专题 18 解直角三角形问题

专题知识回顾

一、勾股定理

1．勾股定理：如果直角三角形的两直角边长分别为 a，b，斜边长为 c，那么 $a^2+b^2=c^2$。

2．勾股定理逆定理：如果三角形三边长 a,b,c 满足 $a^2+b^2=c^2$。，那么这个三角形是直角三角形。

3.定理：经过证明被确认正确的命题叫做定理。

4.我们把题设、结论正好相反的两个命题叫做互逆命题。如果把其中一个叫做原命题，那么另一个叫做它的逆命题。（例：勾股定理与勾股定理逆定理）

5. 直角三角形的性质：

(1)直角三角形的两锐角互余；

(2)直角三角形的两条直角边的平方和等于斜边的平方；

(3)直角三角形中 30° 角所对直角边等于斜边的一半；

(4)直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半。

6.直角三角形的判定：

(1)有一个角等于 90° 的三角形是直角三角形

(2) 两锐角互余的三角形是直角三角形

(3)两条边的平方和等于另一边的平方的三角形是直角三角形

(4)有一边上的中线等于这边的一半的三角形是直角三角形

二、锐角三角函数

1.各种锐角三角函数的定义

（1）正弦：在△ABC 中，∠C=90° 把锐角 A 的对边与斜边的比值叫做∠A 的正弦，记作 $\sin A=\dfrac{\angle A\text{的对边}}{\text{斜边}}$

（2）余弦：在△ABC 中，∠C=90° ，把锐角 A 的邻边与斜边比值的叫做∠A 的余弦，记作 $\cos A=\dfrac{\angle A\text{的邻边}}{\text{斜边}}$

（3）正切：在△ABC 中，∠C=90° ，把锐角 A 的对边与邻边的比值叫做∠A 的正切，记作 $\tan A=\dfrac{\angle A\text{的对边}}{\angle A\text{的邻边}}$

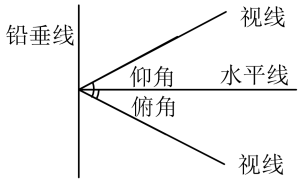
2. 特殊值的三角函数：

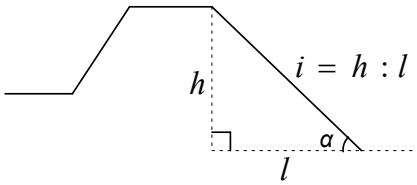
α	sinα	cosα	tanα	cotα
0°	0	1	0	不存在
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
90°	1	0	不存在	0

三、仰角、俯角、坡度概念

1．**仰角**：视线在水平线上方的角；

2．**俯角**：视线在水平线下方的角。





3．**坡度(坡比)**：坡面的铅直高度h和水平宽度l的比叫做坡度(坡比)。用字母i表示，即$i=\frac{h}{l}$。把坡面与水平面的夹角记作α(叫做坡角)，那么$i=\frac{h}{l}=\tan\alpha$。

四、各锐角三角函数之间的关系

（1）互余关系

sinA=cos(90°—A)，cosA=sin(90°—A)

tanA=cot(90°—A)，cotA=tan(90°—A)

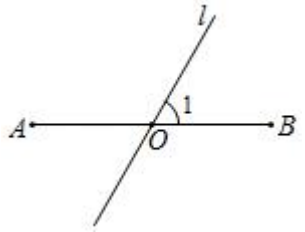
（2）平方关系　$\sin^2 A+\cos^2 A=1$

（3）倒数关系　tanA●tan(90°—A)=1

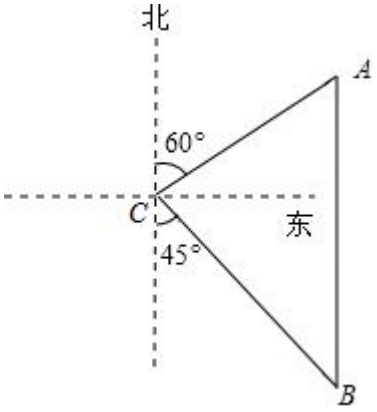
（4）弦切关系　tanA=$\frac{\sin A}{\cos A}$

专题典型题考法及解析

【例题 1】（2019•湖北省鄂州市）如图，已知线段 $AB=4$，O 是 AB 的中点，直线 l 经过点 O，$\angle 1=60°$，P 点是直线 l 上一点，当△APB 为直角三角形时，则 $BP=$_____.



【例题 2】（2019•湖南长沙）如图，一艘轮船从位于灯塔 C 的北偏东 60° 方向，距离灯塔 60$nmile$ 的小岛 A 出发，沿正南方向航行一段时间后，到达位于灯塔 C 的南偏东 45° 方向上的 B 处，这时轮船 B 与小岛 A 的距离是（　　）



A．$30\sqrt{3}nmile$　　B．$60nmile$

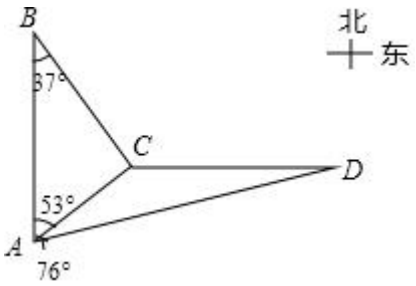
C．$120nmile$　　D．（$30+30\sqrt{3}$）$nmile$

【例题 3】（2019•江苏连云港）如图，海上观察哨所 B 位于观察哨所 A 正北方向，距离为 25 海里．在某时刻，哨所 A 与哨所 B 同时发现一走私船，其位置 C 位于哨所 A 北偏东 53° 的方向上，位于哨所 B 南偏东 37° 的方向上．

（1）求观察哨所 A 与走私船所在的位置 C 的距离；

（2）若观察哨所 A 发现走私船从 C 处以 16 海里/小时的速度向正东方向逃窜，并立即派缉私艇沿北偏东 76° 的方向前去拦截，求缉私艇的速度为多少时，恰好在 D 处成功拦截．（结果保留根号）

（参考数据：$sin37°=cos53°\approx\frac{3}{5}$，$cos37°=sin53°\approx\frac{4}{5}$，$tan37°\approx\frac{3}{4}$，$tan76°\approx4$）



专题典型训练题

一、选择题

1.（2019•渝北区）如果下列各组数是三角形的三边，则能组成直角三角形的是（　　）

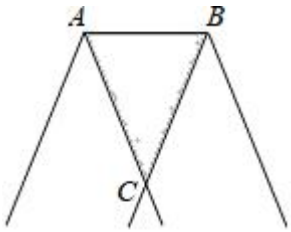
A．1，$\sqrt{3}$，2　　B．1，3，4　　C．2，3，6　　D．4，5，6

2.（2019•巴南区）下列各组数据中，能够成为直角三角形三条边长的一组数据是（　　）

A．$\frac{1}{3}$，$\frac{1}{4}$，$\frac{1}{5}$　　B．3^2，4^2，5^2

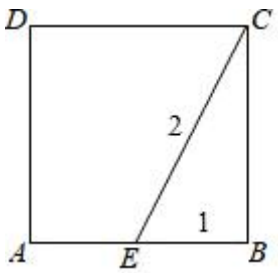
C．$\sqrt{3}$，$\sqrt{4}$，$\sqrt{5}$　　D．0.3，0.4，0.5

3.（2019 广西省贵港市）将一条宽度为$2cm$的彩带按如图所示的方法折叠，折痕为AB，重叠部分为ΔABC（图中阴影部分），若$\angle ACB=45°$，则重叠部分的面积为(　　)



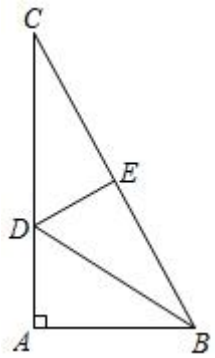
A．$2\sqrt{2}cm^2$　B．$2\sqrt{3}cm^2$　C．$4cm^2$ D．$4\sqrt{2}cm^2$

4.（2019 贵州省毕节市） 如图，点E在正方形$ABCD$的边AB上，若EB=1，EC=2，那么正方形$ABCD$的面积为（　　）



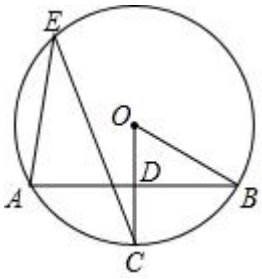
A．$\sqrt{3}$　　B．3　　C．$\sqrt{5}$　　D．5

5.（2019•南岸区）如图，在Rt△*ABC*中，∠*A*＝90°，∠*C*＝30°，*BC*的垂直平分线交*AC*于点*D*，并交*BC*于点*E*，若*ED*＝3，则*AC*的长为（　　）



A．$3\sqrt{3}$　　B．3　　C．6　　D．9

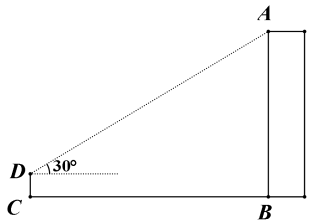
6.（2019•西藏）如图，在⊙*O*中，半径*OC*垂直弦*AB*于*D*，点*E*在⊙*O*上，∠*E*＝22.5°，*AB*＝2，则半径*OB*等于（　　）



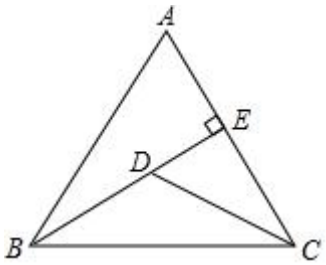
A．1　　B．$\sqrt{2}$　　C．2　　D．$2\sqrt{2}$

7.（2019•江苏苏州）如图，小亮为了测量校园里教学楼*AB*的高度，将测角仪*CD*竖直放置在与教学楼水平距离为$18\sqrt{3}$ m的地面上，若测角仪的高度为1.5 m，测得教学楼的顶部*A*处的仰角为30°，则教学楼的高度是（　　）

A．55.5 m　　B．54 m　　C．19.5 m　　D．18 m



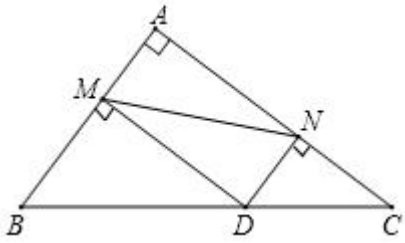
8.（2019•湖南长沙）如图，△*ABC*中，*AB*＝*AC*＝10，*tanA*＝2，*BE*⊥*AC*于点*E*，*D*是线段*BE*上的一个动点，则$CD+\frac{\sqrt{5}}{5}BD$的最小值是（　　）



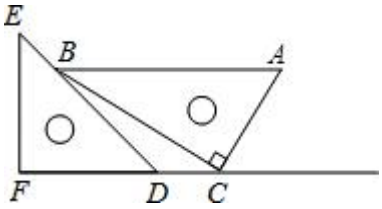
A．$2\sqrt{5}$　　B．$4\sqrt{5}$　　C．$5\sqrt{3}$　　D．10

二、填空题

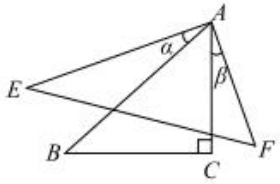
9.（2019·贵州安顺）如图，在 $Rt\triangle ABC$ 中，$\angle BAC=90°$，且 $BA=3$，$AC=4$，点 D 是斜边 BC 上的一个动点，过点 D 分别作 $DM\perp AB$ 于点 M，$DN\perp AC$ 于点 N，连接 MN，则线段 MN 的最小值为_____.



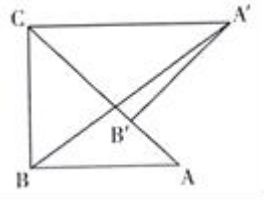
10.（2019 贵州省毕节市） 三角板是我们学习数学的好帮手．将一对直角三角板如图放置，点 C 在 FD 的延长线上，点 B 在 ED 上，$AB\parallel CF$，$\angle F=\angle ACB=90°$，$\angle E=45°$，$\angle A=60°$，$AC=10$，则 CD 的长度是_____.



11.（2019 海南）如图，将 Rt△ABC 的斜边 AB 绕点 A 顺时针旋转 α（$0°<\alpha<90°$）得到 AE，直角边 AC 绕点 A 逆时针旋转 β（$0°<\beta<90°$）得到 AF，连接 EF，若 AB＝3，AC＝2，且 $\alpha+\beta=\angle B$，则 EF＝_____.

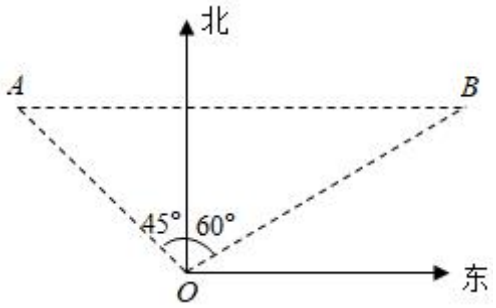


12.（2019 黑龙江哈尔滨）如图将△ABC 绕点 C 逆时针旋转得到△A′ B′ C，其中点 A′ 与 A 是对应点，点 B′ 与 B 是对应点，点 B′ 落在边 AC 上，连接 A′ B，若∠ACB=45°，AC=3，BC=2，则 A′ B 的长为_____.

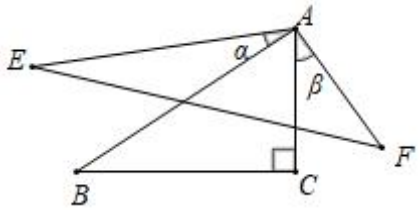


13.（2019 山东东营）已知等腰三角形的底角是 30°，腰长为 $2\sqrt{3}$，则它的周长是_____.

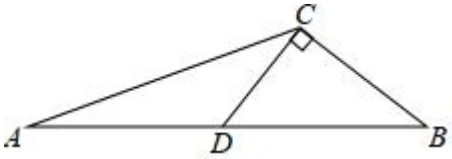
14.（2019•浙江宁波）如图，某海防哨所 O 发现在它的西北方向，距离哨所 400 米的 A 处有一艘船向正东方向航行，航行一段时间后到达哨所北偏东 60° 方向的 B 处，则此时这艘船与哨所的距离 OB 约为_____米.（精确到 1 米，参考数据：$\sqrt{2}\approx1.414$，$\sqrt{3}\approx1.732$）



15.（2019•海南省）如图，将 $Rt\triangle ABC$ 的斜边 AB 绕点 A 顺时针旋转 α（$0^{\circ}<\alpha<90^{\circ}$）得到 AE，直角边 AC 绕点 A 逆时针旋转 β（$0^{\circ}<\beta<90^{\circ}$）得到 AF，连结 EF. 若 $AB=3$，$AC=2$，且 $\alpha+\beta=\angle B$，则 $EF=$_____.



16.（2019•山东临沂）如图，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=120^{\circ}$，$BC=4$，D 为 AB 的中点，$DC\perp BC$，则 $\triangle ABC$ 的面积是_____.



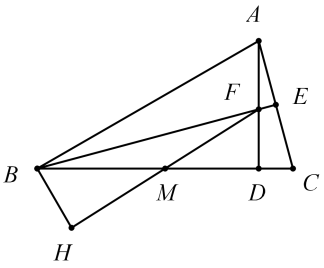
三、解答题

17.（2019 黑龙江省龙东地区）如图，在 $\triangle ABC$ 中，$AB=BC$，$AD\perp BC$ 于点 D，$BE\perp AC$ 于点 E，AD 与 BE 交于点 F，$BH\perp AB$ 于点 B，点 M 是 BC 的中点，连接 FM 并延长交 BH 于点 H.

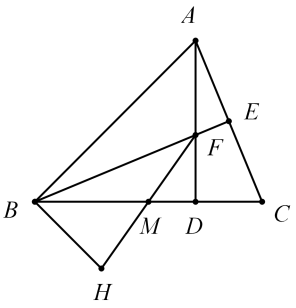
（1）如图①所示，若 $\angle ABC=30^{\circ}$，求证：$DF+BH=\frac{\sqrt{3}}{3}BD$；

（2）如图②所示，若 $\angle ABC=45^{\circ}$，如图③所示，若 $\angle ABC=60^{\circ}$（点 M 与点 D 重合），猜想线段 DF，BH，

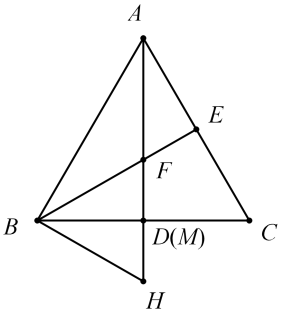
BD之间又有怎样的数量关系？请直接写出你的猜想，不需证明.



图①

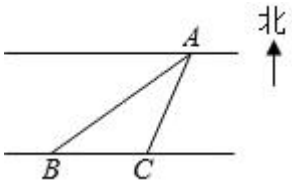


图②

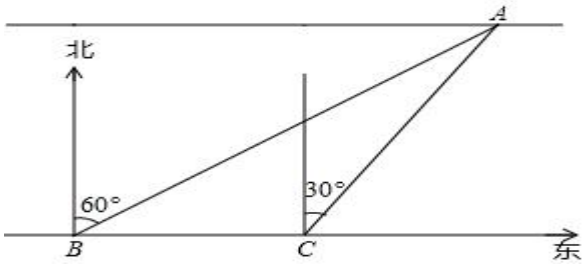


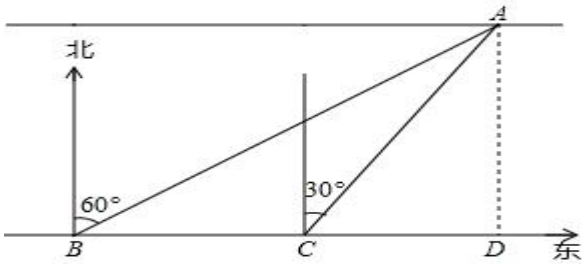
图③

18.（2019•广西池河）如图，在河对岸有一棵大树 A，在河岸 B 点测得 A 在北偏东 60°方向上，向东前进 120m 到达 C 点，测得 A 在北偏东 30°方向上，求河的宽度（精确到 0.1m）. 参考数据：$\sqrt{2}\approx1.414$，$\sqrt{3}\approx1.732$.



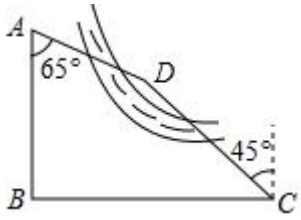
19. （2019•湖南怀化）如图，为测量一段笔直自西向东的河流的河面宽度，小明在南岸 B 处测得对岸 A 处一棵柳树位于北偏东 60°方向，他以每秒 1.5 米的速度沿着河岸向东步行 40 秒后到达 C 处，此时测得柳树位于北偏东 30°方向，试计算此段河面的宽度.





20.（2019 四川巴中）某区域平面示意图如图所示，点 D 在河的右侧，红军路 AB 与某桥 BC 互相垂直. 某校“数学兴趣小组”在“研学旅行”活动中，在 C 处测得点 D 位于西北方向，又在 A 处测得点 D 位于南偏东 65°方向，另测得 BC=414m，AB=300m，求出点 D 到 AB 的距离.（参考数据 $sin65°\approx0.91$，$cos65°\approx0.42$，

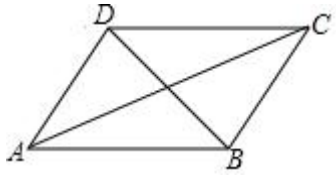
$tan65°\approx2.14$）



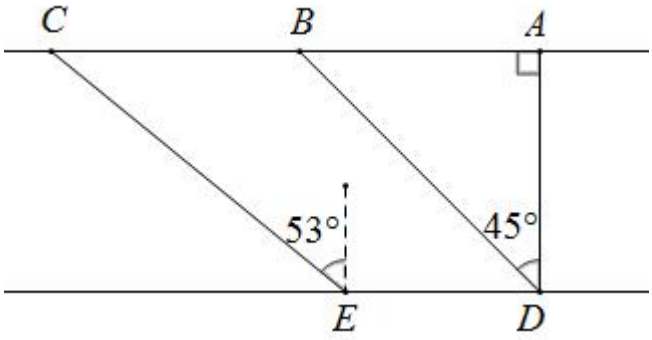
21.（2019•湖北省荆门市）如图，已知平行四边形 $ABCD$ 中，$AB=5$，$BC=3$，$AC=2\sqrt{13}$.

（1）求平行四边形 $ABCD$ 的面积；

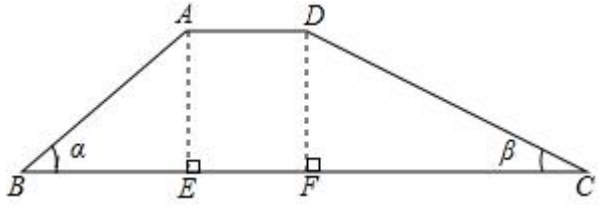
（2）求证：$BD\perp BC$.



22.（2019 广东深圳）如图所示，某施工队要测量隧道长度 BC，AD=600 米，AD⊥BC，施工队站在点 D 处看向 B，测得仰角 45°，再由 D 走到 E 处测量，DE∥AC，DE=500 米，测得仰角为 53°，求隧道 BC 长.（sin53°$\approx\frac{4}{5}$，cos53°$\approx\frac{3}{5}$，tan53°$\approx\frac{4}{3}$）.



23.（2019 湖北十堰）如图，拦水坝的横断面为梯形 $ABCD$，$AD=3m$，坝高 $AE=DF=6m$，坡角 $\alpha=45°$，$\beta=30°$，求 BC 的长.



24.（2019 湖南郴州）如图所示，巡逻船在 A 处测得灯塔 C 在北偏东 45° 方向上，距离 A 处 30km. 在灯塔 C 的正南方向 B 处有一渔船发出求救信号，巡逻船接到指示后立即前往施救. 已知 B 处在 A 处的北偏东 60° 方向上，这时巡逻船与渔船的距离是多少？

（精确到0.01km. 参考数据：$\sqrt{2}\approx1.414$，$\sqrt{3}\approx1.732$，$\sqrt{6}\approx2.449$）

