专题 16 全等三角形判定和性质问题

专题知识回顾

1．全等三角形：能够完全重合的两个图形叫做全等形。能够完全重合的两个三角形叫做全等三角形。

2．全等三角形的表示

全等用符号“≌”表示，读作“全等于”。如△ABC≌△DEF，读作“三角形 ABC 全等于三角形 DEF”。

注：记两个全等三角形时，通常把表示对应顶点的字母写在对应的位置上。

3．全等三角形的性质： 全等三角形的对应角相等、对应边相等。

4．三角形全等的判定定理：

（1）边角边定理：有两边和它们的夹角对应相等的两个三角形全等（可简写成“边角边”或“SAS”）

（2）角边角定理：有两角和它们的夹边对应相等的两个三角形全等（可简写成“角边角”或“ASA”）

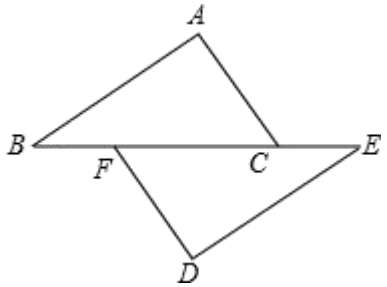
（3）边边边定理：有三边对应相等的两个三角形全等（可简写成“边边边”或“SSS”）。

5．直角三角形全等的判定：

HL 定理：有斜边和一条直角边对应相等的两个直角三角形全等（可简写成“斜边、直角边”或“HL”）

专题典型题考法及解析

【例题 1】（2019•贵州省安顺市）如图，点 B、F、C、E 在一条直线上，$AB \parallel ED$，$AC \parallel FD$，那么添加下列一个条件后，仍无法判定△ABC≌△DEF 的是（ ）



A．$\angle A=\angle D$ B．$AC=DF$ C．$AB=ED$ D．$BF=EC$

【解答】选项 A、添加$\angle A=\angle D$ 不能判定△ABC≌△DEF，故本选项正确；

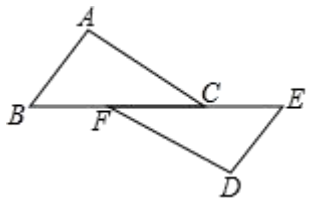
选项 B、添加 $AC=DF$ 可用 AAS 进行判定，故本选项错误；

选项 C、添加 $AB=DE$ 可用 AAS 进行判定，故本选项错误；

选项 D、添加 $BF=EC$ 可得出 $BC=EF$，然后可用 ASA 进行判定，故本选项错误.

故选：A.

【例题 2】（2019•黑龙江省齐齐哈尔市）如图，已知在△ABC 和△DEF 中，$\angle B=\angle E$，$BF=CE$，点 B、F、C、E 在同一条直线上，若使△ABC≌△DEF，则还需添加的一个条件是_____（只填一个即可）.



【答案】$AB=DE$.

【解析】添加 $AB=DE$；

∵$BF=CE$，

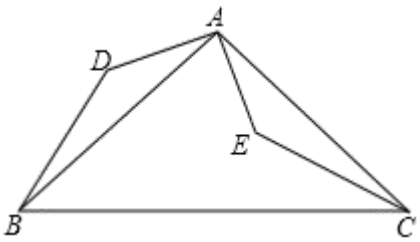
∴$BC=EF$，

在△ABC 和△DEF 中，$\begin{cases}AB=DE\\ \angle B=\angle E,\\ BC=EF\end{cases}$

∴△ABC≌△DEF（SAS）

【例题 3】（2019•铜仁）如图，$AB=AC$，$AB\perp AC$，$AD\perp AE$，且$\angle ABD=\angle ACE$.

求证：$BD=CE$.



【答案】见解析。

【解析】证明：∵$AB\perp AC$，$AD\perp AE$，

∴$\angle BAE+\angle CAE=90°$，$\angle BAE+\angle BAD=90°$，

∴$\angle CAE=\angle BAD$.

又 $AB=AC$，$\angle ABD=\angle ACE$，

∴△ABD≌△ACE（ASA）.

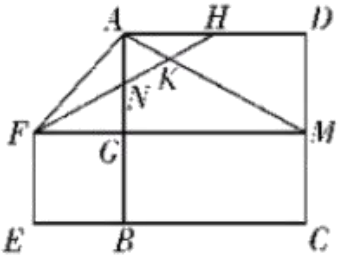
∴$BD=CE$.

专题典型训练题

一、选择题

1.(2019•广东）如图，正方形 $ABCD$ 的边长为 4，延长 CB 至 E 使 $EB=2$，以 EB 为边在上方作正方形 $EFGB$，延长 FG 交 DC 于 M，连接 AM、AF，H 为 AD 的中点，连接 FH 分别与 AB.AM 交于点 N、K．则下列结论：①$\triangle ANH\cong\triangle GNF$；②$\angle AFN=\angle HFG$；③$FN=2NK$；④$S_{\triangle AFN}:S_{\triangle ADM}=1:4$．其中正确的结论有（　　）

A．1 个　　B．2 个　　C．3 个　　D．4 个



【答案】C

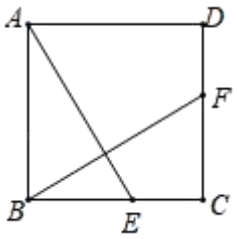
【解析】$AH=GF=2$，$\angle ANH=\angle GNF$，$\angle AHN=\angle GFN$，$\triangle ANH\cong\triangle GNF$（$AAS$），①正确；

由①得 $AN=GN=1$，$\because NG\perp FG$，NA 不垂直于 AF，$\therefore FN$ 不是 $\angle AFG$ 的角平分线

$\therefore\angle AFN\neq\angle HFG$，②错误；由$\triangle AKH\backsim\triangle MKF$，且 $AH:MF=1:3$，$\therefore KH:KF=1:3$，又$\because FN=HN$，

$\therefore K$ 为 NH 的中点，即 $FN=2NK$，③正确；$S_{\triangle AFN}=\frac{1}{2}AN\cdot FG=1$，$S_{\triangle ADM}=\frac{1}{2}DM\cdot AD=4$，$\therefore S_{\triangle AFN}:S_{\triangle ADM}=1:4$，④正确.

2.（2019•广西池河）如图，在正方形 $ABCD$ 中，点 E，F 分别在 BC，CD 上，$BE=CF$，则图中与 $\angle AEB$ 相等的角的个数是（　　）



A．1　　B．2　　C．3　　D．4

【答案】B.

【解析】根据正方形的性质，利用 SAS 即可证明$\triangle ABE\cong\triangle BCF$，再根据全等三角形的性质可得$\angle BFC=\angle$

AEB，进一步得到∠*BFC*＝∠*ABF*，从而求解．

证明：∵四边形 *ABCD* 是正方形，

∴*AB*∥*BC*，*AB*＝*BC*，∠*ABE*＝∠*BCF*＝90°，

在△*ABE* 和△*BCF* 中，

$$\begin{cases} AB=BC \\ \angle ABE=\angle BCF, \\ BE=CF \end{cases}$$

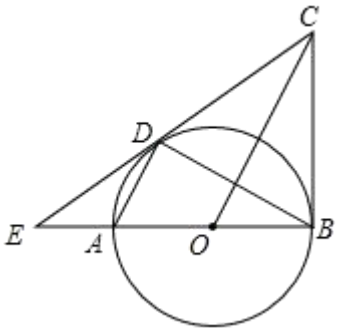
∴△*ABE*≌△*BCF*（*SAS*），

∴∠*BFC*＝∠*AEB*，

∴∠*BFC*＝∠*ABF*，

故图中与∠*AEB* 相等的角的个数是 2．

3.（2019•湖北天门）如图，*AB* 为⊙*O* 的直径，*BC* 为⊙*O* 的切线，弦 *AD*∥*OC*，直线 *CD* 交 *BA* 的延长线于点 *E*，连接 *B*D．下列结论：①*CD* 是⊙*O* 的切线；②*CO*⊥*DB*；③△*EDA*∽△*EBD*；④*ED*•*BC*＝*BO*•*BE*．其中正确结论的个数有（　　）



A．4 个　　B．3 个　　C．2 个　　D．1 个

【答案】A．

【解析】连结 *DO*．

∵*AB* 为⊙*O* 的直径，*BC* 为⊙*O* 的切线，

∴∠*CBO*＝90°，

∵*AD*∥*OC*，

∴∠*DAO*＝∠*COB*，∠*ADO*＝∠*COD*．

又∵*OA*＝*OD*，

∴∠*DAO*＝∠*ADO*，

∴∠*COD*＝∠*COB*．

在△COD 和△COB 中，$\begin{cases} CO=DO \\ \angle COD=\angle COB \\ OD=OB \end{cases}$，

∴△COD≌△COB（SAS），

∴∠CDO＝∠CBO＝90°．

又∵点 D 在⊙O 上，

∴CD 是⊙O 的切线；故①正确，

∵△COD≌△COB，

∴CD＝CB，

∵OD＝OB，

∴CO 垂直平分 DB，

即 CO⊥DB，故②正确；

∵AB 为⊙O 的直径，DC 为⊙O 的切线，

∴∠EDO＝∠ADB＝90°，

∴∠EDA+∠ADO＝∠BDO+∠ADO＝90°，

∴∠ADE＝∠BDO，

∵OD＝OB，

∴∠ODB＝∠OBD，

∴∠EDA＝∠DBE，

∵∠E＝∠E，

∴△EDA∽△EBD，故③正确；

∵∠EDO＝∠EBC＝90°，

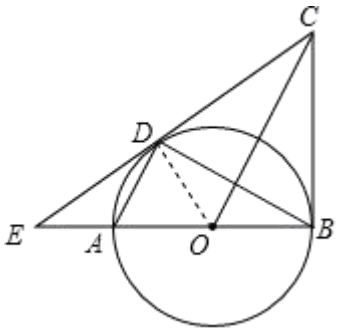
∠E＝∠E，

∴△EOD∽△ECB，

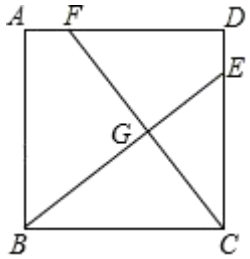
∴$\frac{ED}{BE}=\frac{OD}{BC}$，

∵OD＝OB，

∴ED•BC＝BO•BE，故④正确。



4.（2019•湖北孝感）如图，正方形 $ABCD$ 中，点 $E.F$ 分别在边 CD，AD 上，BE 与 CF 交于点 G．若 $BC=4$，$DE=AF=1$，则 GF 的长为（　　）



A．$\frac{13}{5}$　　B．$\frac{12}{5}$　　C．$\frac{19}{5}$　　D．$\frac{16}{5}$

【答案】A．

【解析】证明△BCE≌△CDF（SAS），得∠CBE=∠DCF，所以∠CGE=90°，根据等角的余弦可得 CG 的长，可得结论．

正方形 $ABCD$ 中，∵$BC=4$，

∴$BC=CD=AD=4$，∠BCE=∠CDF=90°，

∵$AF=DE=1$，

∴$DF=CE=3$，

∴$BE=CF=5$，

在△BCE 和△CDF 中，

$$\begin{cases} BC=CD \\ \angle BCE=\angle CDF, \\ CE=DF \end{cases}$$

∴△BCE≌△CDF（SAS），

∴∠CBE=∠DCF，

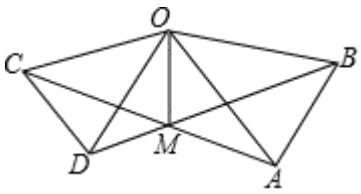
∵∠CBE+∠CEB=∠ECG+∠CEB=90°=∠CGE，

$cos\angle CBE=cos\angle ECG=\frac{BC}{BE}=\frac{CG}{CE}$，

∴$\frac{4}{5}=\frac{CG}{3}$，$CG=\frac{12}{5}$，

∴$GF=CF-CG=5-\frac{12}{5}=\frac{13}{5}$

5.（2019•山东省滨州市）如图，在△OAB和△OCD中，$OA=OB$，$OC=OD$，$OA>OC$，$\angle AOB=\angle COD=40°$，连接$AC$，$BD$交于点$M$，连接$OM$．下列结论：①$AC=BD$；②$\angle AMB=40°$；③$OM$平分$\angle BOC$；④$MO$平分$\angle BMC$．其中正确的个数为（　　）



A．4　　B．3　　C．2　　D．1

【答案】B.

【解析】由SAS证明△AOC≌△BOD得出$\angle OCA=\angle ODB$，$AC=BD$，①正确；

由全等三角形的性质得出$\angle OAC=\angle OBD$，由三角形的外角性质得：$\angle AMB+\angle OAC=\angle AOB+\angle OBD$，得出$\angle AMB=\angle AOB=40°$，②正确；

作$OG\perp MC$于G，$OH\perp MB$于H，如图所示：则$\angle OGC=\angle OHD=90°$，由$AAS$证明△$OCG$≌△$ODH$（$AAS$），得出$OG=OH$，由角平分线的判定方法得出$MO$平分$\angle BMC$，④正确；即可得出结论．

∵$\angle AOB=\angle COD=40°$，

∴$\angle AOB+\angle AOD=\angle COD+\angle AOD$，

即$\angle AOC=\angle BOD$，

在△AOC和△BOD中，$\begin{cases}OA=OB\\ \angle AOC=\angle BOD\\ OC=OD\end{cases}$，

∴△AOC≌△BOD（SAS），

∴$\angle OCA=\angle ODB$，$AC=BD$，①正确；

∴$\angle OAC=\angle OBD$，

由三角形的外角性质得：$\angle AMB+\angle OAC=\angle AOB+\angle OBD$，

∴$\angle AMB=\angle AOB=40°$，②正确；

作$OG\perp MC$于G，$OH\perp MB$于H，如图所示：

则$\angle OGC=\angle OHD=90°$，

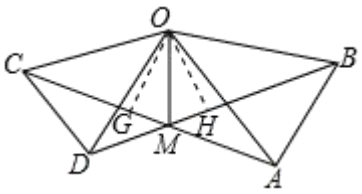
在△*OCG* 和△*ODH* 中，$\begin{cases}\angle OCA=\angle ODB\\ \angle OGC=\angle OHD\\ OC=OD\end{cases}$，

∴△*OCG*≌△*ODH*（*AAS*），

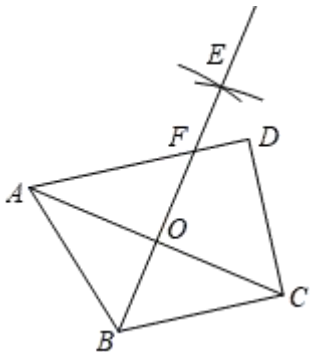
∴*OG*＝*OH*，

∴*MO* 平分∠*BMC*，④正确；

正确的个数有 3 个。



6.（2019•河南）如图，在四边形 *ABCD* 中，*AD*∥*BC*，∠*D*＝90°，*AD*＝4，*BC*＝3．分别以点 *A*，*C* 为圆心，大于$\frac{1}{2}$*AC* 长为半径作弧，两弧交于点 *E*，作射线 *BE* 交 *AD* 于点 *F*，交 *AC* 于点 *O*．若点 *O* 是 *AC* 的中点，则 *CD* 的长为（　　）



A．$2\sqrt{2}$　　B．4　　C．3　　D．$\sqrt{10}$

故选：*A*．

【解析】连接 *FC*，根据基本作图，可得 *OE* 垂直平分 *AC*，由垂直平分线的性质得出 *AF*＝*FC*．再根据 *ASA* 证明△*FOA*≌△*BOC*，那么 *AF*＝*BC*＝3，等量代换得到 *FC*＝*AF*＝3，利用线段的和差关系求出 *FD*＝*AD* - *AF*＝1．然后在直角△*FDC* 中利用勾股定理求出 *CD* 的长．

如图，连接 *FC*，则 *AF*＝*FC*．

∵*AD*∥*BC*，

∴∠*FAO*＝∠*BCO*．

在△*FOA* 与△*BOC* 中，

$$\begin{cases}\angle FAO=\angle BCO\\ OA=OC\\ \angle AOF=\angle COB\end{cases},$$

∴△*FOA*≌△*BOC*（*ASA*），

∴*AF*＝*BC*＝3，

∴*FC*＝*AF*＝3，*FD*＝*AD* - *AF*＝4 - 3＝1．

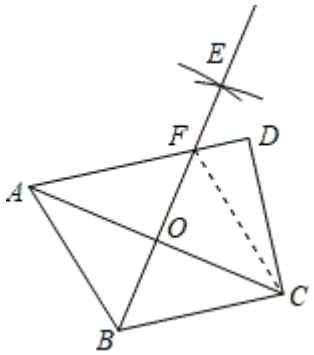
在△*FDC* 中，∵∠*D*＝90°，

∴$CD^2+DF^2=FC^2$，

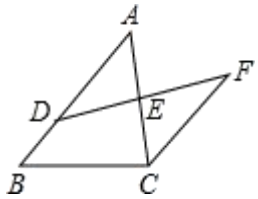
∴$CD^2+1^2=3^2$，

∴$CD=2\sqrt{2}$．

故选：*A*．



7．（2019•山东临沂）如图，*D* 是 *AB* 上一点，*DF* 交 *AC* 于点 *E*，*DE*＝*FE*，*FC*∥*AB*，若 *AB*＝4，*CF*＝3，则 *BD* 的长是（　　）



A．0.5　　B．1　　C．1.5　　D．2

【答案】B．

【解析】根据平行线的性质，得出∠*A*＝∠*FCE*，∠*ADE*＝∠*F*，根据全等三角形的判定，得出△*ADE*≌△*CFE*，根据全等三角形的性质，得出 *AD*＝*CF*，根据 *AB*＝4，*CF*＝3，即可求线段 *DB* 的长．

∵*CF*∥*AB*，

∴∠*A*＝∠*FCE*，∠*ADE*＝∠*F*，

在△*ADE* 和△*FCE* 中$\begin{cases}\angle A=\angle FCE\\ \angle ADE=\angle F,\\ DE=FE\end{cases}$

∴△*ADE*≌△*CFE*（*AAS*），

∴*AD*＝*CF*＝3，

∵*AB*＝4，

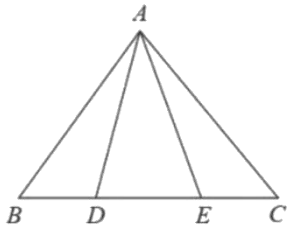
∴*DB*＝*AB* - *AD*＝4 - 3＝1．

二、填空题

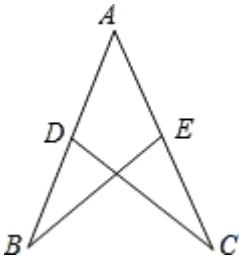
8.(2019 四川成都）如图，在△*ABC* 中，*AB*=*AC*，点 *D*，*E* 都在边 *BC* 上，∠*BAD*=∠*CAE*，若 *BD*=9，则 *CE* 的长为_____.

【答案】9

【解析】此题考察的是全等三角形的性质和判定，因为△*ABC* 是等腰三角形，所以有 *AB*=*AC*，∠*BAD*=∠*CAE*，∠*ABD*=∠*ACE*，所以△*ABD*≅△*ACE*(*ASA*)，所以 *BD*=二次，*EC*=9.



9.（2019•湖南邵阳）如图，已知 *AD*＝*AE*，请你添加一个条件，使得△*ADC*≌△*AEB*，你添加的条件是_____.（不添加任何字母和辅助线）



【答案】AB＝AC 或∠ADC＝∠A*EB* 或∠*ABE*＝∠*ACD*。

【解析】根据图形可知证明△*ADC*≌△*AEB* 已经具备了一个公共角和一对相等边，因此可以利用 *ASA*.*SAS*、*AAS* 证明两三角形全等.

∵∠*A*＝∠*A*，*AD*＝*AE*，

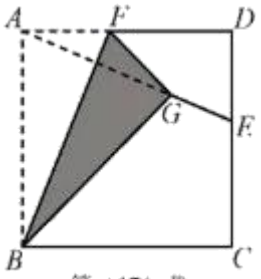
∴可以添加 *AB*＝*AC*，此时满足 *SAS*；

添加条件∠*ADC*＝∠*AEB*，此时满足 *ASA*；

添加条件∠*ABE*＝∠*ACD*，此时满足 *AAS*，

故答案为 *AB*＝*AC* 或∠*ADC*＝∠*AEB* 或∠*ABE*＝∠*ACD*。

10.（2019•天津）如图，正方形纸片 ABCD 的边长为 12，E 是边 CD 上一点，连接 AE，折叠该纸片，使点 A 落在 AE 上的 G 点，并使折痕经过点 B，得到折痕 BF，点 F 在 AD 上，若 DE=5，则 GE 的长为_____.



第（17）题

【答案】$\frac{49}{13}$

【解析】因为四边形*ABCD*是正方形，易得△*AFB*≌△*DEA*，∴*AF*=*DE*=5，则*BF*=13.

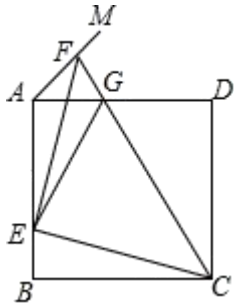
又易知△*AFH*∽△*BFA*，所以$\frac{AH}{BA}=\frac{AF}{BF}$，即*AH*=$\frac{60}{13}$，∴*AH*=2*AH*=$\frac{120}{13}$，∴由勾股定理得*AE*=13，

∴*GE*=*AE*-*AG*=$\frac{49}{13}$

11.（2019•广东省广州市）如图，正方形 *ABCD* 的边长为 *a*，点 *E* 在边 *AB* 上运动（不与点 *A*，*B* 重合），∠*DAM*＝45°，点 *F* 在射线 *AM* 上，且 *AF*＝$\sqrt{2}$*BE*，*CF* 与 *AD* 相交于点 *G*，连接 *EC*，*EF*，*EG*，则下列结论：

①∠*ECF*＝45°；②△*AEG* 的周长为（1+$\frac{\sqrt{2}}{2}$）*a*；③$BE^2+DG^2=EG^2$；④△*EAF* 的面积的最大值$\frac{1}{8}a^2$.

其中正确的结论是_____.（填写所有正确结论的序号）



故答案为①④.

【解析】如图 1 中，在 *BC* 上截取 *BH*＝*BE*，连接 *EH*.

∵*BE*＝*BH*，∠*EBH*＝90°，

∴$EH=\sqrt{2}BE$，∵$AF=\sqrt{2}BE$，∴$AF=EH$，

∵$\angle DAM=\angle EHB=45°$，$\angle BAD=90°$，

∴$\angle FAE=\angle EHC=135°$，

∵$BA=BC$，$BE=BH$，∴$AE=HC$，

∴$\triangle FAE\cong\triangle EHC$（$SAS$），

∴$EF=EC$，$\angle AEF=\angle ECH$，

∵$\angle ECH+\angle CEB=90°$，

∴$\angle AEF+\angle CEB=90°$，∴$\angle FEC=90°$，

∴$\angle ECF=\angle EFC=45°$，故①正确，

如图 2 中，延长 AD 到 H，使得 $DH=BE$，则$\triangle CBE\cong\triangle CDH$（$SAS$），

∴$\angle ECB=\angle DCH$，∴$\angle ECH=\angle BCD=90°$，∴$\angle ECG=\angle GCH=45°$，

∵$CG=CG$，$CE=CH$，

∴$\triangle GCE\cong\triangle GCH$（$SAS$），∴$EG=GH$，

∵$GH=DG+DH$，$DH=BE$，

∴$EG=BE+DG$，故③错误，

∴$\triangle AEG$ 的周长$=AE+EG+AG=AG+GH=AD+DH+AE=AE+EB+AD=AB+AD=2a$，故②错误，

设 $BE=x$，则 $AE=a-x$，$AF=\sqrt{2}x$，

∴$S_{\triangle AEF}=\frac{1}{2}\cdot(a-x)\times x=-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}ax=-\frac{1}{2}(x^2-ax+\frac{1}{4}a^2-\frac{1}{4}a^2)=-\frac{1}{2}(x-\frac{1}{2}a)^2+\frac{1}{8}a^2$，

∵$-\frac{1}{2}<0$，

∴$x=\frac{1}{2}a$ 时，$\triangle AEF$ 的面积的最大值为$\frac{1}{8}a^2$．故④正确，

故答案为①④．

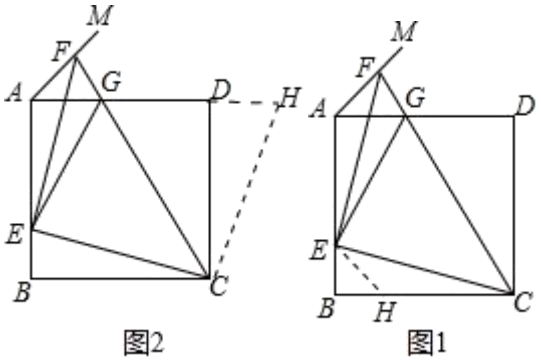
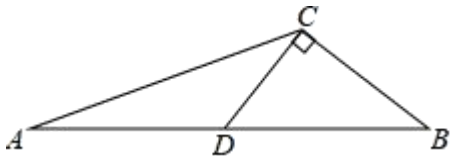


图2

图1

12．（2019•山东临沂）如图，在$\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=120°$，$BC=4$，D 为 AB 的中点，$DC\perp BC$，则$\triangle ABC$

的面积是____.



【答案】$8\sqrt{3}$.

【解析】根据垂直的定义得到$\angle BCD=90°$，得到长 CD 到 H 使 $DH=CD$，由线段中点的定义得到 $AD=BD$，根据全等三角形的性质得到 $AH=BC=4$，$\angle H=\angle BCD=90°$，求得 $CD=2\sqrt{3}$，于是得到结论.

$\because DC\perp BC$，

$\therefore \angle BCD=90°$，

$\because \angle ACB=120°$，$\therefore \angle ACD=30°$，

延长 CD 到 H 使 $DH=CD$，

$\because D$ 为 AB 的中点，

$\therefore AD=BD$，

在$\triangle ADH$ 与$\triangle BCD$ 中，$\begin{cases}CD=DH\\ \angle ADH=\angle BDC\\ AD=BD\end{cases}$

$\therefore \triangle ADH\cong\triangle BCD$（$SAS$），

$\therefore AH=BC=4$，$\angle H=\angle BCD=90°$，

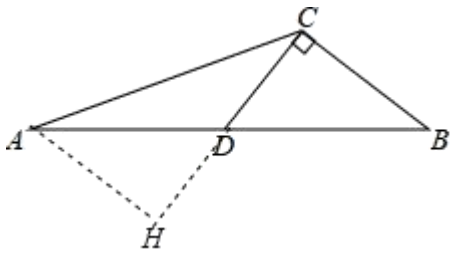
$\because \angle ACH=30°$，

$\therefore CH=\sqrt{3}AH=4\sqrt{3}$，

$\therefore CD=2\sqrt{3}$，

$\therefore \triangle ABC$ 的面积$=2S_{\triangle BCD}=2\times\frac{1}{2}\times4\times2\sqrt{3}=8\sqrt{3}$，

故答案为：$8\sqrt{3}$.

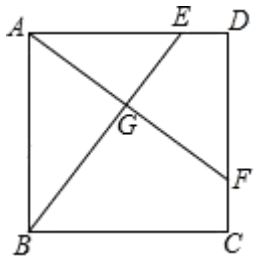


三、解答题

13.（2019•湖南长沙）如图，正方形 $ABCD$，点 E，F 分别在 AD，CD 上，且 $DE=CF$，AF 与 BE 相交于点 G.

（1）求证：$BE=AF$；

（2）若 $AB=4$，$DE=1$，求 AG 的长．



【答案】见解析。

【解析】本题考查了全等三角形的判定与性质、正方形的性质、勾股定理以及三角形面积公式；熟练掌握正方形的性质，证明三角形全等是解题的关键．

（1）证明：∵四边形 $ABCD$ 是正方形，

∴$\angle BAE=\angle ADF=90°$，$AB=AD=CD$，

∵$DE=CF$，

∴$AE=DF$，

在△BAE 和△ADF 中，$\begin{cases}AB=AD\\ \angle BAE=\angle ADF\\ AE=DF\end{cases}$，

∴△BAE≌△ADF（SAS），

∴$BE=AF$；

（2）解：由（1）得：△BAE≌△ADF，

∴$\angle EBA=\angle FAD$，

∴$\angle GAE+\angle AEG=90°$，

∴$\angle AGE=90°$，

∵$AB=4$，$DE=1$，

∴$AE=3$，

∴$BE=\sqrt{AB^2+AE^2}=\sqrt{4^2+3^2}=5$，

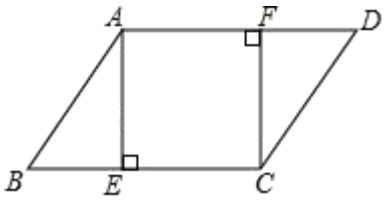
在 Rt△ABE 中，$\frac{1}{2}AB\times AE=\frac{1}{2}BE\times AG$，

∴$AG=\frac{4\times 3}{5}=\frac{12}{5}$．

14.（2019•湖南怀化）已知：如图，在▱$ABCD$ 中，$AE\perp BC$，$CF\perp AD$，E，F 分别为垂足．

（1）求证：△*ABE*≌△*CDF*；

（2）求证：四边形 *AECF* 是矩形.



【答案】见解析。

【解析】（1）证明：∵四边形 *ABCD* 是平行四边形，

∴∠*B*＝∠*D*，*AB*＝*CD*，*AD*∥*BC*，

∵*AE*⊥*BC*，*CF*⊥*AD*，

∴∠*AEB*＝∠*AEC*＝∠*CFD*＝∠*AFC*＝90°，

在△*ABE* 和△*CDF* 中，$\begin{cases}\angle B=\angle D\\ \angle AEB=\angle CFD\\ AB=CD\end{cases}$，

∴△*ABE*≌△*CDF*（*AAS*）；

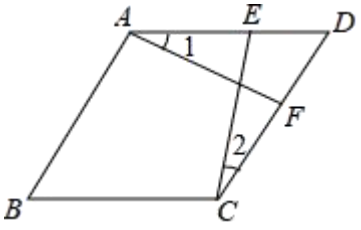
（2）证明：∵*AD*∥*BC*，

∴∠*EAF*＝∠*AEB*＝90°，

∴∠*EAF*＝∠*AEC*＝∠*AFC*＝90°，

∴四边形 *AECF* 是矩形.

15.（2019•湖南岳阳）如图所示，在菱形 *ABCD* 中，点 *E*.*F* 分别为 *A*D.*CD* 边上的点，*DE*＝*DF*，求证：∠1＝∠2.



【答案】见解析。

【解析】由菱形的性质得出 *AD*＝*CD*，由 *SAS* 证明△*ADF*≌△*CDE*，即可得出结论.

证明：∵四边形 *ABCD* 是菱形，

∴*AD*＝*CD*，

在△*ADF* 和△*CDE* 中，$\begin{cases}AD=CD\\ \angle D=\angle D\\ DF=DE\end{cases}$，

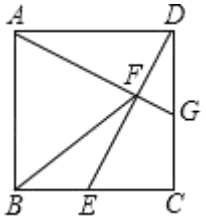
∴△*ADF*≌△*CDE*（*SAS*），

∴∠1＝∠2.

16.（2019•甘肃）如图，在正方形 *ABCD* 中，点 *E* 是 *BC* 的中点，连接 *DE*，过点 *A* 作 *AG*⊥*ED* 交 *DE* 于点 *F*，交 *CD* 于点 *G*.

（1）证明：△*ADG*≌△*DCE*；

（2）连接 *BF*，证明：*AB*＝*F*B.



【解析】本题主要考查了正方形的性质以及全等三角形的判定与性质，在应用全等三角形的判定时，要注意三角形间的公共边和公共角，必要时添加适当辅助线构造三角形.

（1）∵四边形 *ABCD* 是正方形，

∴∠*ADG*＝∠*C*＝90°，*AD*＝*DC*，

又∵*AG*⊥*DE*，

∴∠*DAG*+∠*ADF*＝90°＝∠*CDE*+∠*ADF*，

∴∠*DAG*＝∠*CDE*，

∴△*ADG*≌△*DCE*（*ASA*）；

（2）如图所示，延长 *DE* 交 *AB* 的延长线于 *H*，

∵*E* 是 *BC* 的中点，

∴*BE*＝*CE*，

又∵∠*C*＝∠*HBE*＝90°，∠*DEC*＝∠*HEB*，

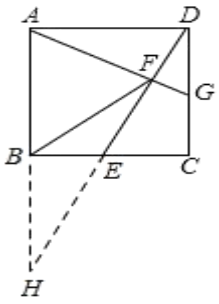
∴△*DCE*≌△*HBE*（*ASA*），

∴*BH*＝*DC*＝*AB*，

即 *B* 是 *AH* 的中点，

又∵∠*AFH*＝90°，

∴*Rt*△*AFH* 中，$BF=\frac{1}{2}AH=A$B.



17.（2019 山东枣庄）在△*ABC* 中，∠*BAC*＝90°，*AB*＝*AC*，*AD*⊥*BC* 于点 D.

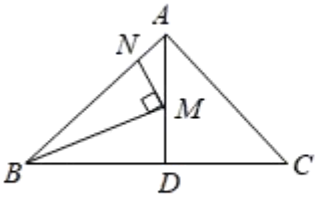


图 1

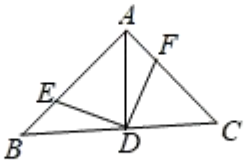


图 2

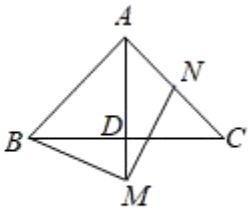


图 3

（1）如图 1，点 *M*，*N* 分别在 *AD*，*AB* 上，且∠*BMN*＝90°，当∠*AMN*＝30°，*AB*＝2 时，求线段 *AM* 的长；

（2）如图 2，点 *E*，*F* 分别在 *AB*，*AC* 上，且∠*EDF*＝90°，求证：*BE*＝*AF*；

（3）如图 3，点 *M* 在 *AD* 的延长线上，点 *N* 在 *AC* 上，且∠*BMN*＝90°，求证：$AB+AN=\sqrt{2}AM$.

【答案】见解析。

【解析】（1）根据等腰三角形的性质、直角三角形的性质得到 $AD=BD=DC=\sqrt{2}$，求出∠*MBD*＝30°，根据勾股定理计算即可；

∵∠*BAC*＝90°，*AB*＝*AC*，*AD*⊥*BC*，

∴*AD*＝*BD*＝*DC*，∠*ABC*＝∠*ACB*＝45°，∠*BAD*＝∠*CAD*＝45°，

∵*AB*＝2，

∴$AD=BD=DC=\sqrt{2}$，

∵∠*AMN*＝30°，

∴∠*BMD*＝180°﹣90°﹣30°＝60°，

∴∠*MBD*＝30°，

∴*BM*＝2*DM*，

由勾股定理得，$BM^2-DM^2=BD^2$，即$（2DM）^2-DM^2=（\sqrt{2}）^2$，

解得，$DM=\frac{\sqrt{6}}{3}$，

∴$AM=AD-DM=\sqrt{2}-\frac{\sqrt{6}}{3}$；

（2）证明：∵$AD\perp BC$，$\angle EDF=90°$，

∴$\angle BDE=\angle ADF$，

在△BDE和△ADF中，

$$\begin{cases}\angle B=\angle DAF\\ DB=DA\\ \angle BDE=\angle ADF\end{cases}$$，

∴△BDE≌△ADF（ASA）

∴$BE=AF$；

（3）证明：过点M作$ME\parallel BC$交AB的延长线于E，

∴$\angle AME=90°$，

则$AE=\sqrt{2}AM$，$\angle E=45°$，

∴$ME=MA$，

∵$\angle AME=90°$，$\angle BMN=90°$，

∴$\angle BME=\angle AMN$，

在△BME和△AMN中，

$$\begin{cases}\angle E=\angle MAN\\ ME=MA\\ \angle BME=\angle AMN\end{cases}$$，

∴△BME≌△AMN（ASA），

∴$BE=AN$，

∴$AB+AN=AB+BE=AE=\sqrt{2}AM$.

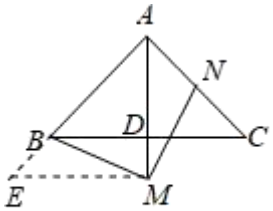


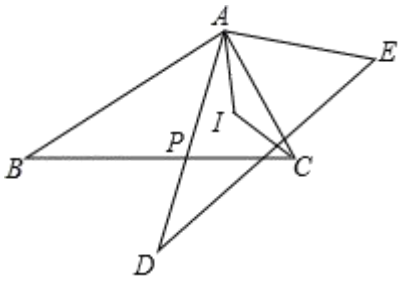
图 3

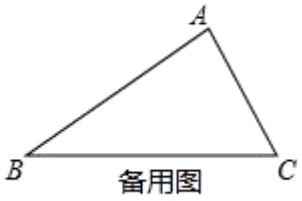
18.（2019•河北）如图，△ABC和△ADE中，$AB=AD=6$，$BC=DE$，$\angle B=\angle D=30°$，边AD与边BC交于点P（不与点B，C重合），点B，E在AD异侧，I为△APC的内心.

（1）求证：$\angle BAD=\angle CAE$；

（2）设$AP=x$，请用含x的式子表示PD，并求PD的最大值；

（3）当 $AB\perp AC$ 时，$\angle AIC$ 的取值范围为 $m°<\angle AIC<n°$，分别直接写出 m，n 的值.





备用图

【答案】见解析。

【解析】（1）在△ABC 和△ADE 中，（如图 1）

$$\begin{cases}AB=AD\\ \angle B=\angle D\\ BC=DE\end{cases}$$

∴△ABC≌△ADE（SAS）

∴$\angle BAC=\angle DAE$

即$\angle BAD+\angle DAC=\angle DAC+\angle CAE$

∴$\angle BAD=\angle CAE$.

（2）∵$AD=6$，$AP=x$，

∴$PD=6-x$

当 $AD\perp BC$ 时，$AP=\frac{1}{2}AB=3$ 最小，即 $PD=6-3=3$ 为 PD 的最大值.

（3）如图 2，设$\angle BAP=\alpha$，则$\angle APC=\alpha+30°$，

∵$AB\perp AC$

∴$\angle BAC=90°$，$\angle PCA=60°$，$\angle PAC=90°-\alpha$，

∵I 为△APC 的内心

∴AI、CI 分别平分$\angle PAC$，$\angle PCA$，

∴$\angle IAC=\frac{1}{2}\angle PAC$，$\angle ICA=\frac{1}{2}\angle PCA$

∴$\angle AIC=180°-(\angle IAC+\angle ICA)$

$=180°-\frac{1}{2}(\angle PAC+\angle PCA)$

$=180°-\frac{1}{2}(90°-\alpha+60°)=\frac{1}{2}\alpha+105°$

∵$0<\alpha<90°$，

∴$105°<\frac{1}{2}\alpha+105°<150°$，即 $105°<\angle AIC<150°$，

∴m＝105，n＝150.

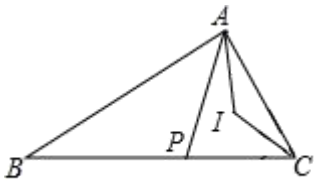


图2

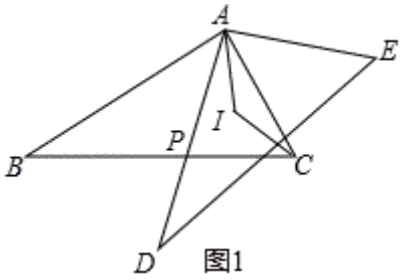
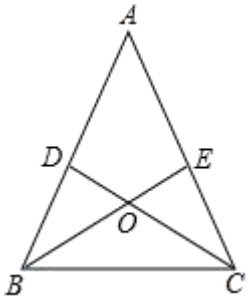


图1

19.（2019•江苏无锡）如图，在△ABC中，AB＝AC，点D、E分别在AB、AC上，BD＝CE，BE、CD相交于点O.

（1）求证：△DBC≌△ECB；

（2）求证：OB＝OC.



【答案】见解析。

【解析】（1）根据等腰三角形的性质得到∠ECB＝∠DBC根据全等三角形的判定定理即可得到结论；

证明：∵AB＝AC，

∴∠ECB＝∠DBC，

在△DBC与△ECB中$\begin{cases} BD=CE \\ \angle DBC=\angle ECB, \\ BC=CB \end{cases}$

∴△DBC≌△ECB（SAS）；

（2）根据全等三角形的性质得到∠DCB＝∠EBC根据等腰三角形的判定定理即可得到OB＝OC

证明：由（1）知△DBC≌△ECB，

∴∠DCB＝∠EBC，

∴OB＝OC.