专题 21 菱形

专题知识回顾

1．菱形的定义 ：有一组邻边相等的平行四边形叫做菱形。

2.菱形的性质：（1）菱形的四条边都相等；（2）菱形的两条对角线互相垂直，并且每一条对角线平分一组对角。

3.菱形的判定定理：

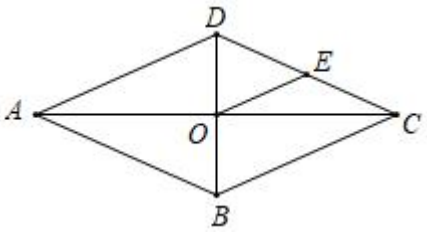
（1）一组邻边相等的平行四边形是菱形； （2）对角线互相垂直的平行四边形是菱形；

（3）四条边相等的四边形是菱形。

4．菱形的面积：$S_{菱形}$=底边长×高=两条对角线乘积的一半

专题典型题考法及解析

【例题 1】（2019 内蒙古赤峰）如图，菱形 $ABCD$ 周长为 20，对角线 AC、BD 相交于点 O，E 是 CD 的中点，则 OE 的长是（ ）



A．2.5 B．3 C．4 D．5

【答案】A

【解析】∵四边形 $ABCD$ 为菱形，

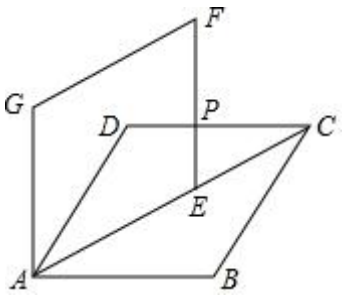
∴$CD=BC=\frac{20}{4}=5$，且 O 为 BD 的中点，

∵E 为 CD 的中点，

∴OE 为△BCD 的中位线，

∴$OE=\frac{1}{2}CB=2.5$

【例题 2】（2019 广西梧州）如图，在菱形 $ABCD$ 中，$AB=2$，$\angle BAD=60°$，将菱形 $ABCD$ 绕点 A 逆时针方向旋转，对应得到菱形 $AEFG$，点 E 在 AC 上，EF 与 CD 交于点 P，则 DP 的长是____.



【答案】$\sqrt{3}-1$

【解析】连接 BD 交 AC 于 O，如图所示：

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形，

$\therefore CD=AB=2$，$\angle BCD=\angle BAD=60°$，$\angle ACD=\angle BAC=\frac{1}{2}\angle BAD=30°$，$OA=OC$，$AC\perp BD$，

$\therefore OB=\frac{1}{2}AB=1$，

$\therefore OA=\sqrt{3}OB=\sqrt{3}$，

$\therefore AC=2\sqrt{3}$，

由旋转的性质得：$AE=AB=2$，$\angle EAG=\angle BAD=60°$，

$\therefore CE=AC-AE=2\sqrt{3}-2$，

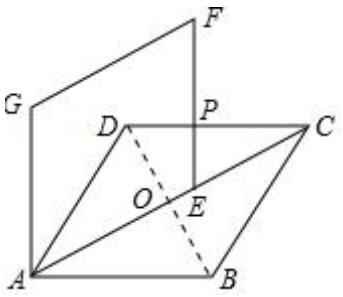
$\because$ 四边形 $AEFG$ 是菱形，$\therefore EF//AG$，

$\therefore \angle CEP=\angle EAG=60°$，

$\therefore \angle CEP+\angle ACD=90°$，$\therefore \angle CPE=90°$，

$\therefore PE=\frac{1}{2}CE=\sqrt{3}-1$，$PC=\sqrt{3}PE=3-\sqrt{3}$，

$\therefore DP=CD-PC=2-(3-\sqrt{3})=\sqrt{3}-1$。



专题典型训练题

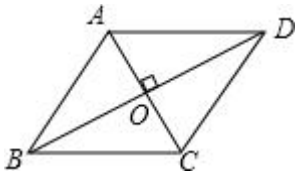
一、选择题

1.（2019 四川泸州）一个菱形的边长为 6，面积为 28，则该菱形的两条对角线的长度之和为（　　）

A．8　　B．12　　C．16　　D．32

【答案】

【解析】如图所示：



∵四边形 $ABCD$ 是菱形，

∴$AO=CO=\frac{1}{2}AC$，$DO=BO=\frac{1}{2}BD$，$AC\perp BD$，

∵面积为 28，

∴$\frac{1}{2}AC\cdot BD=2OD\cdot AO=28$ ①

∵菱形的边长为 6，

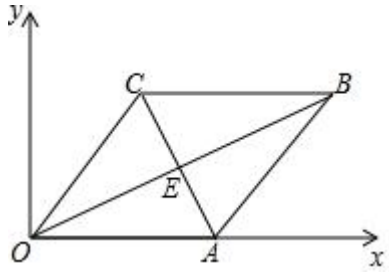
∴$OD^2+OA^2=36$ ②，

由①②两式可得：$(OD+AO)^2=OD^2+OA^2+2OD\cdot AO=36+28=64$．

∴$OD+AO=8$，

∴$2(OD+AO)=16$，即该菱形的两条对角线的长度之和为 16．

2.(2019•四川省绵阳市)如图，在平面直角坐标系中，四边形 $OABC$ 为菱形，$O(0,0)$，$A(4,0)$，$\angle AOC=60°$，则对角线交点 E 的坐标为（　　）



A.$(2,\sqrt{3})$　　B．$(\sqrt{3},2)$　　C．$(\sqrt{3},3)$　　D．$(3,\sqrt{3})$

【答案】D

【解析】过点 E 作 $EF\perp x$ 轴于点 F，

∵四边形 $OABC$ 为菱形，$\angle AOC=60°$，

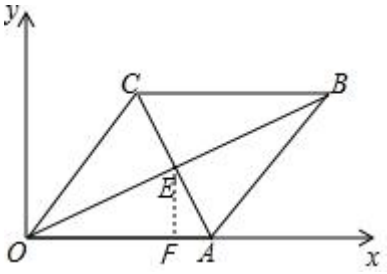
∴$\angle AOE=\frac{1}{2}\angle AOC=30°$，$\angle FAE=60°$，

∵$A(4,0)$，

∴OA=4，

∴ $AE=\frac{1}{2}AO=\frac{1}{2}\times 4$=2，

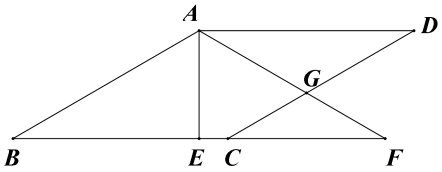
∴ $AF=\frac{1}{2}AE=1$，EF=$\sqrt{AE^2-AF^2}$=$\sqrt{2^2-1^2}$=$\sqrt{3}$，



∴OF=AO-AF=4-1=3，

∴ $E(3,\sqrt{3})$.

3.（2019•四川省广安市）如图，在边长为$\sqrt{3}$的菱形$ABCD$中，$\angle B=30°$，过点A作$AE\perp BC$于点E，现将△ABE 沿直线 AE 翻折至△AFE 的位置，AF 与 CD 交于点 G 则 CG 等于（　　）



A. $\sqrt{3}-1$　　B.1　　C. $\frac{1}{2}$　　D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

【答案】A

【解析】因为∠B=30°，AB=$\sqrt{3}$，$AE\perp BC$，

所以 BE=$\frac{3}{2}$，所以 EC=$\sqrt{3}$-$\frac{3}{2}$，

则 CF=3-$\sqrt{3}$，

又因为 CG∥AB，

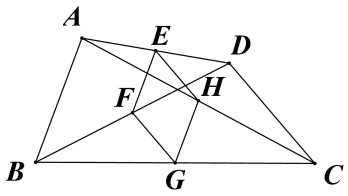
所以$\frac{CG}{AB}=\frac{CF}{BF}$，

所以 CG=$\sqrt{3}-1$.

4.（2019 四川省雅安市）如图，在四边形 ABCD 中，AB=CD，AC、BD 是对角线 ，E、F、G、H 分别是

AD、BD、BC、AC 的中点，连接 EF、FG、GH、HE，则四边形 EFGH 的形状是（　　）

A．平行四边形　　B．矩形　　C．菱形　　D．正方形



【答案】C

【解析】由点 E、F、G、H 分别是任意四边形 $ABCD$ 中 AD、BD、BC、CA 的中点，根据三角形中位线性质，得 $EF=GH=\frac{1}{2}AB$，$EH=FG=\frac{1}{2}CD$，又由 AB=CD，得 $EF=FG=GH=EH$ 时，四边形 $EFGH$ 是菱形．

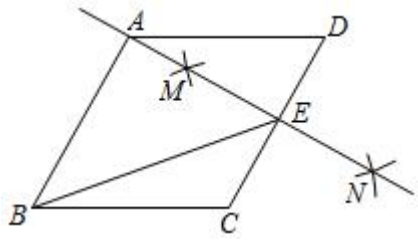
∵点 E、F、G、H 分别是任意四边形 $ABCD$ 中 AD、BD、BC、CA 的中点，∴$EF=GH=\frac{1}{2}AB$，$EH=FG=\frac{1}{2}CD$，∵AB=CD，∴$EF=FG=GH=EH$ 时，四边形 $EFGH$ 是菱形，故选 C．

5.（2019·贵州安顺）如图，在菱形 $ABCD$ 中，按以下步骤作图：

①分别以点 C 和点 D 为圆心，大于 $\frac{1}{2}CD$ 的长为半径作弧，两弧相交于 M、N 两点；

②作直线 MN，且 MN 恰好经过点 A，与 CD 交于点 E，连接 BE．

则下列说法错误的是（　　）



A．$\angle ABC=60°$　　B．$S_{\triangle ABE}=2S_{\triangle ADE}$

C．若 $AB=4$，则 $BE=4\sqrt{7}$　　D．$sin\angle CBE=\frac{\sqrt{21}}{14}$

【答案】C

【解析】由作法得 AE 垂直平分 CD，即 $CE=DE$，$AE\perp CD$，

∵四边形 $ABCD$ 为菱形，

∴$AD=CD=2DE$，$AB\parallel DE$，

在 $Rt\triangle ADE$ 中，$cosD=\frac{DE}{AD}=\frac{1}{2}$，

∴$\angle D=60°$，

∴$\angle ABC=60°$，所以 A 选项的结论正确；

∵$S_{\triangle ABE}=\frac{1}{2}AB\cdot AE$，$S_{\triangle ADE}=\frac{1}{2}DE\cdot AE$，

而 $AB=2DE$，

∴$S_{\triangle ABE}=2S_{\triangle ADE}$，所以 B 选项的结论正确；

若 $AB=4$，则 $DE=2$，

∴$AE=2\sqrt{3}$，

在 $Rt\triangle ABE$ 中，$BE=\sqrt{4^2+(2\sqrt{3})^2}=2\sqrt{7}$，所以 C 选项的结论错误；

作 $EH\perp BC$ 交 BC 的延长线于 H，如图，

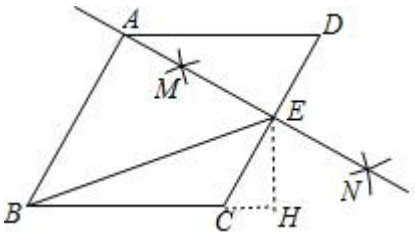
设 $AB=4a$，则 $CE=2a$，$BC=4a$，$BE=2\sqrt{7}a$，

在$\triangle CHE$ 中，$\angle ECH=\angle D=60°$，

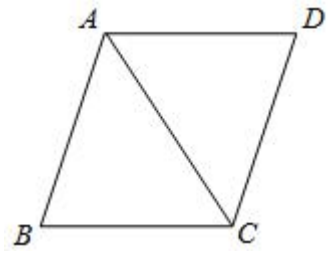
∴$CH=a$，$EH=\sqrt{3}a$，

∴$\sin\angle CBE=\frac{EH}{BE}=\frac{\sqrt{3}a}{2\sqrt{7}a}=\frac{\sqrt{21}}{14}$，所以 D 选项的结论正确.

故选：C.



6.（2019·贵州贵阳）如图所示，菱形 $ABCD$ 的周长是 4cm，$\angle ABC=60°$，那么这个菱形的对角线 AC 的长是（　　）



A．1cm　　B．2 cm　　C．3cm　　D．4cm

【答案】A

【解析】由于四边形 $ABCD$ 是菱形，AC 是对角线，根据$\angle ABC=60°$，而 $AB=BC$，易证$\triangle BAC$ 是等边三角形，从而可求 AC 的长.

∵四边形 $ABCD$ 是菱形，AC 是对角线，

∴$AB=BC=CD=AD$，

∵$\angle ABC=60°$，

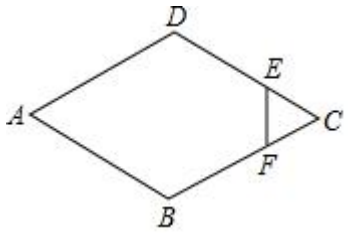
∴△ABC 是等边三角形，

∴$AB=BC=AC$，

∵菱形 $ABCD$ 的周长是 $4cm$，

∴$AB=BC=AC=1cm$．

7.（2019•贵州省铜仁市）如图，四边形 $ABCD$ 为菱形，$AB=2$，$\angle DAB=60°$，点 E、F 分别在边 DC、BC 上，且 $CE=\frac{1}{3}CD$，$CF=\frac{1}{3}CB$，则 $S_{\triangle CEF}=$（　　）



A．$\frac{\sqrt{3}}{2}$　　B．$\frac{\sqrt{3}}{3}$　　C．$\frac{\sqrt{3}}{4}$　　D．$\frac{\sqrt{3}}{9}$

【答案】D．

【解答】∵四边形 $ABCD$ 为菱形，$AB=2$，$\angle DAB=60°$

∴$AB=BC=CD=2$，$\angle DCB=60°$

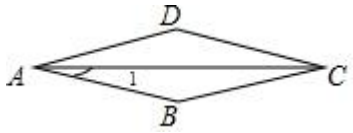
∵$CE=\frac{1}{3}CD$，$CF=\frac{1}{3}CB$

∴$CE=CF=\frac{2}{3}$

∴△CEF 为等边三角形

∴$S_{\triangle CEF}=\frac{\sqrt{3}}{4}\times(\frac{2}{3})^2=\frac{\sqrt{3}}{9}$

8.（2019•河北省）如图，菱形 $ABCD$ 中，$\angle D=150°$，则$\angle 1=$（　　）



A．30°　　B．25°　　C．20°　　D．15°

【答案】D．

【解答】∵四边形 $ABCD$ 是菱形，$\angle D=150°$，

∴$AB\parallel CD$，$\angle BAD=2\angle 1$，

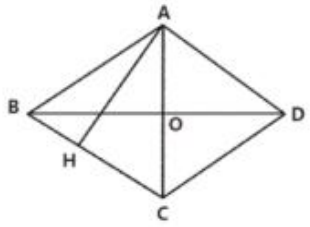
∴$\angle BAD+\angle D=180°$，

∴$\angle BAD=180°-150°=30°$，

∴∠1＝15°

二、填空题

9.（2019 广西北部湾）如图，在菱形 ABCD 中，对角线 AC，BD 交与点 O，过点 A 作 AH⊥BC 于点 H，已知 BO=4，$S_{菱形ABCD}$=24，则 AH=_____.



【答案】$\frac{24}{5}$.

【解析】本题考查了菱形的性质、勾股定理以及菱形面积公式，根据菱形面积=对角线积的一半可求 AC，再根据勾股定理求出 BC，然后由菱形的面积即可得出结果.

∵四边形 ABCD 是菱形，

∴BO=DO=4，AO=CO，AC⊥BD，

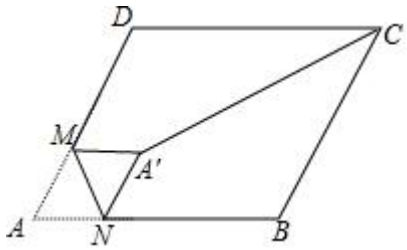
∴BD=8.

∵$S_{菱形ABCD}=\frac{1}{2}AC\times BD=24$，∴AC=6，∴$OC=\frac{1}{2}AC=3$，

∴$BC=\sqrt{OB^2+OC^2}=5$，

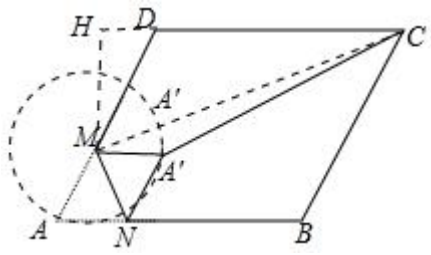
∵$S_{菱形ABCD}=BC\times AH=24$，∴$AH=\frac{24}{5}$.

10.（2019 内蒙古通辽）如图，在边长为 3 的菱形 *ABCD* 中，∠*A*＝60°，*M* 是 *AD* 边上的一点，且 $AM=\frac{1}{3}AD$，*N* 是 *AB* 边上的一动点，将△*AMN* 沿 *MN* 所在直线翻折得到△*A′MN*，连接 *A′C*．则 *A′C* 长度的最小值是_____.



【答案】$\sqrt{19}-1$

【解析】过点 *M* 作 *MH*⊥*CD* 交 *CD* 延长线于点 *H*，连接 *CM*，



∵$AM=\frac{1}{3}AD$，$AD=CD=3$

∴$AM=1$，$MD=2$

∵$CD\parallel AB$，

∴$\angle HDM=\angle A=60^{\circ}$

∴$HD=\frac{1}{2}MD=1$，$HM=\sqrt{3}HD=\sqrt{3}$

∴$CH=4$

∴$MC=\sqrt{MH^2+CH^2}=\sqrt{19}$

∵将△AMN 沿 MN 所在直线翻折得到△$A'MN$，

∴$AM=A'M=1$，

∴点 A'在以 M 为圆心，AM 为半径的圆上，

∴当点 A'在线段 MC 上时，$A'C$ 长度有最小值

∴$A'C$ 长度的最小值$=MC-MA'=\sqrt{19}-1$

11.（2019 湖南常德）规定：如果一个四边形有一组对边平行，一组邻边相等，那么称此四边形为广义菱形．根据规定判断下面四个结论：①正方形和菱形都是广义菱形；②平行四边形是广义菱形；③对角线互相垂直，且两组邻边分别相等的四边形是广义菱形；④若 M、N 的坐标分别为（0，1），（0，－1），P 是二次函数 $y=\frac{1}{4}x^2$ 的图象上在第一象限内的任意一点，PQ 垂直直线 $y=-1$ 于点 Q，则四边形 $PMNQ$ 是广义菱形．其中正确的是_____．（填序号）

【答案】①②④.

【解析】①根据广义菱形的定义，正方形和菱形都有一组对边平行，一组邻边相等，①正确；

②平行四边形有一组对边平行，没有一组邻边相等，②错误；

③由给出条件无法得到一组对边平行，③错误；

④设点 P（m，$\frac{1}{4}m^2$），则 Q（m，－1），

∴$MP=\sqrt{m^2+(\frac{1}{4}m^2-1)^2}=|\frac{1}{4}m^2+1|$，$PQ=\frac{1}{4}m^2+1$，

∵点 P 在第一象限，

∴$m>0$，

∴$MP=\frac{1}{4}m^2+1$，

∴$MP=PQ$，

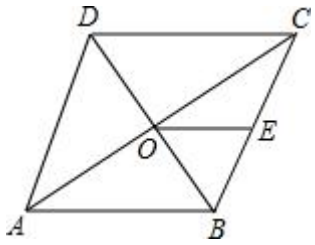
又∵$MN//PQ$，

∴四边形 $PMNQ$ 是广义菱形．

④正确；

故答案为①②④．

12.（2019 湖北十堰）如图，已知菱形 $ABCD$ 的对角线 AC，BD 交于点 O，E 为 BC 的中点，若 $OE=3$，则菱形的周长为_____．



【答案】24

【解析】∵四边形 $ABCD$ 是菱形，

∴$AB=BC=CD=AD$，$BO=DO$，

∵点 E 是 BC 的中点，

∴OE 是△BCD 的中位线，

∴$CD=2OE=2\times3=6$，

∴菱形 $ABCD$ 的周长$=4\times6=24$

13.（2019 北京市） 把图 1 中的菱形沿对角线分成四个全等的直角三角形，将这四个直角三角形分别拼成如图 2，图 3 所示的正方形，则图 1 中菱形的面积为_____．

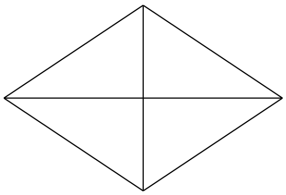


图1

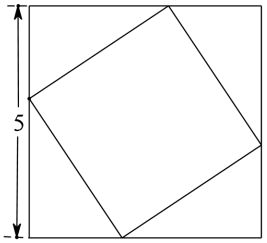


图2

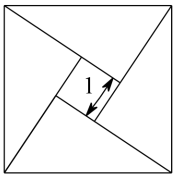


图3

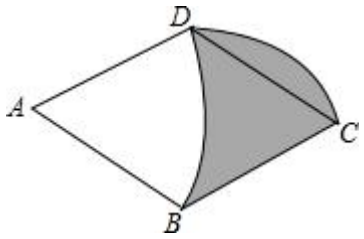
【答案】12

【解析】设图 1 中小直角三角形的两直角边长分别为 a，b （a>b）；

则由图 2 和图 3 列得方程组 $\begin{cases}a+b=5\\a-b=1\end{cases}$，由加减消元法得 $\begin{cases}a=3\\b=2\end{cases}$，

∴菱形的面积 $S=4\times\frac{1}{2}ab=4\times\frac{1}{2}\times3\times2=12$.故填 12.

14.（**2019 辽宁抚顺**）如图，菱形 *ABCD* 的边长为 4*cm*，∠*A*＝60°，*BD* 是以点 *A* 为圆心，*AB* 长为半径的弧，*CD* 是以点 *B* 为圆心，*BC* 长为半径的弧，则阴影部分的面积为_____cm^2.



【答案】$4\sqrt{3}$.

【解析】连接 *BD*，判断出△*ABD* 是等边三角形，根据等边三角形的性质可得∠*ABD*＝60°，再求出∠*CBD*＝60°，然后求出阴影部分的面积＝$S_{△ABD}$，计算即可得解.

如图，连接 *BD*，

∵四边形 *ABCD* 是菱形，

∴*AB*＝*AD*，

∵∠*A*＝60°，

∴△*ABD* 是等边三角形，

∴∠*ABD*＝60°，

又∵菱形的对边 *AD*∥*BC*，

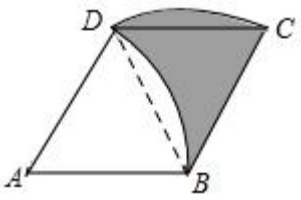
∴∠*ABC*＝180°－60°＝120°，

∴∠*CBD*＝120°－60°＝60°，

∴$S_{阴影}=S_{扇形BDC}-（S_{扇形ABD}-S_{△ABD}）$，

$=S_{△ABD}$，

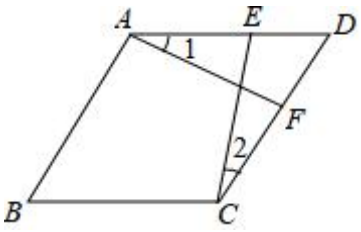
$=\frac{1}{2}\times4\times\sqrt{4^2-2^2}=4\sqrt{3}cm^2$.



三、解答题

15.（2019 湖南岳阳）如图，在菱形 $ABCD$ 中，点 E、F 分别为 AD、CD 边上的点，$DE=DF$，

求证：$\angle 1=\angle 2$.



【答案】见解析.

【解析】证明：∵四边形 $ABCD$ 是菱形，

∴$AD=CD$，

在△ADF 和△CDE 中，$\begin{cases} AD=CD \\ \angle D=\angle D \\ DF=DE \end{cases}$，

∴△ADF≌△CDE（SAS），

∴$\angle 1=\angle 2$.

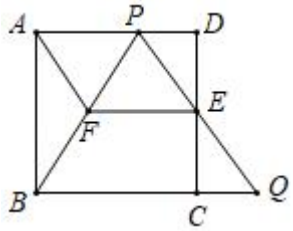
16.（2019•海南省）如图，在边长为 l 的正方形 $ABCD$ 中，E 是边 CD 的中点，点 P 是边 AD 上一点（与点 A、D 不重合），射线 PE 与 BC 的延长线交于点 Q.

（1）求证：△PDE≌△QCE；

（2）过点 E 作 $EF\parallel BC$ 交 PB 于点 F，连结 AF，当 $PB=PQ$ 时，

①求证：四边形 $AFEP$ 是平行四边形；

②请判断四边形 $AFEP$ 是否为菱形，并说明理由.



【解析】（1）由四边形 $ABCD$ 是正方形知$\angle D=\angle ECQ=90°$，由 E 是 CD 的中点知 $DE=CE$，结合$\angle DEP=\angle CEQ$ 即可得证；

（2）①由 $PB=PQ$ 知$\angle PBQ=\angle Q$，结合 $AD\parallel BC$ 得$\angle APB=\angle PBQ=\angle Q=\angle EPD$，由△$PDE$≌△$QCE$ 知 $PE=QE$，再由 $EF\parallel BQ$ 知 $PF=BF$，根据 Rt△PAB 中 $AF=PF=BF$ 知$\angle APF=\angle PAF$，从而得$\angle PAF=\angle EPD$，据此即可证得 $PE\parallel AF$，从而得证；

②设 $AP=x$，则 $PD=1-x$，若四边形 $AFEP$ 是菱形，则 $PE=PA=x$，由 $PD^2+DE^2=PE^2$ 得关于 x 的方程，解之求得 x 的值，从而得出四边形 $AFEP$ 为菱形的情况.

【解答】（1）∵四边形 $ABCD$ 是正方形，∴$\angle D=\angle ECQ=90°$，

∵E 是 CD 的中点，∴$DE=CE$，

又∵$\angle DEP=\angle CEQ$，

∴$\triangle PDE\cong\triangle QCE$（$ASA$）；

（2）①∵$PB=PQ$，∴$\angle PBQ=\angle Q$，

∵$AD\parallel BC$，

∴$\angle APB=\angle PBQ=\angle Q=\angle EPD$，

∵$\triangle PDE\cong\triangle QCE$，∴$PE=QE$，

∵$EF\parallel BQ$，∴$PF=BF$，

∴在 $Rt\triangle PAB$ 中，$AF=PF=BF$，

∴$\angle APF=\angle PAF$，

∴$\angle PAF=\angle EPD$，

∴$PE\parallel AF$，

∵$EF\parallel BQ\parallel AD$，

∴四边形 $AFEP$ 是平行四边形；

②当 $AP=\frac{5}{8}$时，四边形 $AFEP$ 是菱形．

设 $AP=x$，则 $PD=1-x$，

若四边形 $AFEP$ 是菱形，则 $PE=PA=x$，

∵$CD=1$，E 是 CD 中点，∴$DE=\frac{1}{2}$，

在 $Rt\triangle PDE$ 中，由 $PD^2+DE^2=PE^2$ 得 $(1-x)^2+(\frac{1}{2})^2=x^2$，解得 $x=\frac{5}{8}$，

即当 $AP=\frac{5}{8}$时，四边形 $AFEP$ 是菱形．

17.（2019 北京市）如图 1，在菱形 ABCD 中，AC 为对角线，点 E，F 分别在 AB，AD 上，BE=DF，连接 EF．

（1）求证：AC⊥EF；

（2）如图 2，延长 EF 交 CD 的延长线于点 G，连接 BD 交 AC 于点 O，若 BD=4，tanG=$\frac{1}{2}$，求 AO 的长．

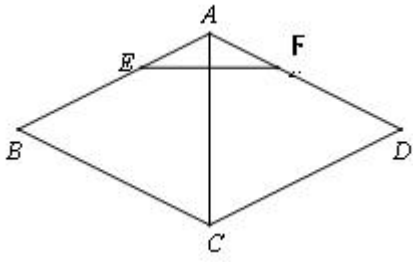


图 1

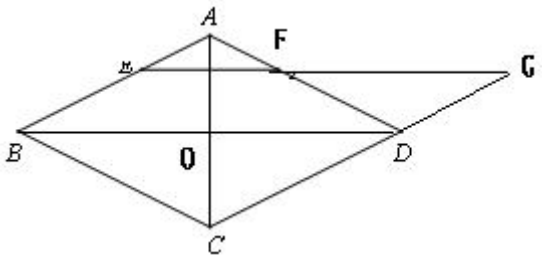


图 2

【答案】见解析。

【解析】由四边形 ABCD 为菱形易得 AB=AD，AC 平分∠BAD，结合 BE=DF，根据等腰△AEF 中的三线合一，证得 AC ⊥ EF.；菱形 ABCD 中有 AC ⊥ BD，结合 AC ⊥ EF 得 BD // EF. 进而有 $\tan\angle ODC=\tan\angle G=\frac{1}{2}=\frac{OC}{OD}=\frac{OC}{2}$；得出 OA 的值.

（1）证明：∵四边形 ABCD 为菱形

∴AB=AD，AC 平分∠BAD

∵BE=DF

∴ $AB-BE=AD-DF$

∴AE=AF

∴△AEF 是等腰三角形

∵AC 平分∠BAD

∴AC⊥EF

（2）解：∵菱形 ABCD 中有 AC⊥BD，结合 AC⊥EF.

∴BD // EF.

又∵BD=4，tanG=$\frac{1}{2}$

∴ $\tan\angle ODC=\tan\angle G=\frac{1}{2}=\frac{OC}{OD}=\frac{OC}{2}$

∴AO=$\frac{1}{2}AC$ =OC=1.