专题 08 分式方程及其应用

专题知识回顾

1．分式方程的定义：分母中含有未知数的方程叫做分式方程.

2．解分式方程的一般方法:解分式方程的思想是将“分式方程”转化为“整式方程”。

（1）去分母(方程两边同时乘以最简公分母,将分式方程化为整式方程);

（2）按解整式方程的步骤求出未知数的值;

（3）验根：将所得的根代入最简公分母，若等于零，就是增根，原分式方程无解；若不等于零，就是原方程的根。

专题典型题考法及解析

【例题 1】（2019•湖北孝感）方程$\frac{1}{2x}=\frac{2}{x+3}$的解为_____.

【答案】$x=1$.

【解析】解一个分式方程时，可按照“一去（去分母）、二解（解整式方程）、三检验（检查求出的根是否是增根）”的步骤求出方程的解即可．注意：解分式方程时，最后一步的验根很关键．观察可得方程最简公分母为 $2x（x+3）$．去分母，转化为整式方程求解．结果要检验．两边同时乘 $2x（x+3）$，得

$x+3=4x$，

解得 $x=1$.

经检验 $x=1$ 是原分式方程的根.

【例题 2】（2019 黑龙东地区）已知关于 x 的分式方程 $\frac{2x-m}{x-3}=1$ 的解是非正数，则 m 的取值范围是（　　）

A．$m\leq 3$　　B．$m<3$　　C．$m>-3$　　D．$m\geq -3$

【答案】A

【解析】知识点是分式方程的增根。

由 $\frac{2x-m}{x-3}=1$ 得 x=m-3，

∵方程的解是非正数，

∴m-3≤0，∴m≤3.

当 x-3=0 即 x=3 时，3=m-3，m=6，

∵m=6 不在 m≤3 内，∴m≤3.故选 A.

【例题 3】（2019•广东省广州市）甲、乙二人做某种机械零件，已知每小时甲比乙少做 8 个，甲做 120 个所用的时间与乙做 150 个所用的时间相等，设甲每小时做 x 个零件，下列方程正确的是（　　）

A. $\frac{120}{x}=\frac{150}{x-8}$　　B. $\frac{120}{x+8}=\frac{150}{x}$

C. $\frac{120}{x-8}=\frac{150}{x}$　　D. $\frac{120}{x}=\frac{150}{x+8}$

【答案】

【解析】设甲每小时做 x 个零件，根据甲做 120 个所用的时间与乙做 150 个所用的时间相等得出方程解答即可.

设甲每小时做 x 个零件，可得：$\frac{120}{x}=\frac{150}{x+8}$

【例题 4】（2019•四川自贡）解方程：$\frac{x}{x-1}-\frac{2}{x}=1$.

【答案】x＝2.

【解析】分式方程去分母转化为整式方程，求出整式方程的解得到 x 的值，经检验即可得到分式方程的解.

去分母得：$x^2-2x+2=x^2-x$，

解得：x＝2，

检验：当 x＝2 时，方程左右两边相等，

所以 x＝2 是原方程的解.

【例题 5】（2019•江苏扬州）“绿水青山就是金山银山”，为了进一步优化河道环境，甲乙两工程队承担河道整治任务，甲、乙两个工程队每天共整治河道 1500 米，甲工程队整治 3600 米所用的时间与乙工程队整治 2400 米所用时间相等。甲工程队每天整治河道多少米？

【答案】甲工程队每天整治河道 900 米.

【解析】解设甲工程队每天整治河道 xm，则乙工程队每天整治（1500-x）m

由题意得：$\frac{3600}{x}=\frac{2400}{1500-x}$，

解得：x=900

经检验的 x=900 是该方程的解。

专题典型训练题

一、选择题

1.（2019•黑龙江哈尔滨）方程$\frac{2}{3x-1}=\frac{3}{x}$的解为（　　）

A．$x=\frac{3}{11}$　　B．$x=\frac{11}{3}$　　C．$x=\frac{3}{7}$　　D．$x=\frac{7}{3}$

【答案】C

【解析】本题考查解分式方程；熟练掌握分式方程的解法及验根是解题的关键．

将分式方程化为$\frac{2x}{x(3x-1)}=\frac{3(3x-1)}{x(3x-1)}$，即可求解$x=\frac{3}{7}$；同时要进行验根即可求解。

$\frac{2}{3x-1}=\frac{3}{x}$，

$\frac{2x}{x(3x-1)}=\frac{3(3x-1)}{x(3x-1)}$，

∴$2x=9x-3$，

∴$x=\frac{3}{7}$；

将检验$x=\frac{3}{7}$是方程的根，

∴方程的解为$x=\frac{3}{7}$

2.（2019 山东淄博）解分式方程$\frac{1-x}{x-2}=\frac{1}{2-x}-2$时，去分母变形正确的是（　　）

A．$-1+x=-1-2(x-2)$　　B．$1-x=1-2(x-2)$

C．$-1+x=1+2(2-x)$　　D．$1-x=-1-2(x-2)$

【答案】D

【解析】分式方程去分母转化为整式方程，即可得到结果．

去分母得：$1-x=-1-2(x-2)$

3.（2019•广西贵港）若分式$\frac{x^2-1}{x+1}$的值等于0，则x的值为（　　）

A．±1　　B．0　　C．-1　　D．1

【答案】D

【解析】化简分式$\frac{x^2-1}{x+1}=\frac{(x+1)(x-1)}{x+1}=x-1=0$即可求解。

$\frac{x^2-1}{x+1}=\frac{(x+1)(x-1)}{x+1}=x-1=0$，

∴$x=1$；

经检验：$x=1$ 是原分式方程的解。

4.（2019 辽宁本溪）为推进垃圾分类，推动绿色发展，某化工厂要购进甲、乙两种型号机器人用来进行垃圾分类.用 360 万元购买甲型机器人和用 480 万元购买乙型机器人的台数相同，两种型号机器人的单价和为 140 万元.若设甲型机器人每台 x 万元，根据题意，所列方程正确的是

A. $\frac{360}{x}=\frac{480}{140-x}$　　B. $\frac{360}{140-x}=\frac{480}{x}$

C. $\frac{360}{x}+\frac{480}{x}=140$　　D. $\frac{360}{x}-140=\frac{480}{x}$

【答案】A.

【解析】本题考查了分式方程的应用，设甲种型号机器人每台的价格是 x 万元，根据“用 360 万元购买甲型机器人和用 480 万元购买乙型机器人的台数相同”，列出关于 x 的分式方程.

设甲型机器人每台 x 万元，根据题意，可得：$\frac{360}{x}=\frac{480}{140-x}$

5.（2019•湖北十堰）十堰即将跨入高铁时代，钢轨铺设任务也将完成．现还有 6000 米的钢轨需要铺设，为确保年底通车，如果实际施工时每天比原计划多铺设 20 米，就能提前 15 天完成任务．设原计划每天铺设钢轨 x 米，则根据题意所列的方程是（　　）

A. $\frac{6000}{x}-\frac{6000}{x+20}=15$　　B. $\frac{6000}{x+20}-\frac{6000}{x}=15$

C. $\frac{6000}{x}-\frac{6000}{x-15}=20$　　D. $\frac{6000}{x-15}-\frac{6000}{x}=20$

【答案】A

【解析】考查由实际问题抽象出分式方程，关键是设出未知数以时间为等量关系列出方程.

设原计划每天铺设钢轨 x 米，根据如果实际施工时每天比原计划多铺设 20 米，就能提前 15 天完成任务可列方程.

设原计划每天铺设钢轨 x 米，可得：$\frac{6000}{x}-\frac{6000}{x+20}=15$

6.（2019•山东省济宁市 ）世界文化遗产“三孔”景区已经完成 5G 基站布设，“孔夫子家”自此有了 5G 网络．5G 网络峰值速率为 4G 网络峰值速率的 10 倍，在峰值速率下传输 500 兆数据，5G 网络比 4G 网络快 45 秒，求这两种网络的峰值速率．设 4G 网络的峰值速率为每秒传输 x 兆数据，依题意，可列方程是（　　）

A. $\frac{500}{x}-\frac{500}{10x}=45$　　B. $\frac{500}{10x}-\frac{500}{x}=45$

C. $\frac{5000}{x}-\frac{500}{x}=45$　　D. $\frac{500}{x}-\frac{5000}{x}=45$

【答案】A

【解析】由实际问题抽象出分式方程直接利用 5*G* 网络比 4*G* 网络快 45 秒得出等式进而得出答案.

设 4*G* 网络的峰值速率为每秒传输 *x* 兆数据，依题意，可列方程是：

$\frac{500}{x}-\frac{500}{10x}=45$.

7.（2019•江苏苏州）小明 5 元买售价相同的软面笔记本，小丽用 24 元买售价相同的硬面笔记本（两人的钱恰好用完），已知每本硬面笔记本比软面笔记本贵 3 元，且小明和小丽买到相同数量的笔记本，设软面笔记本每本售价为 *x* 元，根据题意可列出的方程为（　）

A. $\frac{15}{x}=\frac{24}{x+3}$　　B. $\frac{15}{x}=\frac{24}{x-3}$　　C. $\frac{15}{x+3}=\frac{24}{x}$　　D. $\frac{15}{x-3}=\frac{24}{x}$

【答案】A

【解析】考察分式方程的应用，简单题型。找到等量关系为两人买的笔记本数量

$\therefore \frac{15}{x}=\frac{24}{x+3}$

二、填空题

8.（2019•甘肃）分式方程$\frac{3}{x+1}=\frac{5}{x+2}$的解为_____.

【答案】$x=\frac{1}{2}$

【解析】分式方程去分母转化为整式方程，求出整式方程的解得到 *x* 的值，经检验即可得到分式方程的解.

去分母得：3*x*+6＝5*x*+5，

解得：$x=\frac{1}{2}$，

经检验 $x=\frac{1}{2}$是分式方程的解.

9.（2019•山东省滨州市）方程$\frac{x-3}{x-2}+1=\frac{3}{2-x}$的解是_____.

【答案】*x*＝1.

【解析】本题考查了解分式方程.（1）解分式方程的基本思想是“转化思想”，把分式方程转化为整式方程求解，（2）解分式方程一定注意要验根.

去分母，得 *x* - 3+*x* - 2＝ - 3，

移项、合并，得 2*x*＝2，

解得 *x*＝1，

检验：当 *x*＝1 时，*x* - 2≠0，

所以，原方程的解为 $x=1$

10.（2019•山东省德州市）方程$\frac{6}{(x+1)(x-1)}-\frac{3}{x-1}=1$的解为_____.

【答案】$x=-4$

【解析】根据分式方程的解法，先将式子通分化简为$\frac{-3}{x+1}=1$，最后验证根的情况，进而求解。

$\frac{6}{(x+1)(x-1)}-\frac{3}{x-1}=1$，

$\frac{6}{(x+1)(x-1)}-\frac{3(x+1)}{(x-1)(x+1)}=1$，

$\frac{3-3x}{(x+1)(x-1)}=1$，

$\frac{-3}{x+1}=1$，

$x+1=-3$，

$x=-4$，

经检验 $x=-4$ 是原方程的根。

11.（2019•湖北黄石）分式方程：$\frac{4}{x^2-4x}-\frac{1}{x-4}=1$的解为_____.

【答案】$x=-1$

【解析】分式方程去分母转化为整式方程，求出整式方程的解得到 x 的值，经检验即可得到分式方程的解.

去分母得：$4-x=x^2-4x$，即 $x^2-3x-4=0$，

解得：$x=4$ 或 $x=-1$，

经检验 $x=4$ 是增根，分式方程的解为 $x=-1$

12.（2019 四川巴中）若关于 x 的分式方程$\frac{x}{x-2}+\frac{2m}{2-x}=2m$有增根，则 m 的值为_____.

【答案】1

【解析】增根是化为整式方程后产生的不适合分式方程的根．所以应先确定增根的可能值，让最简公分母 $x-2=0$，得到 $x=2$，然后代入化为整式方程的方程算出 m 的值.

方程两边都乘 $x-2$，得 $x-2m=2m（x-2）$

∵原方程有增根，

∴最简公分母 $x-2=0$，

解得 $x=2$，

当 $x=2$ 时，$m=1$

故 m 的值是 1

13.（2019•江苏宿迁）关于 x 的分式方程$\frac{1}{x-2}+\frac{a-2}{2-x}=1$ 的解为正数，则 a 的取值范围是____.

【答案】$a<5$ 且 $a\neq3$.

【解析】直接解分式方程，进而利用分式方程的解是正数得出 a 的取值范围，进而结合分式方程有意义的条件分析得出答案.

去分母得：$1-a+2=x-2$，

解得：$x=5-a$，

$5-a>0$，

解得：$a<5$，

当 $x=5-a=2$ 时，$a=3$ 不合题意，

故 $a<5$ 且 $a\neq3$.

14.（2019•贵州省安顺市）某生态示范园计划种植一批蜂糖李，原计划总产量达 36 万千克，为了满足市场需求，现决定改良蜂糖李品种，改良后平均每亩产量是原计划的 1.5 倍，总产量比原计划增加了 9 万千克，种植亩数减少了 20 亩，则原计划和改良后平均每亩产量各多少万千克？设原计划平均亩产量为 x 万千克，则改良后平均每亩产量为 1.5x 万千克，根据题意列方程为_____.

【答案】$\frac{36}{x}-\frac{36+9}{1.5x}=20$.

【解析】设原计划平均亩产量为 x 万千克，则改良后平均每亩产量为 1.5x 万千克，

依题意，得：$\frac{36}{x}-\frac{36+9}{1.5x}=20$.

故答案为：$\frac{36}{x}-\frac{36+9}{1.5x}=20$.

15. (2019 黑龙江绥化)甲乙两辆汽车同时从 A 地出发,开往相距 200km 的 B 地,甲,乙两车的速度之比是 4:5,结果乙车比甲车早 30 分钟到达 B 地,则甲车速度为_____km/h.

【答案】80

【解析】分式方程的应用。

设甲车速度为 4x,乙车速度为 5x,根据题意得:$\frac{200}{4x}-\frac{200}{5x}=\frac{1}{2}$,

解之,得 x=20,∴甲车速度为 4x=80.

三、解答题

16.（2019 广西梧州）解方程：$\frac{x^2+2}{x-2}+1=\frac{6}{x-2}$.

【答案】$x=-3$是分式方程的解.

【解析】直接利用分式方程的解法解方程得出答案．正确去分母、检验是解题关键.

方程两边同乘以$(x-2)$得：$x^2+2+x-2=6$，

则$x^2+x-6=0$，

$(x-2)(x+3)=0$，

解得：$x_1=2$，$x_2=-3$，

检验：当$x=2$时，$x-2=0$，故$x=2$不是方程的根，

$x=-3$是分式方程的解.

17.（2019•湖北天门）解分式方程：$\frac{2}{x-1}=\frac{5}{x^2-1}$.

【答案】见解析。

【解析】去分母化分式方程为整式方程，解之求得x的值，再检验即可得.

两边都乘以（x+1）（x﹣1），得：2（x+1）＝5，

解得：$x=\frac{3}{2}$，

检验：当$x=\frac{3}{2}$时，（x+1）（x﹣1）＝$\frac{5}{4}$≠0，

∴原分式方程的解为$x=\frac{3}{2}$.

18.（2019 贵州省毕节市）解方程：$1-\frac{x-3}{2x+2}=\frac{3x}{x+1}$.

【答案】见解析。

【解析】观察可得最简公分母是2（x+1），方程两边乘最简公分母，可以把分式方程转化为整式方程求解.

去分母得，

2x+2﹣（x﹣3）＝6x，

∴x+5＝6x，

解得，x＝1

经检验：x＝1是原方程的解.

19.（2019 年陕西省）解分式方程：$\frac{x-2}{x-1}+2=\frac{2}{1-x}$.

【答案】$x=\frac{2}{3}$.

【解析】去分母，解整式方程，检验根的情况，回答问题.

$\frac{x-2}{x-1}+2=\frac{2}{1-x}$

$\frac{x-2}{x-1}+2=-\frac{2}{x-1}$

方程两边同乘$(x-1)$，得

$x-2+2(x-1)=-2$

解得 $x=\frac{2}{3}$

检验：当$x=\frac{2}{3}$时，$(x-1)\neq 0$，所以$x=\frac{2}{3}$是原分式方程的解

所以原分式方程的解为$x=\frac{2}{3}$.

20.(2019 黑龙江大庆)某工厂现在平均每天比原计划多生产 50 台机器,现在生产 600 台机器所需时间与原计划生产 450 台机器所需时间相同,求该工厂原来平均每天生产多少台机器?

【答案】见解析。

【解析】由已知列出分式方程,解之可得.

设原来每天生产 x 台机器,则现在每天生产(x+50)台,

根据题意得:$\frac{450}{x}=\frac{600}{x+50}$,

解之,得 x＝150,

经检验,x＝150 是原分式方程的解.答:该工厂原来平均每天生产 150 台机器.

21.（2019 吉林长春）为建国 70 周年献礼，某灯具厂计划加工 9000 套彩灯，为尽快完成任务，实际每天加工彩灯的数量是原计划的 1.2 倍，结果提前 5 天完成任务。求该灯具厂原计划每天加工这种彩灯的数量.

【答案】300 套.

【解析】该灯具厂原计划每天加工这种彩灯的数量为 x 套，则实际每天加工彩灯的数量为 $1.2x$ 套，

由题意得：$\frac{9000}{x}-\frac{9000}{1.2x}=5$，

解得：x=300，

经检验，x=300 是原方程的解，且符合题意。

22.（2019•湖南衡阳）某商店购进 A、B 两种商品，购买 1 个 A 商品比购买 1 个 B 商品多花 10 元，并且花费 300 元购买 A 商品和花费 100 元购买 B 商品的数量相等.

（1）求购买一个 A 商品和一个 B 商品各需要多少元；

（2）商店准备购买 A、B 两种商品共 80 个，若 A 商品的数量不少于 B 商品数量的 4 倍，并且购买 A、B 商

品的总费用不低于 1000 元且不高于 1050 元，那么商店有哪几种购买方案？

【答案】见解析。

【解析】本题考查了分式方程的应用以及一元一次不等式的应用，解题的关键是：（1）找准等量关系，正确列出分式方程；（2）根据各数量之间的关系，正确列出一元一次不等式组.

（1）设购买一个 B 商品需要 x 元，则购买一个 A 商品需要（x+10）元，

依题意，得：$\frac{300}{x+10}=\frac{100}{x}$，

解得：x=5，

经检验，x=5 是原方程的解，且符合题意，

∴x+10=15.

答：购买一个 A 商品需要 15 元，购买一个 B 商品需要 5 元.

（2）设购买 B 商品 m 个，则购买 A 商品（80 - m）个，

依题意，得：$\begin{cases}80-m\geqslant 4m\\15(80-m)+5m\geqslant 1000,\\15(80-m)+5m\leqslant 1050\end{cases}$

解得：15≤m≤16.

∵m 为整数，∴m=15 或 16.

∴商店有 2 种购买方案，方案①：购进 A 商品 65 个、B 商品 15 个；

方案②：购进 A 商品 64 个、B 商品 16 个.

23.（2019 湖南湘西）列方程解应用题：

某列车平均提速 80km/h，用相同的时间，该列车提速前行驶 300km，提速后比提速前多行驶 200km，求该列车提速前的平均速度.

【答案】该列车提速前的平均速度为 120km/h.

【解析】设该列车提速前的平均速度为 $x km/h$，则提速后的平均速度为（x+80）km/h，根据时间＝路程÷速度结合提速前行驶 300km 和提速后行驶 500km（300+200）所用时间相等，即可得出关于 x 的分式方程，解之经检验后即可得出结论.

设该列车提速前的平均速度为 $x km/h$，则提速后的平均速度为（x+80）km/h，

依题意，得：$\frac{300}{x}=\frac{300+200}{x+80}$，

解得：x=120，

经检验，x=120 是原方程的解，且符合题意.