解析】见解析。

【解析】(1) 证明: $\because AE \parallel DC$,

$$\therefore \angle CDO = \angle AEO, \angle EAO = \angle DCO,$$

$$\text{又} \because OA = OC,$$

$$\therefore \triangle AOE \cong \triangle COD \text{ (AAS)},$$

$$\therefore CD = AE, OD = OE,$$

$$\because OB = OE + BE, OB = OD + CD,$$

$$\therefore BE = CD,$$

$$\therefore AE = BE;$$

(2) ①证明: 如图 1, 过点 A 作 $AE \parallel DC$ 交 BD 于点 E ,

$$\therefore \angle AFB = \angle ADB,$$

$$\text{又} \because \angle AED = \angle BEF,$$

$$\therefore \triangle AED \sim \triangle BEF,$$

$$\therefore \frac{AE}{DE} = \frac{BE}{EF},$$

$$\because AE = CD,$$

$$\therefore \frac{CD}{DE} = \frac{BE}{EF},$$

$$\because EF \parallel CD,$$

$$\therefore \triangle BEF \sim \triangle BDC,$$

$$\therefore \frac{BE}{EF} = \frac{BD}{DC},$$

$$\therefore \frac{CD}{DE} = \frac{BD}{CD},$$

$$\therefore CD^2 = DE \cdot BD,$$

$$\because \triangle AOE \cong \triangle COD,$$

$$\therefore OD = OE,$$

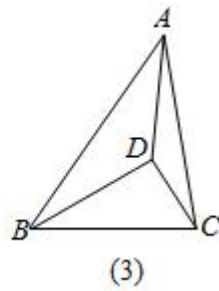
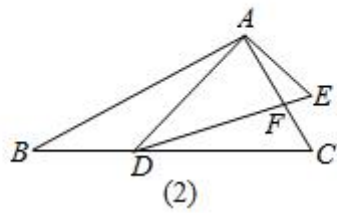
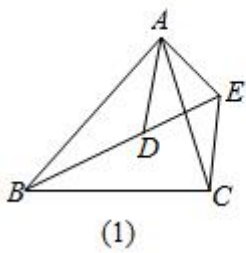
$$\therefore DE = 2OD,$$

$$\therefore CD^2 = 2OD \cdot BD.$$

22. (2020•武汉) 问题背景 如图(1), 已知 $\triangle ABC \sim \triangle ADE$, 求证: $\triangle ABD \sim \triangle ACE$;

尝试应用 如图(2), 在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle ADE$ 中, $\angle BAC = \angle DAE = 90^\circ$, $\angle ABC = \angle ADE = 30^\circ$, AC 与 DE 相交于点 F , 点 D 在 BC 边上, $\frac{AD}{BD} = \sqrt{3}$, 求 $\frac{DF}{CF}$ 的值;

拓展创新 如图(3), D 是 $\triangle ABC$ 内一点, $\angle BAD = \angle CBD = 30^\circ$, $\angle BDC = 90^\circ$, $AB = 4$, $AC = 2\sqrt{3}$, 直接写出 AD 的长.



【解析】见解析。

【解析】问题背景

证明：∵ $\triangle ABC \sim \triangle ADE$,

$$\therefore \frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}, \quad \angle BAC = \angle DAE,$$

$$\therefore \angle BAD = \angle CAE, \quad \frac{AB}{AC} = \frac{AD}{AE},$$

$$\therefore \triangle ABD \sim \triangle ACE;$$

尝试应用

解：如图 1，连接 EC ，

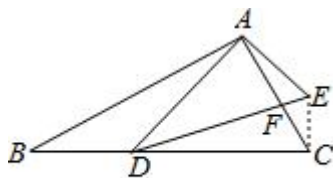


图1

$$\because \angle BAC = \angle DAE = 90^\circ, \quad \angle ABC = \angle ADE = 30^\circ,$$

$$\therefore \triangle ABC \sim \triangle ADE,$$

由 (1) 知 $\triangle ABD \sim \triangle ACE$,

$$\therefore \frac{AE}{EC} = \frac{AD}{BD} = \sqrt{3}, \quad \angle ACE = \angle ABD = \angle ADE,$$

在 $\text{Rt}\triangle ADE$ 中， $\angle ADE = 30^\circ$ ，

即 $\angle BDM = \angle CDA$,

$\therefore \triangle BDM \sim \triangle CDA$,

$$\therefore \frac{BM}{CA} = \frac{DM}{AD} = \sqrt{3},$$

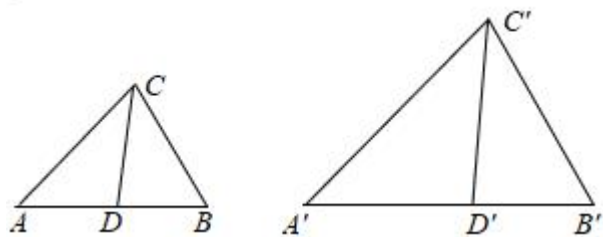
$$\therefore AC = 2\sqrt{3},$$

$$\therefore BM = 2\sqrt{3} \times \sqrt{3} = 6,$$

$$\therefore AM = \sqrt{BM^2 - AB^2} = \sqrt{6^2 - 4^2} = 2\sqrt{5},$$

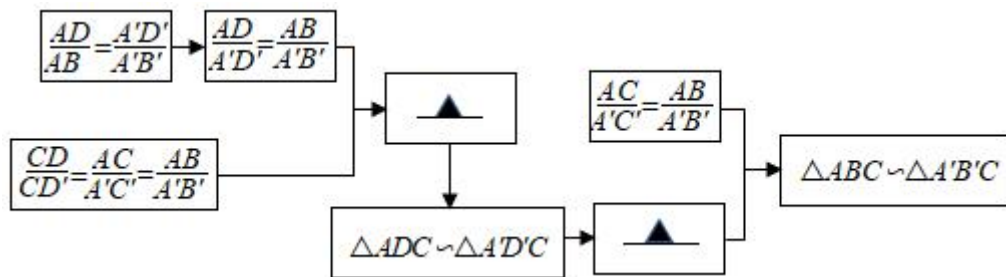
$$\therefore AD = \frac{1}{2}AM = \sqrt{5}.$$

23. (2020•南京) 如图, 在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 中, D 、 D' 分别是 AB 、 $A'B'$ 上一点, $\frac{AD}{AB} = \frac{A'D'}{A'B'}$.



(1) 当 $\frac{CD}{C'D'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{AB}{A'B'}$ 时, 求证 $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$.

证明的途径可以用下面的框图表示, 请填写其中的空格.



(2) 当 $\frac{CD}{C'D'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'}$ 时, 判断 $\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 是否相似, 并说明理由.

【解析】见解析。

【解答】(1) 证明: $\therefore \frac{AD}{AB} = \frac{A'D'}{A'B'}$,

$$\therefore \frac{AD}{A'D'} = \frac{AB}{A'B'},$$

$$\therefore \frac{CD}{C'D'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{AB}{A'B'},$$

$$\therefore \frac{CD}{C'D'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{AD}{A'D'},$$

$$\therefore \triangle ADC \sim \triangle A' D' C,$$

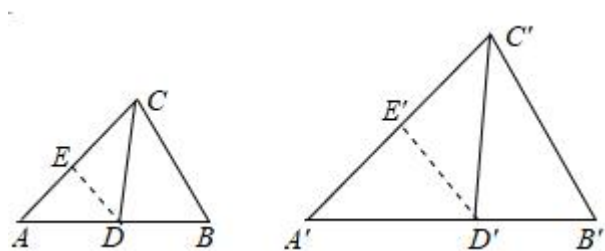
$$\therefore \angle A = \angle A' ,$$

$$\therefore \frac{AC}{A'C'} = \frac{AB}{A'B'},$$

$$\therefore \triangle ABC \sim \triangle A' B' C' .$$

故答案为: $\frac{CD}{C'D'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{AD}{A'D'}$, $\angle A = \angle A'$.

(2) 如图, 过点 D, D' 分别作 $DE \parallel BC, D'E' \parallel B'C'$, DE 交 AC 于 E , $D'E'$ 交 $A'C'$ 于 E' .



$$\because DE \parallel BC,$$

$$\therefore \triangle ADE \sim \triangle ABC,$$

$$\therefore \frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC} = \frac{AE}{AC},$$

$$\text{同理, } \frac{A'D'}{A'B'} = \frac{D'E'}{B'C'} = \frac{A'E'}{A'C'},$$

$$\therefore \frac{AD}{AB} = \frac{A'D'}{A'B'},$$

$$\therefore \frac{DE}{BC} = \frac{D'E'}{B'C'},$$

$$\therefore \frac{DE}{D'E'} = \frac{BC}{B'C'},$$

$$\text{同理, } \frac{AE}{AC} = \frac{A'E'}{A'C'},$$

$$\therefore \frac{AC-AE}{AC} = \frac{A'C'-A'E'}{A'C'}, \text{ 即 } \frac{EC}{AC} = \frac{E'C'}{A'C'},$$

$$\therefore \frac{EC}{E'C'} = \frac{AC}{A'C'},$$

$$\therefore \frac{CD}{C'D'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'},$$

$$\therefore \frac{CD}{C'D'} = \frac{DE}{D'E'} = \frac{EC}{E'C'},$$

$$\therefore \triangle DCE \sim \triangle D' C' E',$$

$$\therefore \angle CED = \angle C' E' D',$$

$$\because DE \parallel BC,$$

$$\therefore \angle CED + \angle ACB = 90^\circ,$$

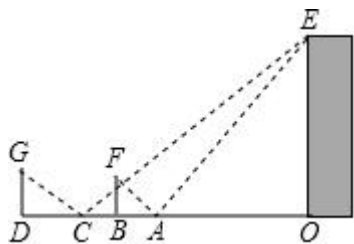
$$\text{同理, } \angle C' E' D' + \angle A' C' B' = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle ACB = \angle A' B' C',$$

$$\therefore \frac{AC}{A'C'} = \frac{CB}{C'B'},$$

$$\therefore \triangle ABC \sim \triangle A' B' C'.$$

24. (2019•湖北省荆门市) 如图, 为了测量一栋楼的高度 OE , 小明同学先在操场上 A 处放一面镜子, 向后退到 B 处, 恰好在镜子中看到楼的顶部 E ; 再将镜子放到 C 处, 然后后退到 D 处, 恰好再次在镜子中看到楼的顶部 E (O, A, B, C, D 在同一条直线上), 测得 $AC=2m$, $BD=2.1m$, 如果小明眼睛距地面高度 BF, DG 为 $1.6m$, 试确定楼的高度 OE .



【答案】楼的高度 OE 为 32 米.

【解析】设 E 关于 O 的对称点为 M ，由光的反射定律知，延长 GC 、 FA 相交于点 M ，

连接 GF 并延长交 OE 于点 H ，

$\because GF \parallel AC$ ，

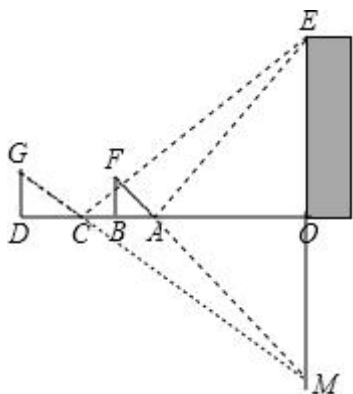
$\therefore \triangle MAC \sim \triangle MFG$ ，

$$\therefore \frac{AC}{FG} = \frac{MA}{MF} = \frac{MO}{MH},$$

$$\text{即: } \frac{AC}{BD} = \frac{OE}{MH} = \frac{OE}{MO+OH} = \frac{OE}{OE+BF},$$

$$\therefore \frac{OE}{OE+1.6} = \frac{2}{2.1},$$

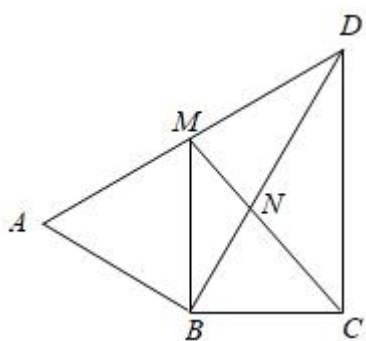
$$\therefore OE = 32$$



25. (2019•四川省凉山州) 如图， $\angle ABD = \angle BCD = 90^\circ$ ， DB 平分 $\angle ADC$ ，过点 B 作 $BM \parallel CD$ 交 AD 于 M 。连接 CM 交 DB 于 N 。

(1) 求证： $BD^2 = AD \cdot CD$ ；

(2) 若 $CD=6$, $AD=8$, 求 MN 的长.



【答案】见解析。

【解析】本题考查了相似三角形的判定和性质，勾股定理，直角三角形的性质，求 MC 的长度是本题的关键。

证明：(1) 通过证明 $\triangle ABD \sim \triangle BCD$ ，可得 $\frac{AD}{BD} = \frac{BD}{CD}$ ，可得结论；

$\because DB$ 平分 $\angle ADC$,

$\therefore \angle ADB = \angle CDB$, 且 $\angle ABD = \angle BCD = 90^\circ$,

$\therefore \triangle ABD \sim \triangle BCD$

$$\therefore \frac{AD}{BD} = \frac{BD}{CD}$$

$$\therefore BD^2 = AD \cdot CD$$

(2) 由平行线的性质可证 $\angle MBD = \angle BDC$ ，即可证 $AM = MD = MB = 4$ ，由 $BD^2 = AD \cdot CD$ 和勾股定理可求 MC 的长，通过证明 $\triangle MNB \sim \triangle CND$ ，可得 $\frac{BM}{CD} = \frac{MN}{CN} = \frac{2}{3}$ ，即可求 MN 的长. $\because BM \parallel CD$

$\therefore \angle MBD = \angle BDC$

$\therefore \angle ADB = \angle MBD$, 且 $\angle ABD = 90^\circ$

$\therefore BM = MD$, $\angle MAB = \angle MBA$

$\therefore BM = MD = AM = 4$

$\because BD^2 = AD \cdot CD$, 且 $CD = 6$, $AD = 8$,

$$\therefore BD^2 = 48,$$

$$\therefore BC^2 = BD^2 - CD^2 = 12$$

$$\therefore MC^2 = MB^2 + BC^2 = 28$$

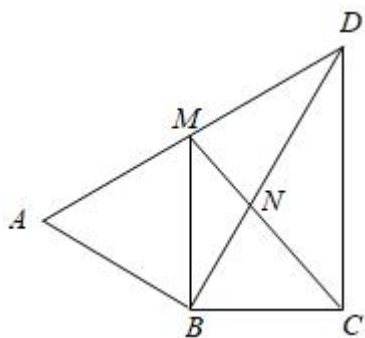
$$\therefore MC = 2\sqrt{7}$$

$$\because BM \parallel CD$$

$$\therefore \triangle MNB \sim \triangle CND$$

$$\therefore \frac{BM}{CD} = \frac{MN}{CN} = \frac{2}{3}, \text{ 且 } MC = 2\sqrt{7}$$

$$\therefore MN = \frac{4}{5}\sqrt{7}$$

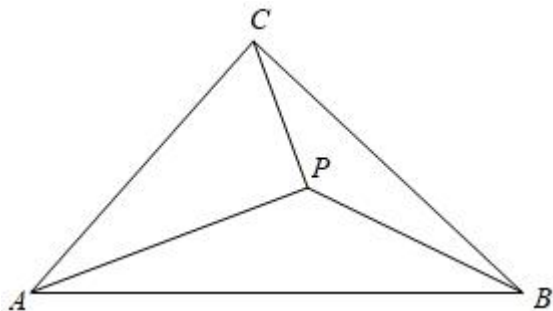


26. (2019 安徽) 如图, $Rt\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, $AC = BC$, P 为 $\triangle ABC$ 内部一点, 且 $\angle APB = \angle BPC = 135^\circ$.

(1) 求证: $\triangle PAB \sim \triangle PBC$;

(2) 求证: $PA = 2PC$;

(3) 若点 P 到三角形的边 AB , BC , CA 的距离分别为 h_1 , h_2 , h_3 , 求证 $h_1^2 = h_2 \cdot h_3$.



【答案】见解析。

【解析】此题主要考查了相似三角形的判定和性质，等腰直角三角形的性质，判断出 $\angle EAP = \angle PCD$ 是解本题的关键。

$$(1) \because \angle ACB = 90^\circ, AB = BC,$$

$$\therefore \angle ABC = 45^\circ = \angle PBA + \angle PBC$$

$$\text{又} \angle APB = 135^\circ,$$

$$\therefore \angle PAB + \angle PBA = 45^\circ$$

$$\therefore \angle PBC = \angle PAB$$

$$\text{又} \because \angle APB = \angle BPC = 135^\circ,$$

$$\therefore \triangle PAB \sim \triangle PBC$$

$$(2) \because \triangle PAB \sim \triangle PBC$$

$$\therefore \frac{PA}{PB} = \frac{PB}{PC} = \frac{AB}{BC}$$

$$\text{在 } Rt\triangle ABC \text{ 中, } AB = AC,$$

$$\therefore \frac{AB}{BC} = \sqrt{2}$$

$$\therefore PB = \sqrt{2}PC, PA = \sqrt{2}PB$$

$$\therefore PA = 2PC$$

$$(3) \text{如图, 过点 } P \text{ 作 } PD \perp BC, PE \perp AC \text{ 交 } BC, AC \text{ 于点 } D, E,$$

$$\therefore PF = h_1, PD = h_2, PE = h_3,$$

$$\because \angle CPB + \angle APB = 135^\circ + 135^\circ = 270^\circ$$

$$\therefore \angle APC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle EAP + \angle ACP = 90^\circ,$$

$$\text{又} \because \angle ACB = \angle ACP + \angle PCD = 90^\circ$$

$$\therefore \angle EAP = \angle PCD, \therefore Rt\triangle AEP \sim Rt\triangle CDP,$$

$$\therefore \frac{PE}{DP} = \frac{AP}{PC} = 2, \text{ 即 } \frac{h_3}{h_2} = 2,$$

$$\therefore h_3 = 2h_2$$

$$\because \triangle PAB \sim \triangle PBC,$$

$$\therefore \frac{h_1}{h_2} = \frac{AB}{BC} = \sqrt{2}, \therefore h_1 = \sqrt{2}h_2$$

$$\therefore h_1^2 = 2h_2^2 = 2h_2 \cdot h_2 = h_2h_3.$$

$$\text{即: } h_1^2 = h_2 \cdot h_3.$$

