专题 11　一次函数

专题知识回顾

1．一次函数的定义

一般地，形如 $y=kx+b$（k，b 是常数，且 $k\neq 0$）的函数，叫做一次函数，其中 x 是自变量。

2．一次函数的图像：是不经过原点的一条直线。

3．一次函数的性质：

（1）当 k>0 时，图象主要经过第一、三象限；此时，y 随 x 的增大而增大；

（2）当 k<0 时，图象主要经过第二、四象限，此时，y 随 x 的增大而减小；

（3）当 b>0 时，直线交 y 轴于正半轴；

（4）当 b<0 时，直线交 y 轴于负半轴。

4. 用待定系数法确定函数解析式的一般步骤：

（1）根据已知条件写出含有待定系数的函数关系式；

（2）将 x、y 的几对值或图象上的几个点的坐标代入上述函数关系式中得到以待定系数为未知数的方程；

（3）解方程得出未知系数的值；

（4）将求出的待定系数代回所求的函数关系式中得出所求函数的解析式.

5．一正比例函数的定义

一般地，形如 y=kx(k 是常数，k≠0)的函数叫做正比例函数，其中 k 叫做比例系数。正比例函数是一次函数的特例，一次函数包括正比例函数.

6.正比例函数的图像：是经过原点的一条直线。

7．正比例函数的性质

（1）当 k>0 时，直线 y=kx 经过三、一象限，y 随 x 的增大而增大；

（2）当 k<0 时，　直线 y=kx 经过二、四象限，y 随 x 的增大而减小.

8．正比例函数与一次函数之间的关系

一次函数 y=kx＋b 的图象是一条直线，它可以看作是由直线 y=kx 平移|b|个单位长度而得到（当 b>0 时，向上平移；当 b<0 时，向下平移）

专题典型题考法及解析

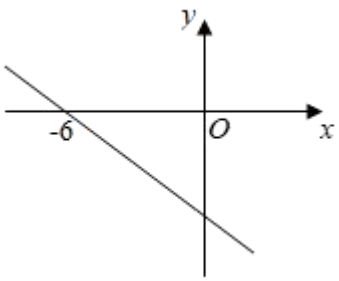
【例题 1】（2019 贵州省毕节市）已知一次函数 $y=kx+b$（k，b 为常数，$k\neq0$）的图象经过一、三、四象限，则下列结论正确的是（　　）

A．$kb>0$　　B．$kb<0$　　C．$k+b>0$　　D．$k+b<0$

【答案】B.

【解析】$y=kx+b$ 的图象经过一、三、四象限，$\therefore k>0$，$b<0$，$\therefore kb<0$；故选：B.

【例题 2】（2019•江苏无锡）已知一次函数 $y=kx+b$ 的图象如图所示，则关于 x 的不等式 $3kx-b>0$ 的解集为_____.



【答案】$x<2$.

【解析】直接利用图象把（-6，0）代入，进而得出 k，b 之间的关系，再利用一元一次不等式解法得出答案.

∵图象过（-6，0），则 $0=-6k+b$，

则 $b=6k$，

故 $3kx-b=3kx-6k>0$，

∵$k<0$，

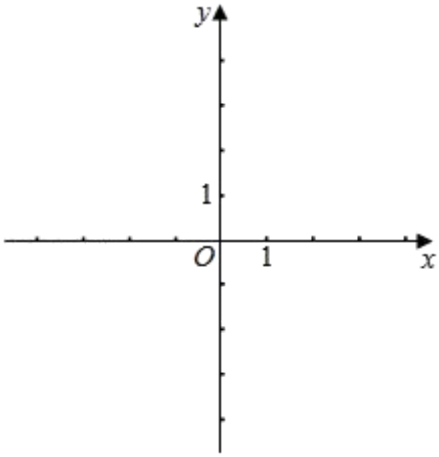
∴$x-2<0$，

解得：$x<2$.

【例题 3】（2019•上海）在平面直角坐标系 xOy 中（如图），已知一次函数的图象平行于直线 $y=\frac{1}{2}x$，且经过点 A（2，3），与 x 轴交于点 B.

（1）求这个一次函数的解析式；

（2）设点 C 在 y 轴上，当 $AC=BC$ 时，求点 C 的坐标.



【答案】（1）一次函数的解析式为 $y=\frac{1}{2}x+2$；

（2）点 C 的坐标是（0，$-\frac{1}{2}$）.

【解析】设一次函数的解析式为 $y=kx+b$，解方程即可得到结论；

求得一次函数的图形与 x 轴的解得为 B（-4，0），根据两点间的距离公式即可得到结论.

（1）设一次函数的解析式为：$y=kx+b$，

∵一次函数的图象平行于直线 $y=\frac{1}{2}x$，

∴$k=\frac{1}{2}$，

∵一次函数的图象经过点 A（2，3），

∴$3=\frac{1}{2}\times 2+b$，

∴$b=2$，

∴一次函数的解析式为 $y=\frac{1}{2}x+2$；

（2）由 $y=\frac{1}{2}x+2$，令 $y=0$，得 $\frac{1}{2}x+2=0$，

∴$x=-4$，

∴一次函数的图形与 x 轴的解得为 B（-4，0），

∵点 C 在 y 轴上，

∴设点 C 的坐标为（0，y），

∵$AC=BC$，

∴$\sqrt{(2-0)^2+(3-y)^2}=\sqrt{(-4-0)^2+(0-y)^2}$，

∴$y=-\frac{1}{2}$，

经检验：$y=-\frac{1}{2}$是原方程的根，

∴点 C 的坐标是（0，$-\frac{1}{2}$）.

专题典型训练题

一、选择题

1.（2019•江苏扬州）若点 P 在一次函数 $y=-x+4$ 的图像上，则点 P 一定不在（　　）

A.第一象限　　B. 第二象限　　C. 第三象限　　D. 第四象限

【答案】C

【解析】坐标系中，一次函数 $y=-x+4$ 经过第一、二、四象限，所以不经过第三象限。

2.（2019 广西河池）函数 $y=x-2$ 的图象不经过(　　)

A．第一象限　　B．第二象限　　C．第三象限　　D．第四象限

【答案】B .

【解析】一次函数 $y=x-2$，$\because k=1>0$，∴函数图象经过第一三象限，

$\because b=-2<0$，∴函数图象与 y 轴负半轴相交，

∴函数图象经过第一三四象限，不经过第二象限．故选：B .

3.（2019 年陕西省）对于正比例函数 $y=-2x$，当自变量 x 的值增加 1 时，函数 y 的值增加（　　）.

A．-2　　B．2　　C．$-\frac{1}{3}$　　D．$\frac{1}{3}$

【答案】A

【解析】因为正比例函数 $y=-2x$，所以当自变量 x 的值增加 1 时，函数 y 的值减少 2，故，当自变量 x 的值增加 1 时，函数 y 的值增加 -2 .

4.（2019 年陕西省）已知一次函数 $y=kx+b$ 的图象经过点 $A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$，且 $x_2=1+x_1$ 时 $y_2=y_1-2$，则 k 等于（　　）.

A．1　　B．2　　C．-1　　D．-2

【答案】D

【解析】因为一次函数 $y=kx+b$ 的图象经过点 $A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$，所以 $y_1=kx_1+b$，$y_2=kx_2+b$，因为当 $x_2=1+x_1$ 时，$y_2=y_1-2$，所以当 $x_2=1+x_1$ 时，$kx_2+b=kx_1+b-2$，即 $k(1+x_1)+b=kx_1+b-2$，解得 $k=-2$．

5.（2019 广西桂林）如图，四边形 $ABCD$ 的顶点坐标分别为 $A(-4,0)$，$B(-2,-1)$，$C(3,0)$，$D(0,3)$，当过点 B 的直线 l 将四边形 $ABCD$ 分成面积相等的两部分时，直线 l 所表示的函数表达式为(　　)

A．$y=\frac{11}{10}x+\frac{6}{5}$　　B．$y=\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}$　　C．$y=x+1$　　D．$y=\frac{5}{4}x+\frac{3}{2}$

【答案】D

【解析】由 $A(-4,0)$，$B(-2,-1)$，$C(3,0)$，$D(0,3)$，

$\therefore AC=7$，$DO=3$，

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 分成面积 $=\frac{1}{2}\times AC\times(|y_B|+3)=\frac{1}{2}\times7\times4=14$，

可求 CD 的直线解析式为 $y=-x+3$，

设过 B 的直线 l 为 $y=kx+b$，

将点 B 代入解析式得 $y=kx+2k-1$，

$\therefore$ 直线 CD 与该直线的交点为 $(\frac{4-2k}{k+1}$，$\frac{5k-1}{k+1})$，

直线 $y=kx+2k-1$ 与 x 轴的交点为 $(\frac{1-2k}{k}$，$0)$，

$\therefore 7=\frac{1}{2}\times(3-\frac{1-2k}{k})\times(\frac{5k-1}{k+1}+1)$，

$\therefore k=\frac{5}{4}$ 或 $k=0$，

$\therefore k=\frac{5}{4}$，

$\therefore$ 直线解析式为 $y=\frac{5}{4}x+\frac{3}{2}$

6.（2019 广西梧州）直线 $y=3x+1$ 向下平移 2 个单位，所得直线的解析式是(　　)

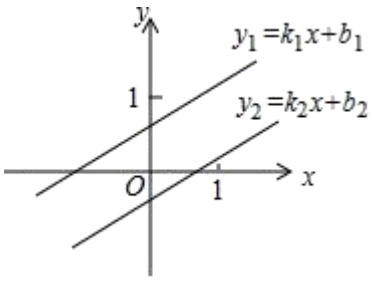
A．$y=3x+3$　　B．$y=3x-2$　　C．$y=3x+2$　　D．$y=3x-1$

【答案】D

【解析】直线 $y=3x+1$ 向下平移 2 个单位，所得直线的解析式是：$y=3x+1-2=3x-1$．

7.（2019 湖南邵阳）一次函数 $y_1=k_1x+b_1$ 的图象 l_1 如图所示，将直线 l_1 向下平移若干个单位后得直线 l_2，l_2

的函数表达式为 $y_2=k_2x+b_2$．下列说法中错误的是(　　)



A．$k_1=k_2$　　B．$b_1<b_2$

C．$b_1>b_2$　　D．当 $x=5$ 时，$y_1>y_2$

【答案】*B*

【解析】∵将直线 l_1 向下平移若干个单位后得直线 l_2，

∴直线 l_1 // 直线 l_2，

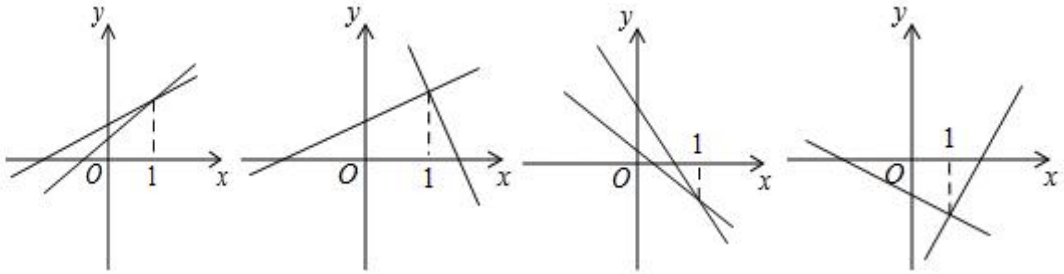
∴$k_1=k_2$，

∵直线 l_1 向下平移若干个单位后得直线 l_2，

∴$b_1>b_2$，

∴当 $x=5$ 时，$y_1>y_2$

8.（2019•浙江杭州）已知一次函数 $y_1=ax+b$ 和 $y_2=bx+a$（$a\neq b$），函数 y_1 和 y_2 的图象可能是（　　）



A　　B　　C　　D

【答案】A

【解析】根据直线①判断出 a、b 的符号，然后根据 a、b 的符号判断出直线②经过的象限即可，做出判断．

*A.*由①可知：$a>0$，$b>0$．

∴直线②经过一、二、三象限，故 *A* 正确；

B.由①可知：$a<0$，$b>0$.

∴直线②经过一、二、三象限，故 *B* 错误；

C.由①可知：$a<0$，$b>0$.

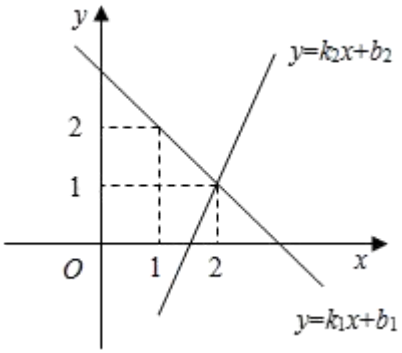
∴直线②经过一、二、四象限，交点不对，故 *C* 错误；

D.由①可知：$a<0$，$b<0$，

∴直线②经过二、三、四象限，故 *D* 错误.

二、填空题

9.（2019•贵阳）在平面直角坐标系内，一次函数 $y=k_1x+b_1$ 与 $y=k_2x+b_2$ 的图象如图所示，则关于 x，y 的方程组 $\begin{cases}y-k_1x=b_1\\y-k_2x=b_2\end{cases}$ 的解是_____.



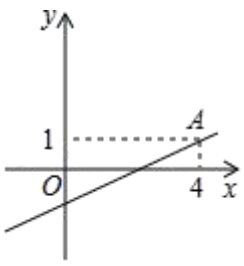
【答案】$\begin{cases}x=2\\y=1\end{cases}$.

【解析】利用方程组的解就是两个相应的一次函数图象的交点坐标求解.

∵一次函数 $y=k_1x+b_1$ 与 $y=k_2x+b_2$ 的图象的交点坐标为（2，1），

∴关于 x，y 的方程组 $\begin{cases}y-k_1x=b_1\\y-k_2x=b_2\end{cases}$ 的解是 $\begin{cases}x=2\\y=1\end{cases}$.

10.（2019 贵州黔西南州）如图所示，一次函数 $y=ax+b$（a、b 为常数，且 $a>0$）的图象经过点 A（4，1），则不等式 $ax+b<1$ 的解集为_____.



【答案】$x<4$

【解析】函数 $y=ax+b$ 的图象如图所示，图象经过点 A（4，1），且函数值 y 随 x 的增大而增大，

故不等式 $ax+b<1$ 的解集是 $x<4$.

11.（2019 湖南郴州）某商店今年 6 月初销售纯净水的数量如下表所示：

日期	1	2	3	4
数量（瓶）	120	125	130	135

观察此表，利用所学函数知识预测今年 6 月 7 日该商店销售纯净水的数量约为_____瓶.

【答案】150

【解析】这是一个一次函数模型，设 $y=kx+b$，则有$\begin{cases}k+b=120\\2k+b=125\end{cases}$，

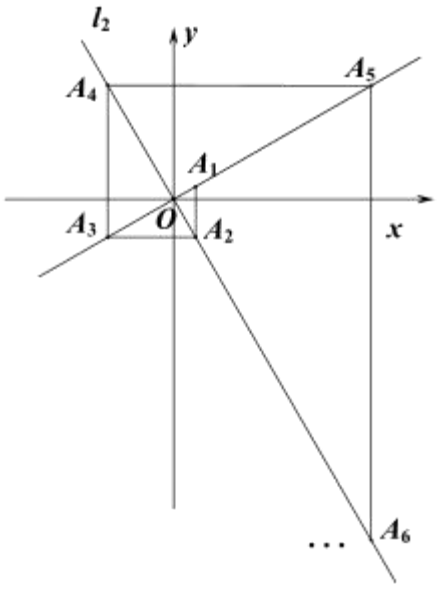
解得$\begin{cases}k=5\\b=115\end{cases}$，

∴$y=5x+115$，

当 $x=7$ 时，$y=150$，

∴预测今年 6 月 7 日该商店销售纯净水的数量约为 150 瓶。

12.（2019 山东东营）如图，在平面直角坐标系中，函数 $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x$ 和 $y=-\sqrt{3}x$ 的图象分别为直线 l_1，l_2，过 l_1 上的点 A_1（1，$\frac{\sqrt{3}}{3}$）作 x 轴的垂线交 l_2 于点 A_2，过点 A_2 作 y 轴的垂线交 l_1 于点 A_3，过点 A_3 作 x 轴的垂线交 l_2 于点 A_4，…依次进行下去，则点 A_{2019} 的横坐标为_____.



【答案】-3^{1009}

【解析】从简单的入手，分别求出 A_2 到 A_9 的横坐标，找出循环，依此规律结合 2019=504×4+3 即可找出

点 A_{2019} 的坐标.

当 x=1 时，y=$-\sqrt{3}$ x=$-\sqrt{3}$，∴A_2（1，$-\sqrt{3}$）；当 y=$\frac{\sqrt{3}}{3}$ x=$-\sqrt{3}$，x=−3，∴A_3（−3，$-\sqrt{3}$）；当 x=−3 时，y=$-\sqrt{3}$ x=$3\sqrt{3}$，∴A_4（−3，$3\sqrt{3}$）；当 y=$\frac{\sqrt{3}}{3}$ x=$3\sqrt{3}$ 时，x=9，∴A_5（9，$3\sqrt{3}$）；同理可得 A_6（9，$-9\sqrt{3}$），A_7（−27，$-9\sqrt{3}$），A_8（−27，$27\sqrt{3}$），A_9（81，$27\sqrt{3}$），…，∴A_{4n+1}（3^{2n}，$3^{2n}\times\frac{\sqrt{3}}{3}$），$A_{4n+2}$（$3^{2n}$，$-3^{2n}\times\sqrt{3}$），$A_{4n+3}$（$-3^{2n+1}$，$-3^{2n+1}\times\frac{\sqrt{3}}{3}$），$A_{4n+4}$（$-3^{2n+1}$，$3^{2n+1}\times\sqrt{3}$），（n 为自然数）．∵ 2019=504×4+3，∴点 A_{2019} 的横坐标为$-3^{2\times504+1}$=**-3^{1009}**.

13.（2019 辽宁本溪）函数 $y=5x$ 的图象经过的象限是_____.

【答案】一、三.

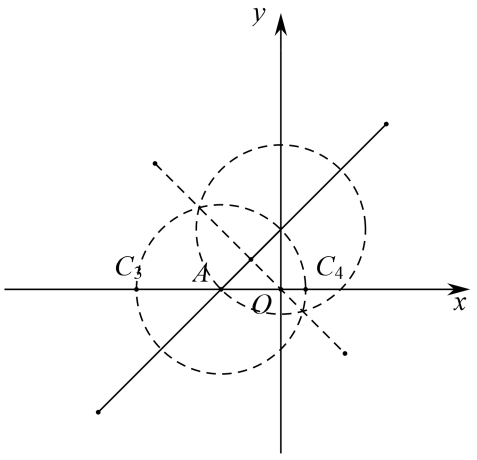
【解析】函数 $y=5x$ 的图象经过一三象限，

故答案为一、三.

14.（2019 江苏徐州）函数 $y=x+1$ 的图像与 x 轴、y 轴分别交于 A、B 两点，点 C 在 x 轴上，若△ABC 为等腰三角形，则满足条件的点 C 共有_____个.

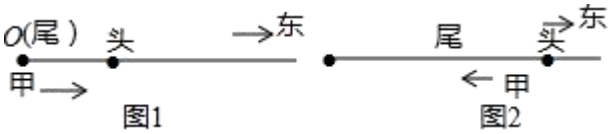
【答案】4

【解析】本题解答时要分类讨论.作 AB 的垂直平分线，交于坐标原点，△OAB 为等腰三角形；以 B 为圆心 BA 长为半径交 x 轴于 C_2，△C_2AB 为等腰三角形，以 A 为圆心，AB 长为半径，交 x 轴于 C_3，C_4，则△C_3AB，△C_4AB 为等腰三角形，所以满足条件的 C 点的有 4 个.



三、解答题

15.（2019•河北）长为 300m 的春游队伍，以 v（m/s）的速度向东行进，如图 1 和图 2，当队伍排尾行进到位置 O 时，在排尾处的甲有一物品要送到排头，送到后立即返回排尾，甲的往返速度均为 $2v$（m/s），当甲返回排尾后，他及队伍均停止行进．设排尾从位置 O 开始行进的时间为 t（s），排头与 O 的距离为 $S_{头}$（m）．



（1）当 $v=2$ 时，解答：

①求 $S_{头}$与 t 的函数关系式（不写 t 的取值范围）；

②当甲赶到排头位置时，求 S 的值；在甲从排头返回到排尾过程中，设甲与位置 O 的距离为 $S_{甲}$（m），求 $S_{甲}$与 t 的函数关系式（不写 t 的取值范围）

（2）设甲这次往返队伍的总时间为 T（s），求 T 与 v 的函数关系式（不写 v 的取值范围），并写出队伍在此过程中行进的路程．

【答案】见解析。

【解析】（1）①排尾从位置 O 开始行进的时间为 t（s），则排头也离开原排头 t（s），

$\therefore S_{头}=2t+300$

②甲从排尾赶到排头的时间为 $300\div(2v-v)=300\div v=300\div 2=150\ s$，

此时 $S_{头}=2t+300=600\ m$

甲返回时间为：$(t-150)\ s$

$\therefore S_{甲}=S_{头}-S_{甲回}=2\times 150+300-4(t-150)=-4t+1200$；

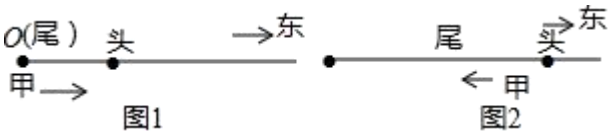
因此，$S_{头}$与 t 的函数关系式为 $S_{头}=2t+300$，当甲赶到排头位置时，求 S 的值为 600m，在甲从排头返回到排尾过程中，$S_{甲}$与 t 的函数关系式为 $S_{甲}=-4t+1200$．

（2）$T=t_{追及}+t_{返回}=\frac{300}{2v-v}+\frac{300}{2v+v}=\frac{400}{v}$，

在甲这次往返队伍的过程中队伍行进的路程为：

$v\times(T-150)=v\times(\frac{400}{v}--150)=400-150v$；

因此 T 与 v 的函数关系式为：$T=\frac{400}{v}$，此时队伍在此过程中行进的路程为（$400-150v$）m．



16.（2019•河南）学校计划为“我和我的祖国”演讲比赛购买奖品．已知购买 3 个 A 奖品和 2 个 B 奖品共需

120 元；购买 5 个 A 奖品和 4 个 B 奖品共需 210 元．

（1）求 A，B 两种奖品的单价；

（2）学校准备购买 A，B 两种奖品共 30 个，且 A 奖品的数量不少于 B 奖品数量的$\frac{1}{3}$．请设计出最省钱的购买方案，并说明理由．

【答案】见解析。

【解析】（1）设 A 的单价为 x 元，B 的单价为 y 元，

根据题意，得

$$\begin{cases}3x+2y=120\\5x+4y=210\end{cases},$$

$$\therefore\begin{cases}x=30\\y=15\end{cases},$$

$\therefore A$ 的单价 30 元，B 的单价 15 元；

（2）设购买 A 奖品 z 个，则购买 B 奖品为（30 - z）个，购买奖品的花费为 W 元，

由题意可知，$z\geq\frac{1}{3}$（30 - z），

$$\therefore z\geq\frac{15}{2},$$

$W=30z+15(30-z)=450+15z$，

当 $z=8$ 时，W 有最小值为 570 元，

即购买 A 奖品 8 个，购买 B 奖品 22 个，花费最少。

17.（2019•浙江湖州）某校的甲、乙两位老师同住一小区，该小区与学校相距 2400 米．甲从小区步行去学校，出发 10 分钟后乙再出发，乙从小区先骑公共自行车，途经学校又骑行若干米到达还车点后，立即步行走回学校．已知甲步行的速度比乙步行的速度每分钟快 5 米．设甲步行的时间为 x（分），图 1 中线段 OA 和折线 $B-C-D$ 分别表示甲、乙离开小区的路程 y（米）与甲步行时间 x（分）的函数关系的图象；图 2 表示甲、乙两人之间的距离 s（米）与甲步行时间 x（分）的函数关系的图象（不完整）．

根据图 1 和图 2 中所给信息，解答下列问题：

（1）求甲步行的速度和乙出发时甲离开小区的路程；

（2）求乙骑自行车的速度和乙到达还车点时甲、乙两人之间的距离；

（3）在图 2 中，画出当 $25\leq x\leq 30$ 时 s 关于 x 的函数的大致图象．（温馨提示：请画在答题卷相对应的图上）

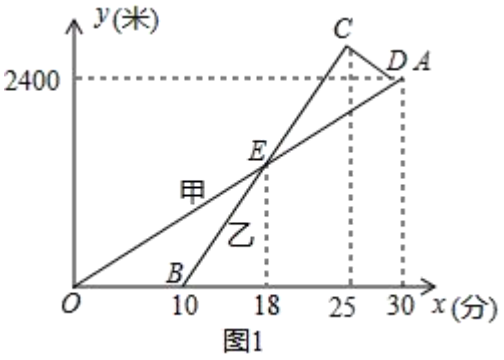


图1

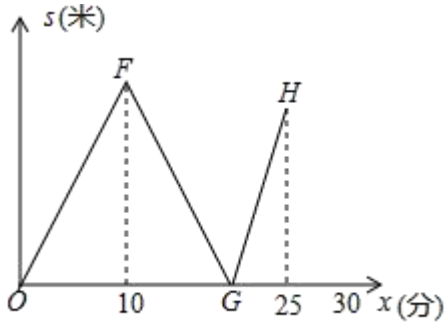


图2

【答案】见解析。

【解析】本题考查一次函数的应用，解答本题的关键是明确题意，利用一次函数的性质和数形结合的思想解答.

（1）由图可得，

甲步行的速度为：2400÷30＝80（米/分），

乙出发时甲离开小区的路程是 10×80＝800（米），

答：甲步行的速度是 80 米/分，乙出发时甲离开小区的路程是 800 米；

（2）设直线 OA 的解析式为 $y=kx$，

$30k=2800$，得 $k=80$，

∴直线 OA 的解析式为 $y=80x$，

当 $x=18$ 时，$y=80\times18=1440$，

则乙骑自行车的速度为：1440÷（18 - 10）＝180（米/分），

∵乙骑自行车的时间为：25 - 10＝15（分钟），

∴乙骑自行车的路程为：180×15＝2700（米），

当 $x=25$ 时，甲走过的路程为：80×25＝2000（米），

∴乙到达还车点时，甲乙两人之间的距离为：2700 - 2000＝700（米），

答：乙骑自行车的速度是 180 米/分，乙到达还车点时甲、乙两人之间的距离是 700 米；

（3）乙步行的速度为：80 - 5＝75（米/分），

乙到达学校用的时间为：25+（2700 - 2400）÷75＝29（分），

当 $25\leq x\leq30$ 时 s 关于 x 的函数的大致图象如右图所示.

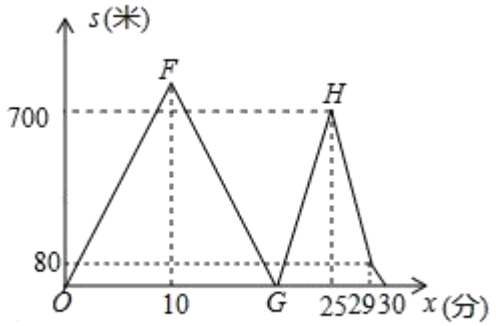


图2

18.（2019 北京市） 在平面直角坐标系 xOy 中，直线 l：$y=kx+1(k\neq 0)$ 与直线 $x=k$，直线 $y=-k$ 分别交于点 A，B，直线 $x=k$ 与直线 $y=-k$ 交于点 C．

（1）求直线 l 与 y 轴的交点坐标；

（2）横、纵坐标都是整数的点叫做整点．记线段 AB，BC，CA 围成的区域（不含边界）为 W．

①当 $k=2$ 时，结合函数图象，求区域 W 内的整点个数；

②若区域 W 内没有整点，直接写出 k 的取值范围．

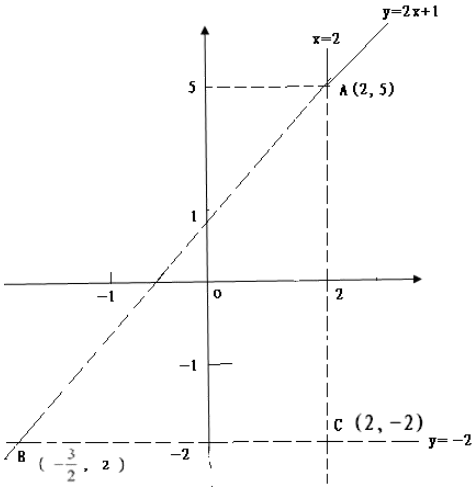
【答案】见解析。

【解析】（1）当 $x=0$ 时，由 $y=kx+1(k\neq 0)=1$；∴直线 l 与 y 轴的交点坐标为 $(0,1)$．

（2）①如下图，当 k=2 时，直线 l：$y=2x+1$，把 $x=2$ 代入直线 l，则 $y=5$．∴ $A(2,5)$；

把 $y=-2$ 代入直线 l，　$-2=2x+1$　∴ $x=-\frac{3}{2}$，　∴ $B\left(-\frac{3}{2},-2\right)$．　$C(2,-2)$．

画出函数 $y=2x+1$ 的图象及直线　$x=2$，直线 $y=-2$ 组成的区域，



显然区域中整数点有（0，-1）、（0，0）、（1，-1）、（1，0）、（1，1）、（1，2）；显然区域 W 内的整点个数有 6 个．

② 由类似①分析图象知区域 W 内没有整点时有 $-1\leq k<0$ 或 $k=-2$．

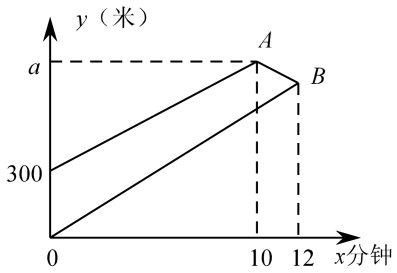
19.（2019 黑龙江省龙东地区）小明放学后从学校回家，出发 5 分钟时，同桌小强发现小明的数学作业卷

忘记拿了，立即拿着数学作业卷按照同样的路线去追赶小明．小强出发 10 分钟时，小明才想起没拿数学作业卷，马上以原速原路返回，在途中与小强相遇．两人离学校的路程 y（米）与小强所用时间 t（分钟）之间的函数图象如图所示．

（1）求函数图象中 a 的值；

（2）求小强的速度；

（3）求线段 AB 的函数解析式，并写出自变量的取值范围．



【答案】见解析。

【解析】对于（1），结合图象，全面、仔细分析运动对象和运动过程，（0,300）这个点的含义是：小明出发 5 分钟时，离学校 300 米，此时小强出发.由此可知小明离开学校后的速度.点 A（10，a）的含义是：小强出发 10 分钟后，小明离学校 a 米，此时小明运动的时间为 10+5=15 分钟，结合以上两个条件，可以求出 a 的值；对于（2），小强出发 12 分钟后与小明相遇，此时小明运动了 15+2=17 分钟，其中最后两分钟是折返后的行程，由此可计算出两人相遇地点与学校之间的距离，再根据小强运动到相遇地点所用的时间，即可计算出小强的速度；对于（3），先确定点 B 的坐标，再根据待定系数法即可求出线段 AB 的函数解析式.

【解题过程】（1）a=$\frac{300}{5}\times(10+5)$=900

（2）小明的速度为 300÷5=60（米/分）

小强的速度为（900-60×2）÷12=65（米/分）

（3）由题意得 B（12,780）

设 AB 所在直线的解析式为 y=kx+b(k≠0),

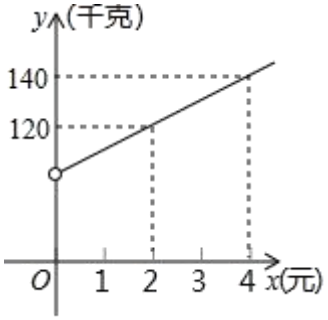
把 A（10,900），B（12,780）代入得：$\begin{cases}10k+b=900\\12k+b=780\end{cases}$，解得 $\begin{cases}k=-60\\b=1500\end{cases}$，

∴线段 AB 的解析式为 y=-60x+1500，(10≤x≤12)

20.（2019•贵州省安顺市）安顺市某商贸公司以每千克 40 元的价格购进一种干果，计划以每千克 60 元的价格销售，为了让顾客得到更大的实惠，现决定降价销售，已知这种干果销售量 y（千元）与每千元降价 x（元）（$0<x<20$）之间满足一次函数关系，其图象如图所示：

（1）求 y 与 x 之间的函数关系式；

（2）商贸公司要想获利 2090 元，则这种干果每千克应降价多少元？



【答案】见解析。

【解析】（1）设一次函数解析式为：$y=kx+b$

当 $x=2$，$y=120$；当 $x=4$，$y=140$；

$\therefore \begin{cases} 2k+b=120 \\ 4k+b=140 \end{cases}$，

解得：$\begin{cases} k=10 \\ b=100 \end{cases}$，

$\therefore y$ 与 x 之间的函数关系式为 $y=10x+100$；

（2）由题意得：

$（60-40-x）（10x+100）=2090$，

整理得：$x^2-10x+9=0$，

解得：$x_1=1$．$x_2=9$，

∵让顾客得到更大的实惠，

$\therefore x=9$，

答：商贸公司要想获利 2090 元，则这种干果每千克应降价 9 元．

21．（2019•衢州）定义：在平面直角坐标系中，对于任意两点 $A（a，b）$，$B（c，d）$，若点 $T（x，y）$ 满足 $x=\frac{a+c}{3}$，$y=\frac{b+d}{3}$那么称点 T 是点 A，B 的融合点．

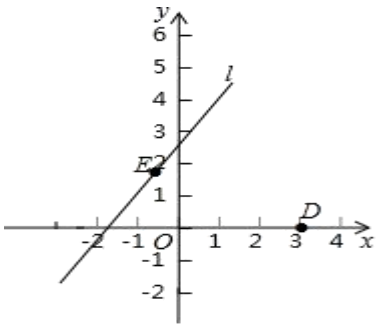
例如：$A（-1，8）$，$B（4，-2）$，当点 $T（x，y）$ 满足 $x=\frac{-1+4}{3}=1$，$y=\frac{8+(-2)}{3}=2$ 时，则点 $T（1，2）$ 是点 A，B 的融合点．

（1）已知点 $A（-1，5）$，$B（7，7）$，$C（2，4）$，请说明其中一个点是另外两个点的融合点．

（2）如图，点 $D（3，0）$，点 $E（t，2t+3）$ 是直线 l 上任意一点，点 $T（x，y）$ 是点 D，E 的融合点．

①试确定 y 与 x 的关系式．

②若直线 ET 交 x 轴于点 H．当△DTH 为直角三角形时，求点 E 的坐标．



【答案】见解析。

【解析】$x=\frac{1}{3}$（﹣1+7）=2，$y=\frac{1}{3}$（5+7）=4，即可求解；

①由题意得：$x=\frac{1}{3}$（t+3），$y=\frac{1}{3}$（2t+3），即可求解；②分∠DTH=90°、∠TDH=90°、∠HTD=90°三种情况，分别求解即可.

（1）$x=\frac{1}{3}$（﹣1+7）=2，$y=\frac{1}{3}$（5+7）=4，

故点 C 是点 A、B 的融合点；

（2）①由题意得：$x=\frac{1}{3}$（t+3），$y=\frac{1}{3}$（2t+3），

则 t=3x﹣3，

则 $y=\frac{1}{3}$（6x﹣6+3）=2x﹣1；

②当∠DHT=90°时，如图 1 所示，

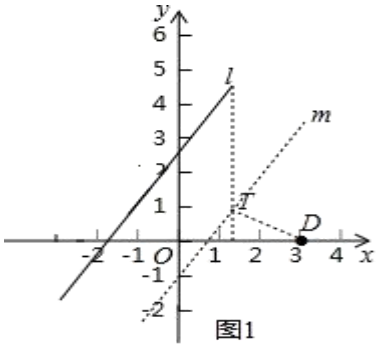


图1

设 T（m，2m﹣1），则点 E（m，2m+3），

由点 T 是点 D，E 的融合点得：$m=\frac{m+3}{3}=m$或$2m-1=\frac{2m+3+0}{3}$，

解得：$m=\frac{3}{2}$，即点 E（$\frac{3}{2}$，6）；

当∠TDH=90°时，如图 2 所示，

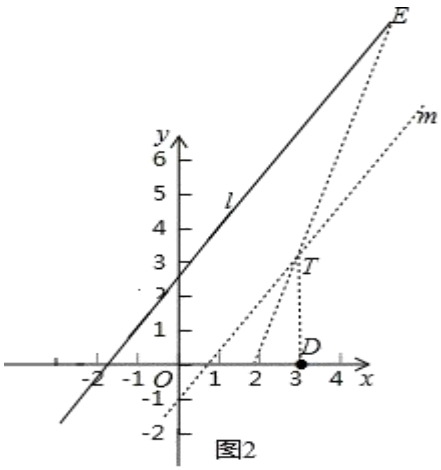


图2

则点 T（3，5），

由点 T 是点 D，E 的融合点得：点 E（6，15）；

当$\angle HTD=90°$时，该情况不存在；

故点 E（$\frac{3}{2}$，6）或（6，15）.