专题 09 一元二次方程及其应用

专题知识回顾

1．定义：等号两边都是整式，只含有一个未知数，并且未知数的最高次数是 2 的方程，叫做一元二次方程。

2.一元二次方程的一般形式：$ax^2+bx+c=0(a\neq0)$。其中 ax^2 是二次项，a 是二次项系数；bx 是一次项，b 是一次项系数；c 是常数项。

3. 一元二次方程的根：使方程左右两边相等的未知数的值就是这个一元二次方程的解，一元二次方程的解也叫做一元二次方程的根。

4.一元二次方程的解法

有直接开方法、配方法、公式法、因式分解法。

（1）直接开方法。

适用形式：$x^2=p$、$(x+n)^2=p$ 或$(mx+n)^2=p$。

（2）配方法。套用公式 $a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$；$a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$，配方法解一元二次方程的一般步骤是：

①化简——把方程化为一般形式，并把二次项系数化为 1；

②移项——把常数项移项到等号的右边；

③配方——两边同时加上 b^2，把左边配成 $x^2+2bx+b^2$ 的形式，并写成完全平方的形式；

④开方，即降次；

⑤解一次方程。

（3）公式法。

当 $b^2-4ac\geq0$ 时，方程 $ax^2+bx+c=0$ 的实数根可写为：$x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ 的形式，这个式子叫做一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的求根公式。这种解一元二次方程的方法叫做公式法。

①$b^2-4ac>0$ 时，方程有两个不相等的实数根。

$x_1=\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$，$x_2=\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

②$b^2-4ac=0$ 时，方程有两个相等的实数根。

$x_1=x_2=-\dfrac{b}{2a}$

③b^2-4ac＜0 时，方程无实数根。

定义：b^2-4ac 叫做一元二次方程 ax^2+bx+c=0 的根的判别式，通常用字母Δ表示，即Δ=b^2-4ac。

（4）因式分解法。因式分解法就是利用因式分解的手段，求出方程的解的方法，这种方法简单易行，是解一元二次方程最常用的方法。主要用提公因式法、平方差公式。

5.一元二次方程根与系数的关系

如果方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$ 的两个实数根是 x_1，x_2，那么 $x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}$，$x_1x_2=\dfrac{c}{a}$。也就是说，对于任何一个有实数根的一元二次方程，两根之和等于方程的一次项系数除以二次项系数所得的商的相反数；两根之积等于常数项除以二次项系数所得的商。

6.解有关一元二次方程的实际问题的一般步骤

第 1 步：审题。认真读题，分析题中各个量之间的关系。

第 2 步：设未知数。根据题意及各个量的关系设未知数。

第 3 步：列方程。根据题中各个量的关系列出方程。

第 4 步：解方程。根据方程的类型采用相应的解法。

第 5 步：检验。检验所求得的根是否满足题意。

第 6 步：答。

专题典型题考法及解析

【例题 1】 (2019 安徽)解方程：（x﹣1）^{2}=4.

【例题 2】(2019 山西）一元二次方程 $x^2-4x-1=0$ 配方后可化为（　　）

A. $(x+2)^2=3$　　B. $(x+2)^2=5$　　C. $(x-2)^2=3$　　D. $(x-2)^2=5$

【例题 3】（2019 年山东省威海市）一元二次方程 3x^2=4﹣2x 的解是_____.

【例题 4】（2019 年江苏省扬州市）一元二次方程 x（x﹣2）=x﹣2 的根是_____.

【例题 5】（2019 北京市） 关于 x 的方程 $x^2-2x+2m-1=0$ 有实数根，且 m 为正整数，求 m 的值及此时方程的根.

【例题 6】(2019 四川泸州)已知 x_1，x_2 是一元二次方程 x^2﹣x﹣4=0 的两实根，则（x_1+4）（x_2+4）的值是_____.

【例题 7】 (2019 安徽)据国家统计局数据，2018 年全年国内生产总值为 90.3 万亿，比 2017 年增长 6.6%．假设国内生产总值的年增长率保持不变，则国内生产总值首次突破 100 万亿的年份是（　　）

A．2019 年　　B．2020 年　　C．2021 年　　D．2022 年

专题典型训练题

一、选择题

1.(2019 甘肃省兰州市) $x=1$ 是关于的一元二次方程 $x^2+ax+2b=0$ 的解，则 $2a+4b=$（　　）

A. －2　　B. －3　　C. 4　　D. －6

2.（2019•湖南怀化）一元二次方程 $x^2+2x+1=0$ 的解是（　　）

A．$x_1=1$，$x_2=-1$　　B．$x_1=x_2=1$　　C．$x_1=x_2=-1$　　D．$x_1=-1$，$x_2=2$

3.（2019•浙江金华）用配方法解方程 $x^2-6x-8=0$ 时，配方结果正确的是（　）

A. $(x-3)^2=17$　B. $(x-3)^2=14$　C.（$x-6)^2=44$　D. $(x-3)^2=1$

4.（2019 湖北咸宁）若关于 x 的一元二次方程 $x^2-2x+m=0$ 有实数根，则实数 m 的取值范围是（　　）

A．$m<1$　　B．$m\leq1$　　C．$m>1$　　D．$m\geq1$

5.(2019 内蒙古包头市)已知等腰三角形的三边长分别为 $a,b,4$，且 a,b 是关于 x 的一元二次方程 $x^2-12x+m+2=0$ 的两根，则 m 的值是（　）

A. 34　　B.30　　C.30 或 34　　D.30 或 36

6.（2019•山东省聊城市）若关于 x 的一元二次方程（$k-2$）$x^2-2kx+k=6$ 有实数根，则 k 的取值范围为（　　）

A．$k\geq0$　　B．$k\geq0$ 且 $k\neq2$　　C．$k\geq\frac{3}{2}$　　D．$k\geq\frac{3}{2}$且 $k\neq2$

7.（2019 湖北仙桃）若方程 $x^2-2x-4=0$ 的两个实数根为α，β，则$\alpha^2+\beta^2$ 的值为（　　）

A．12　　B．10　　C．4　　D．－4

8.（2019•江苏泰州）方程 $2x^2+6x-1=0$ 的两根为 x_1 、x_2 则 x_1+x_2 等于（　　）

A．－6　　B．6　　C．－3　　D．3

9.（2019 山东淄博）若 $x_1+x_2=3$，$x_1^2+x_2^2=5$，则以 x_1，x_2 为根的一元二次方程是（　　）

A．$x^2-3x+2=0$　　B．$x^2+3x-2=0$　　C．$x^2+3x+2=0$　　D．$x^2-3x-2=0$

10.（2019•广东）已知 x_1x_2 是一元二次方程了 $x^2-2x=0$ 的两个实数根，下列结论错误的是（　）

A．$x_1\neq x_2$　　B．$x_1^2-2x_1=0$　　C．$x_1+x_2=2$　　D．$x_1\cdot x_2=2$

11.（2019•广西贵港）若α，β是关于 x 的一元二次方程 $x^2-2x+m=0$ 的两实根，且$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=-\frac{2}{3}$，则 m 等于（　　）

A．－2　　B．－3　　C．2　　D．3

12.（2019•浙江宁波）能说明命题“关于 x 的方程 $x^2-4x+m=0$ 一定有实数根”是假命题的反例为（　　）

A．$m=-1$　　B．$m=0$　　C．$m=4$　　D．$m=5$

13.（2019•黑龙江哈尔滨）某商品经过连续两次降价，售价由原来的每件 25 元降到每件 16 元，则平均每次降价的百分率为（　　）

A．20%　　B．40%　　C．18%　　D．36%

14.（2019•湖南衡阳）国家实施”精准扶贫“政策以来，很多贫困人口走向了致富的道路．某地区 2016 年底有贫困人口 9 万人，通过社会各界的努力，2018 年底贫困人口减少至 1 万人．设 2016 年底至 2018 年底该地区贫困人口的年平均下降率为 x，根据题意列方程得（　　）

A．$9（1-2x）=1$　　B．$9（1-x）^2=1$　　C．$9（1+2x）=1$　　D．$9（1+x）^2=1$

二、填空题

15.（2019 湖北十堰）对于实数 a，b，定义运算“◎”如下：$a◎b=（a+b）^2-（a-b）^2$．若 $（m+2）◎（m-3）=24$，则 $m=$_____.

16.（2019 吉林长春）一元二次方程 $x^2-3x+1=0$ 根的判别式的值为_____.

17.（2019 吉林省）若关于 x 的一元二次方程 $(x+3)^2=c$ 有实数根，则 c 的值可以为_____（写出一个即可）

18.（2019 年湖北省荆门市）已知 x_1，x_2 是关于 x 的方程 $x^2+（3k+1）x+2k^2+1=0$ 的两个不相等实数根，且满足 $（x_1-1）（x_2-1）=8k^2$，则 k 的值为_____.

19.（2019 广西桂林）一元二次方程 $(x-3)(x-2)=0$ 的根是_____.

20.（2019 年四川省遂宁市）若关于 x 的方程 $x^2-2x+k=0$ 有两个不相等的实数根，则 k 的取值范围为_____.

21.（2019 年江西省）设 x_1，x_2 是一元二次方程 $x^2-x-1=0$ 的两根，则 $x_1+x_2+x_1x_2=$____.

22.（2019 年四川省攀枝花市）已知 x_1，x_2 是方程 $x^2-2x-1=0$ 的两根，则 $x_1^2+x_2^2=$_____.

23.（2019 年四川省成都市）已知 x_1，x_2 是关于 x 的一元二次方程 $x^2+2x+k-1=0$ 的两个实数根，且 $x_1^2+x_2^2-x_1x_2=13$，则 k 的值为_____.

24.（2019 年甘肃省天水市）中国“一带一路”给沿线国家和地区带来很大的经济效益，沿线某地区居民 2016 年人均年收入 20000 元，到 2018 年人均年收入达到 39200 元．则该地区居民年人均收入平均增长率为_____.（用百分数表示）

25.（2019 年四川省宜宾市）某产品每件的生产成本为 50 元，原定销售价 65 元，经市场预测，从现在开始的第一季度销售价格将下降 10%，第二季度又将回升 5%．若要使半年以后的销售利润不变，设每个季度平均降低成本的百分率为 x，根据题意可列方程是_____.

26.（2019 年江苏省连云港市）已知关于 x 的一元二次方程 $ax^2+2x+2-c=0$ 有两个相等的实数根，则 $\frac{1}{a}+c$ 的值等于_____.

27.（2019 年浙江省嘉兴市）在 x^2+____$+4=0$ 的括号中添加一个关于 x 的一次项，使方程有两个相等的实数

根.

28.（2019 年山东省枣庄市）已知关于 x 的方程 $ax^2+2x-3=0$ 有两个不相等的实数根，则 a 的取值范围是_____.

三、解答题

29.（2019 年浙江省绍兴市）x 为何值时，两个代数式 x^2+1，$4x+1$ 的值相等？

30. (2019 黑龙江绥化)已知关于 x 的方程 $kx^2-3x+1=0$ 有实数根.

(1)求 k 的取值范围;

(2)若该方程有两个实数根,分别为 x_1 和 x_2,当 $x_1+x_2+x_1x_2=4$ 时,求 k 的值.

31. （ 2019 湖北十堰）已知于 x 的元二次方程 $x^2-6x+2a+5=0$ 有两个不相等的实数根 x_1，x_2.

（1）求 a 的取值范围；

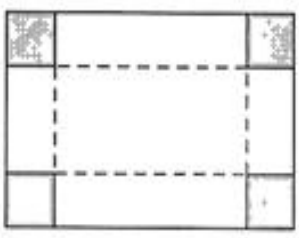
（2）若 $x_1^2+x_2^2-x_1x_2\leq 30$，且 a 为整数，求 a 的值.

32. （2019 孝感）已知关于 x 的一元二次方程 $x^2-2(a-1)x+a^2-a-2=0$ 有两个不相等的实数根 x_1，x_2.

（1）若 a 为正整数，求 a 的值；

（2）若 x_1，x_2 满足 $x_1^2+x_2^2-x_1x_2=16$，求 a 的值.

33.（2019 江苏徐州）如图所示，有一块矩形硬纸板，长 30cm,宽 20cm.在其四角各剪去一个同样的正方形，然后将四周突出部分折起，可制成一个无盖长方体盒子。当剪去正方形的边长取何值时，所得长方体盒子的侧面积为 $200cm^2$？



34.（2019•湖南衡阳）关于 x 的一元二次方程 $x^2-3x+k=0$ 有实数根.

（1）求 k 的取值范围；

（2）如果 k 是符合条件的最大整数，且一元二次方程 $(m-1)x^2+x+m-3=0$ 与方程 $x^2-3x+k=0$ 有一个相同的根，求此时 m 的值.

35. （2019•广西贵港）为了满足师生的阅读需求，某校图书馆的藏书从 2016 年底到 2018 年底两年内由 5 万册增加到 7.2 万册.

（1）求这两年藏书的年均增长率；

（2）经统计知：中外古典名著的册数在2016年底仅占当时藏书总量的5.6%，在这两年新增加的图书中，中外古典名著所占的百分率恰好等于这两年藏书的年均增长率，那么到2018年底中外古典名著的册数占藏书总量的百分之几？

36.（2019•湖南长沙）近日，长沙市教育局出台《长沙市中小学教师志愿辅导工作实施意见》，鼓励教师参与志愿辅导，某区率先示范，推出名师公益大课堂，为学生提供线上线下免费辅导，据统计，第一批公益课受益学生2万人次，第三批公益课受益学生2.42万人次．

（1）如果第二批，第三批公益课受益学生人次的增长率相同，求这个增长率；

（2）按照这个增长率，预计第四批公益课受益学生将达到多少万人次？

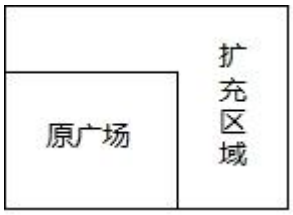
37.（2019•湖南邵阳）2019年1月14日，国新办举行新闻发布会，海关总署新闻发言人李魁文在会上指出：在2018年，我国进出口规模创历史新高，全年外贸进出口总值为30万亿元人民币．有望继续保持全球货物贸易第一大国地位．预计2020年我国外贸进出口总值将达36.3万亿元人民币．求这两年我国外贸进出口总值的年平均增长率．

38.（2019•湖北黄石）已知关于x的一元二次方程$x^2-6x+(4m+1)=0$有实数根．

（1）求m的取值范围；

（2）若该方程的两个实数根为x_1.x_2，且$|x_1-x_2|=4$，求m的值．

39.（2019•南京）某地计划对矩形广场进行扩建改造．如图，原广场长50m，宽40m，要求扩充后的矩形广场长与宽的比为3：2．扩充区域的扩建费用每平方米30元，扩建后在原广场和扩充区域都铺设地砖，铺设地砖费用每平方米100元．如果计划总费用642000元，扩充后广场的长和宽应分别是多少米？



40.（2019•山东省德州市 ）习近平总书记说：“读书可以让人保持思想活力，让人得到智慧启发，让人滋养浩然之气”．某校为响应我市全民阅读活动，利用节假日面向社会开放学校图书馆．据统计，第一个月进馆128人次，进馆人次逐月增加，到第三个月末累计进馆608人次，若进馆人次的月平均增长率相同．

（1）求进馆人次的月平均增长率；

（2）因条件限制，学校图书馆每月接纳能力不超过500人次，在进馆人次的月平均增长率

不变的条件下，校图书馆能否接纳第四个月的进馆人次，并说明理由．