专题 24　相似三角形判定与性质

专题知识回顾

1．相似三角形：对应角相等，对应边成比例的两个三角形叫做相似三角形。相似多边形对应边的比叫做相似比。

2．三角形相似的判定方法：

（1）定义法：对应角相等，对应边成比例的两个三角形相似。

（2）平行法：平行于三角形一边的直线和其他两边（或两边延长线）相交，构成的三角形与原三角形相似。

（3）判定定理 1：如果一个三角形的两个角与另一个三角形的两个角对应相等，那么这两个三角形相似，可简述为两角对应相等，两三角形相似。

（4）判定定理 2：如果一个三角形的两条边和另一个三角形的两条边对应相等，并且夹角相等，那么这两个三角形相似，可简述为两边对应成比例且夹角相等，两三角形相似。

（5）判定定理 3：如果一个三角形的三条边与另一个三角形的三条边对应成比例，那么这两个三角形相似，可简述为三边对应成比例，两三角形相似。

3．直角三角形相似判定定理：

①以上各种判定方法均适用

②定理：如果一个直角三角形的斜边和一条直角边与另一个直角三角形的斜边和一条直角边对应成比例，那么这两个直角三角形相似。

③垂直法：直角三角形被斜边上的高分成的两个直角三角形与原三角形相似。

4．相似三角形的性质：

（1）相似三角形的对应角相等，对应边成比例

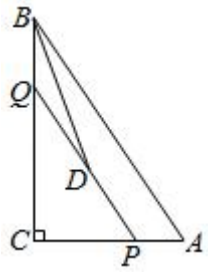
（2）相似三角形对应高的比、对应中线的比与对应角平分线的比都等于相似比

（3）相似三角形周长的比等于相似比

（4）相似三角形面积的比等于相似比的平方。

专题典型题考法及解析

【例题 1】（2019•海南省）如图，在 $Rt\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，$AB=5$，$BC=4$．点 P 是边 AC 上一动点，过点 P 作 $PQ\parallel AB$ 交 BC 于点 Q，D 为线段 PQ 的中点，当 BD 平分 $\angle ABC$ 时，AP 的长度为（　　）



A. $\frac{8}{13}$　　B. $\frac{15}{13}$　　C. $\frac{25}{13}$　　D. $\frac{32}{13}$

【答案】B.

【解析】本题考查的是相似三角形的判定和性质，掌握相似三角形的判定定理和性质定理是解题的关键．根据勾股定理求出 AC，根据角平分线的定义、平行线的性质得到 $\angle QBD=\angle BDQ$，得到 $QB=QD$，根据相似三角形的性质列出比例式，计算即可．

$\because \angle C=90°$，$AB=5$，$BC=4$，

$\therefore AC=\sqrt{AB^2-BC^2}=3$，

$\because PQ\parallel AB$，

$\therefore \angle ABD=\angle BDQ$，又 $\angle ABD=\angle QBD$，

$\therefore \angle QBD=\angle BDQ$，

$\therefore QB=QD$，

$\therefore QP=2QB$，

$\because PQ\parallel AB$，

$\therefore \triangle CPQ\backsim\triangle CAB$，

$\therefore \frac{CP}{CA}=\frac{CQ}{CB}=\frac{PQ}{AB}$，即 $\frac{CP}{3}=\frac{4-QB}{4}=\frac{2QB}{5}$，

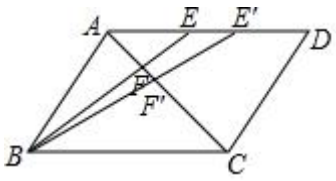
解得，$CP=\frac{24}{13}$，

$\therefore AP=CA-CP=\frac{15}{13}$

【例题 2】（2019•四川省凉山州）在▱ *ABCD* 中，*E* 是 *AD* 上一点，且点 *E* 将 *AD* 分为 2：3 的两部分，连接 *BE*、*AC* 相交于 *F*，则 $S_{\triangle AEF}$：$S_{\triangle CBF}$ 是_____.

【答案】4：25 或 9：25.

【解析】本题考查的是相似三角形的判定和性质、平行四边形的性质，掌握相似三角形的面积比等于相似比的平方是解题的关键.



分 *AE*：*ED*＝2：3、*AE*：*ED*＝3：2 两种情况，根据相似三角形的性质计算即可.

①当 *AE*：*ED*＝2：3 时，

∵四边形 *ABCD* 是平行四边形，

∴*AD*∥*BC*，*AE*：*BC*＝2：5，

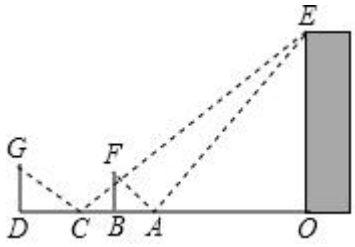
∴△*AEF*∽△*CBF*，

∴$S_{\triangle AEF}$：$S_{\triangle CBF}$＝（$\frac{2}{5}$）^{2}＝4：25；

②当 *AE*：*ED*＝3：2 时，

同理可得，$S_{\triangle AEF}$：$S_{\triangle CBF}$＝（$\frac{3}{5}$）^{2}＝9：25。

【例题 3】（2019•湖北省荆门市）如图，为了测量一栋楼的高度 *OE*，小明同学先在操场上 *A* 处放一面镜子，向后退到 *B* 处，恰好在镜子中看到楼的顶部 *E*；再将镜子放到 *C* 处，然后后退到 *D* 处，恰好再次在镜子中看到楼的顶部 *E*（*O*，*A*，*B*，*C*，*D* 在同一条直线上），测得 *AC*＝2*m*，*BD*＝2.1*m*，如果小明眼睛距地面高度 *BF*，*DG* 为 1.6*m*，试确定楼的高度 *OE*.



【答案】楼的高度 *OE* 为 32 米.

【解析】设 *E* 关于 *O* 的对称点为 *M*，由光的反射定律知，延长 *GC*、*FA* 相交于点 *M*，

连接 *GF* 并延长交 *OE* 于点 *H*，

∵*GF*∥*AC*，

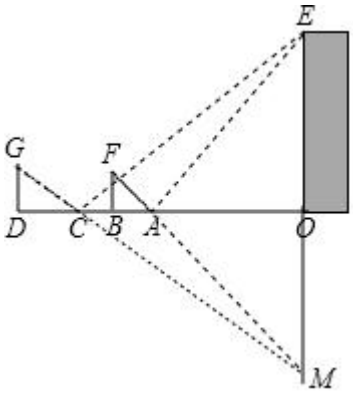
∴△*MAC*∽△*MFG*，

$\therefore \frac{AC}{FG}=\frac{MA}{MF}=\frac{MO}{MH}$,

即：$\frac{AC}{BD}=\frac{OE}{MH}=\frac{OE}{MO+OH}=\frac{OE}{OE+BF}$,

$\therefore \frac{OE}{OE+1.6}=\frac{2}{2.1}$,

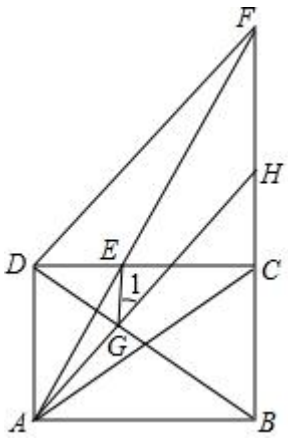
$\therefore OE=32$



【例题 4】（2019 年广西梧州市）如图，在矩形 $ABCD$ 中，$AB=4$，$BC=3$，AF 平分 $\angle DAC$，分别交 DC，BC 的延长线于点 E，F；连接 DF，过点 A 作 $AH/\!/DF$，分别交 BD，BF 于点 G，H.

（1）求 DE 的长；

（2）求证：$\angle 1=\angle DFC$.



【答案】见解析。

【解析】本题考查了矩形的相关证明与计算，熟练掌握矩形的性质、平行四边形的判定与性质与相似三角形的性质与判定是解题的关键.

（1）由 $AD/\!/CF$，AF 平分 $\angle DAC$，可得 $\angle FAC=\angle AFC$，得出 $AC=CF=5$，可证出 $\triangle ADE\backsim\triangle FCE$，则 $\frac{AD}{CF}=\frac{DE}{CE}$，可求出 DE 长；

∵矩形 $ABCD$ 中，$AD/\!/CF$，

∴∠DAF=∠ACF，

∵AF 平分∠DAC，

∴∠DAF=∠CAF，

∴∠FAC=∠AFC，

∴AC=CF，

∵AB=4，BC=3，

∴$AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=\sqrt{3^2+4^2}=5$，

∴CF=5，

∵AD∥CF，

∴△ADE∽△FCE，

∴$\frac{AD}{CF}=\frac{DE}{CE}$，

设 DE=x，则$\frac{3}{5}=\frac{x}{4-x}$，

解得 $x=\frac{3}{2}$

∴$DE=\frac{3}{2}$；

（2）由△ADG∽△HBG，可求出 DG，则$\frac{DE}{DG}=\frac{DC}{DB}$，可得 EG∥BC，则∠1=∠AHC，根据 DF∥AH，可得∠AHC=∠DFC，结论得证．

∵AD∥FH，AF∥DH，

∴四边形 $ADFH$ 是平行四边形，

∴AD=FH=3，

∴CH=2，BH=5，

∵AD∥BH，

∴△ADG∽△HBG，

∴$\frac{DG}{BG}=\frac{AD}{BH}$，

∴$\frac{DG}{5-DG}=\frac{3}{5}$，

∴$DG=\frac{15}{8}$，

∵$DE=\frac{3}{2}$，

$\therefore \frac{DE}{DG}=\frac{DC}{DB}=\frac{4}{5}$，

$\therefore EG \parallel BC$，

$\therefore \angle 1=\angle AHC$，

又$\because DF \parallel AH$，

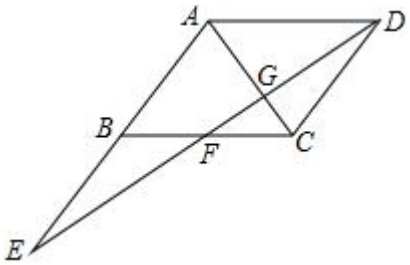
$\therefore \angle AHC=\angle DFC$，

$\angle 1=\angle DFC$．

【例题 5】（2019 年湖南省张家界市）如图，在平行四边形 $ABCD$ 中，连接对角线 AC，延长 AB 至点 E，使 $BE=AB$，连接 DE，分别交 BC，AC 交于点 F，G．

（1）求证：$BF=CF$；

（2）若 $BC=6$，$DG=4$，求 FG 的长．



【答案】见解析。

【解析】根据平行四边形的性质得到 $AD \parallel CD$，$AD=BC$，得到$\triangle EBF \backsim \triangle EAD$，根据相似三角形的性质证明即可；根据相似三角形的性质列式计算即可．

（1）证明：$\because$四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$\therefore AD \parallel CD$，$AD=BC$，

$\therefore \triangle EBF \backsim \triangle EAD$，

$\therefore \frac{BF}{AD}=\frac{EB}{EA}=\frac{1}{2}$，

$\therefore BF=\frac{1}{2}AD=\frac{1}{2}BC$，

$\therefore BF=CF$；

（2）$\because$四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$\therefore AD \parallel CD$，

$\therefore \triangle FGC \backsim \triangle DGA$，

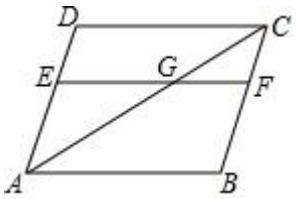
$\therefore \frac{FG}{DG}=\frac{FC}{AD}$，即$\frac{FG}{4}=\frac{1}{2}$，

解得，$FG=2$．

专题典型训练题

一、选择题

1.（2019 年广西玉林市）如图，*AB*∥*EF*∥*DC*，*AD*∥*BC*，*EF* 与 *AC* 交于点 *G*，则是相似三角形共有（　　）



A．3 对　　B．5 对　　C．6 对　　D．8 对

【答案】C

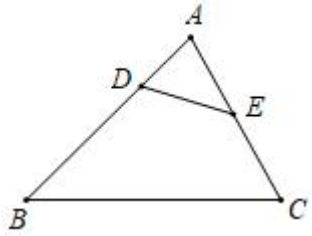
【解析】图中三角形有：△*AEG*，△*ADC*，*CFG*，△*CBA*，

∵*AB*∥*EF*∥*DC*，*AD*∥*BC*

∴△*AEG*∽△*ADC*∽*CFG*∽△*CBA*

共有 6 个组合分别为：∴△*AEG*∽△*ADC*，△*AEG*∽*CFG*，△*AEG*∽△*CBA*，△*ADC*∽*CFG*，△*ADC*∽△*CBA*，*CFG*∽△*CBA*

2.（2019 年内蒙古赤峰市）如图，*D*、*E* 分别是△*ABC* 边 *AB*，*AC* 上的点，∠*ADE*＝∠*ACB*，若 *AD*＝2，*AB*＝6，*AC*＝4，则 *AE* 的长是（　　）



A．1　　B．2　　C．3　　D．4

【答案】C

【解析】证明△*ADE*∽△*ACB*，根据相似三角形的性质列出比例式，计算即可．

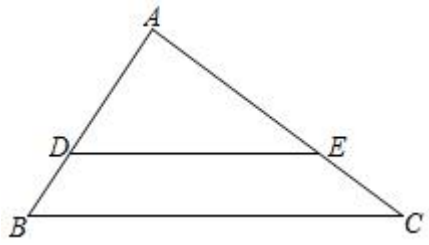
∵∠*ADE*＝∠*ACB*，∠*A*＝∠*A*，

∴△*ADE*∽△*ACB*，

∴$\frac{AD}{AC}=\frac{AE}{AB}$，即$\frac{2}{4}=\frac{AE}{6}$，

解得，*AE*＝3

3.（2019·广西贺州）如图，在△*ABC* 中，*D*，*E* 分别是 *AB*，*AC* 边上的点，*DE*∥*BC*，若 *AD*＝2，*AB*＝3，*DE*＝4，则 *BC* 等于（　　）



A．5　　B．6　　C．7　　D．8

【答案】B

【解析】本题考查了相似三角形的判定与性质；证明三角形相似得出对应边成比例是解题的关键．由平行线得出△*ADE*∽△*ABC*，得出对应边成比例$\frac{AD}{AB}=\frac{DE}{BC}$，即可得出结果．

∵*DE*∥*BC*，

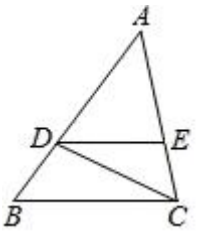
∴△*ADE*∽△*ABC*，

∴$\frac{AD}{AB}=\frac{DE}{BC}$，

即$\frac{2}{3}=\frac{4}{BC}$，

解得：*BC*＝6

4.（2019•广西贵港）如图，在△*ABC* 中，点 *D*，*E* 分别在 *AB*，*AC* 边上，*DE*∥*BC*，∠*ACD*＝∠*B*，若 *AD*＝2*BD*，*BC*＝6，则线段 *CD* 的长为（　　）



A．$2\sqrt{3}$　　B．$3\sqrt{2}$　　C．$2\sqrt{6}$　　D．5

【答案】C．

【解析】设 *AD*＝2*x*，*BD*＝*x*，所以 *AB*＝3*x*，易证△*ADE*∽△*ABC*，利用相似三角形的性质可求出 *DE* 的长度，以及$\frac{AE}{AC}=\frac{2}{3}$，再证明△*ADE*∽△*ACD*，利用相似三角形的性质即可求出得出$\frac{AD}{AC}=\frac{AE}{AD}=\frac{DE}{CD}$，从而可求出 *CD* 的长度．

设 *AD*＝2*x*，*BD*＝*x*，

∴*AB*＝3*x*，

∵$DE∥BC$，

∴$△ADE∽△ABC$，

∴$\frac{DE}{BC}=\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}$，

∴$\frac{DE}{6}=\frac{2x}{3x}$，

∴$DE=4$，$\frac{AE}{AC}=\frac{2}{3}$，

∵$∠ACD=∠B$，

$∠ADE=∠B$，

∴$∠ADE=∠ACD$，

∵$∠A=∠A$，

∴$△ADE∽△ACD$，

∴$\frac{AD}{AC}=\frac{AE}{AD}=\frac{DE}{CD}$，

设$AE=2y$，$AC=3y$，

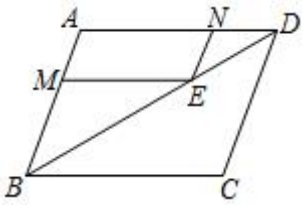
∴$\frac{AD}{3y}=\frac{2y}{AD}$，

∴$AD=\sqrt{6}y$，

∴$\frac{2y}{\sqrt{6}y}=\frac{4}{CD}$，

∴$CD=2\sqrt{6}$

5.（2019•黑龙江哈尔滨）如图，在$▱ABCD$中，点E在对角线BD上，$EM∥AD$，交AB于点M，$EN∥AB$，交AD于点N，则下列式子一定正确的是（　　）



A．$\frac{AM}{BM}=\frac{NE}{DE}$　　B．$\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AD}$　　C．$\frac{BC}{ME}=\frac{BE}{BD}$　　D．$\frac{BD}{BE}=\frac{BC}{EM}$

【答案】D．

【解析】根据平行四边形的性质以及相似三角形的性质．

∵在$▱ABCD$中，$EM∥AD$

∴易证四边形$AMEN$为平行四边形

∴易证$△BEM∽△BAD∽△END$

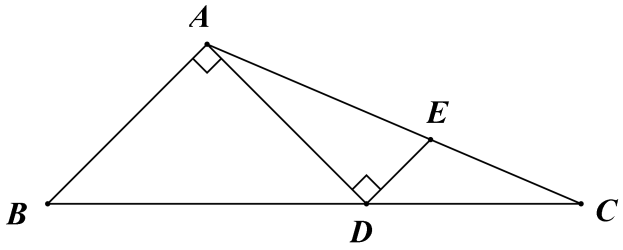
$\therefore \frac{AM}{BM}=\frac{NE}{BM}=\frac{DE}{BE}$，$A$ 项错误

$\frac{AM}{AB}=\frac{ND}{AD}$，$B$ 项错误

$\frac{BC}{ME}=\frac{AD}{ME}=\frac{BD}{BE}$，$C$ 项错误

$\frac{BD}{BE}=\frac{AC}{ME}=\frac{BC}{ME}$，$D$ 项正确。

6.（2019•江苏苏州）如图，在$\triangle ABC$中，点D为BC边上的一点，且$AD=AB=2$，$AD\perp AB$，过点D作$DE\perp AD$，DE交AC于点E，若$DE=1$，则$\triangle ABC$的面积为（　）



A．$4\sqrt{2}$　　B．4　　C．$2\sqrt{5}$　　D．8

【答案】B

【解析】考察相似三角形的判定和性质、等腰直角三角形的高，中等题型

$\therefore AB\perp AD$，$DE\perp AD$

$\therefore \angle BAD=\angle ADE=90^{\circ}$

$\therefore AB//DE$

易证$\triangle CDE:\triangle CBA$

$\therefore \frac{DC}{BC}=\frac{DE}{BA}=\frac{1}{2}$

即$\frac{DC}{BD+DC}=\frac{1}{2}$

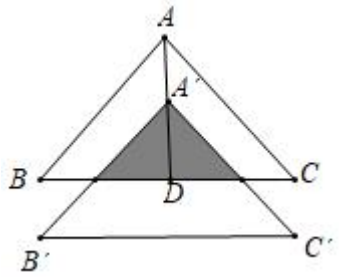
由题得$BD=2\sqrt{2}$

$\therefore$解得$DC=2\sqrt{2}$

$\triangle ABC$的高易得：$\sqrt{2}$

$\therefore S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times BC\times\sqrt{2}=\frac{1}{2}\times 4\sqrt{2}\times\sqrt{2}=4$

7.（2019 山东枣庄）如图，将△ABC沿BC边上的中线AD平移到△$A'B'C'$的位置．已知△ABC的面积为16，阴影部分三角形的面积9．若$AA'=1$，则$A'D$等于（　　）



A．2　　B．3　　C．4　　D．$\frac{3}{2}$

【答案】B

【解析】本题主要平移的性质，解题的关键是熟练掌握平移变换的性质与三角形中线的性质、相似三角形的判定与性质等知识点．

由 $S_{\triangle ABC}=16.S_{\triangle A'EF}=9$ 且 AD 为 BC 边的中线知 $S_{\triangle A'DE}=\frac{1}{2}S_{\triangle A'EF}=\frac{9}{2}$，$S_{\triangle ABD}=\frac{1}{2}S_{\triangle ABC}=8$，根据 $\triangle DA'E\backsim\triangle DAB$ 知 $(\frac{A'D}{AD})^2=\frac{S_{\triangle A'DE}}{S_{\triangle ABD}}$，据此求解可得．

∵$S_{\triangle ABC}=16.S_{\triangle A'EF}=9$，且 AD 为 BC 边的中线，

∴$S_{\triangle A'DE}=\frac{1}{2}S_{\triangle A'EF}=\frac{9}{2}$，$S_{\triangle ABD}=\frac{1}{2}S_{\triangle ABC}=8$，

∵将 $\triangle ABC$ 沿 BC 边上的中线 AD 平移得到 $\triangle A'B'C'$，

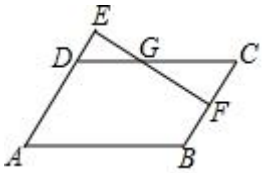
∴$A'E/\!/AB$，

∴$\triangle DA'E\backsim\triangle DAB$，

则 $(\frac{A'D}{AD})^2=\frac{S_{\triangle A'DE}}{S_{\triangle ABD}}$，即 $(\frac{A'D}{A'D+1})^2=\frac{\frac{9}{2}}{8}=\frac{9}{16}$，

解得 $A'D=3$ 或 $A'D=-\frac{3}{7}$（舍）。

8.（2019 四川巴中）如图 $\square ABCD$，F 为 BC 中点，延长 AD 至 E，使 DE：$AD=1$：3，连结 EF 交 DC 于点 G，则 $S_{\triangle DEG}$：$S_{\triangle CFG}=$（　　）



A．2：3　　B．3：2　　C．9：4　　D．4：9

【答案】D．

【解析】先设出 $DE=x$，进而得出 $AD=3x$，再用平行四边形的性质得出 $BC=3x$，进而求出 CF，最后用相似三角形的性质即可得出结论．

设 $DE=x$，

∵DE：$AD=1$：3，

∴$AD=3x$，

∵四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

∴$AD\parallel BC$，$BC=AD=3x$，

∵点 F 是 BC 的中点，

∴$CF=\frac{1}{2}BC=\frac{3}{2}x$，

∵$AD\parallel BC$，

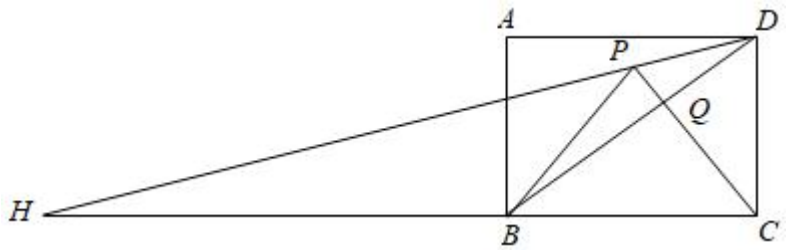
∴$\triangle DEG\backsim\triangle CFG$，

∴$\frac{S_{\triangle DEG}}{S_{\triangle CFG}}=(\frac{DE}{CF})^2=(\frac{x}{\frac{3}{2}x})^2=\frac{4}{9}$

9.（2019 年四川省遂宁市）如图，四边形 $ABCD$ 是边长为 1 的正方形，$\triangle BPC$ 是等边三角形，连接 DP 并延长交 CB 的延长线于点 H，连接 BD 交 PC 于点 Q，下列结论：

①$\angle BPD=135°$；②$\triangle BDP\backsim\triangle HDB$；③$DQ$：$BQ=1$：2；④$S_{\triangle BDP}=\frac{\sqrt{3}-1}{4}$.

其中正确的有（　　）



A．①②③　　B．②③④　　C．①③④　　D．①②④

【答案】D.

【解析】由等边三角形及正方形的性质求出$\angle CPD=\angle CDP=75°$、$\angle PCB=\angle CPB=60°$，从而判断①；证$\angle DBP=\angle DPB=135°$可判断②；作 $QE\perp CD$，设 $QE=DE=x$，则 $QD=\sqrt{2}x$，$CQ=2QE=2x$，$CE=\sqrt{3}x$，由 $CE+DE=CD$ 求出 x，从而求得 DQ、BQ 的长，据此可判断③，证 $DP=DQ=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$，根据 $S_{\triangle BDP}=\frac{1}{2}BD\cdot PD\sin\angle BDP$ 求解可判断④.

∵$\triangle PBC$ 是等边三角形，四边形 $ABCD$ 是正方形，

∴$\angle PCB=\angle CPB=60°$，$\angle PCD=30°$，$BC=PC=CD$，

∴$\angle CPD=\angle CDP=75°$，

则$\angle BPD=\angle BPC+\angle CPD=135°$，故①正确；

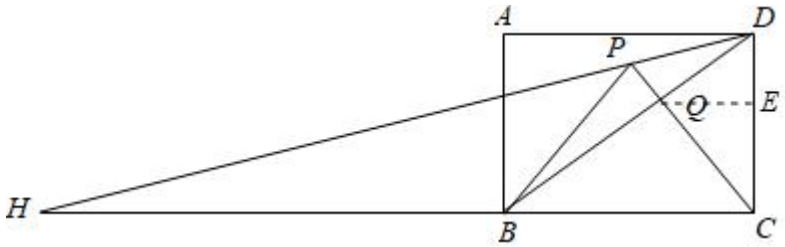
∵∠CBD=∠CDB=45°，

∴∠DBP=∠DPB=135°，

又∵∠PDB=∠BDH，

∴△BDP∽△HDB，故②正确；

如图，过点 Q 作 QE⊥CD 于 E，



设 QE=DE=x，则 QD=$\sqrt{2}x$，CQ=2QE=2x，

∴CE=$\sqrt{3}x$，

由 CE+DE=CD 知 x+$\sqrt{3}x$=1，

解得 x=$\frac{\sqrt{3}-1}{2}$，

∴QD=$\sqrt{2}x$=$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$，

∵BD=$\sqrt{2}$，

∴BQ=BD - DQ=$\sqrt{2}$-$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$=$\frac{3\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2}$，

则 DQ：BQ=$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$：$\frac{3\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2}$≠1：2，故③错误；

∵∠CDP=75°，∠CDQ=45°，

∴∠PDQ=30°，

又∵∠CPD=75°，

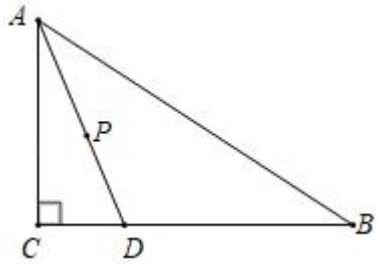
∴∠DPQ=∠DQP=75°，

∴DP=DQ=$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$，

∴$S_{△BDP}$=$\frac{1}{2}$$BD$•$PD$sin∠$BDP$=$\frac{1}{2}$×$\sqrt{2}$×$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$×$\frac{1}{2}$=$\frac{\sqrt{3}-1}{4}$，故④正确。

二、填空题

10.（2019•浙江宁波）如图所示，Rt△ABC 中，∠C=90°，AC=12，点 D 在边 BC 上，CD=5，BD=13．点 P 是线段 AD 上一动点，当半径为 6 的⊙P 与△ABC 的一边相切时，AP 的长为____．



【答案】6.5 或 $3\sqrt{13}$.

【解析】∵在 $Rt\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，$AC=12$，$BD+CD=18$，

∴$AB=\sqrt{12^2+18^2}=6\sqrt{13}$，

在 $Rt\triangle ADC$ 中，$\angle C=90°$，$AC=12$，$CD=5$，

∴$AD=\sqrt{AC^2+CD^2}=13$，

当⊙P 于 BC 相切时，点 P 到 BC 的距离＝6，

过 P 作 $PH\perp BC$ 于 H，

则 $PH=6$，

∵$\angle C=90°$，

∴$AC\perp BC$，

∴$PH\parallel AC$，

∴$\triangle DPH\backsim\triangle DAC$，

∴$\frac{PD}{DA}=\frac{PH}{AC}$，

∴$\frac{PD}{13}=\frac{6}{12}$，

∴$PD=6.5$，

∴$AP=6.5$；

当⊙P 于 AB 相切时，点 P 到 AB 的距离＝6，

过 P 作 $PG\perp AB$ 于 G，

则 $PG=6$，

∵$AD=BD=13$，

∴$\angle PAG=\angle B$，

∵$\angle AGP=\angle C=90°$，

∴$\triangle AGP\backsim\triangle BCA$，

∴$\frac{AP}{AB}=\frac{PG}{AC}$，

∴$\frac{AP}{6\sqrt{13}}=\frac{6}{12}$，

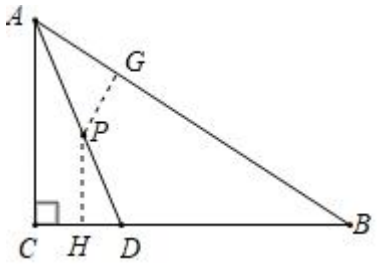
∴$AP=3\sqrt{13}$，

∵$CD=5<6$，

∴半径为 6 的⊙P 不与△ABC 的 AC 边相切，

综上所述，AP 的长为 6.5 或 $3\sqrt{13}$，

故答案为：6.5 或 $3\sqrt{13}$.



11. 2019 黑龙江省龙东地区） 一张直角三角形纸片 ABC，$\angle ACB=90°$，$AB=10$，$AC=6$，点 D 为 BC 边上的任一点，沿过点 D 的直线折叠，使直角顶点 C 落在斜边 AB 上的点 E 处，当△BDE 是直角三角形时，则 CD 的长为_____.

【答案】3 或 $\frac{24}{7}$.

【解析】在△BDE 中，∠B 是锐角，∴有两种可能，∠DEB 或∠EDB 是直角，由此画出示意图，逐步求解即可.

如图 1，∠DEB 是直角时，∵$\angle ACB=90°$，$AB=10$，$AC=6$，∴BC=$\sqrt{10^2-6^2}$ =8,设 CD=x，则 BD=8-x，由折叠

知 CD=ED=x，∵$\angle ACB=\angle DEB=90°$，∴△BED∽△BCA，∴$\frac{AC}{AB}=\frac{DE}{DB}$，即 $\frac{6}{10}=\frac{x}{8-x}$，解得 x=3;

如图 2，∠EDB 是直角时，ED∥AC，∴△BED∽△BAC，∴$\frac{AC}{CB}=\frac{ED}{DB}$,即 $\frac{6}{8}=\frac{x}{8-x}$，解得 x=$\frac{24}{7}$，综上，CD 的长

为 3 或$\frac{24}{7}$.

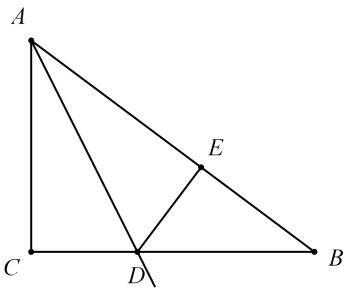


图 1

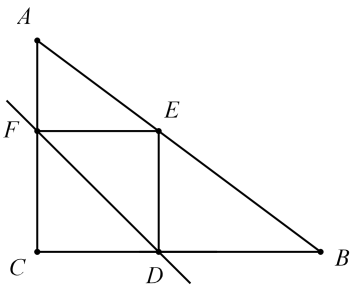
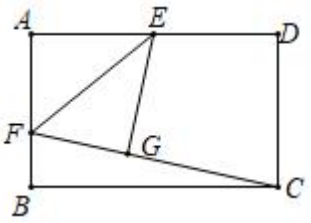


图 2

12.（2019•山东泰安）如图，矩形 $ABCD$ 中，$AB=3\sqrt{6}$，$BC=12$，E 为 AD 中点，F 为 AB 上一点，将△AEF

沿 EF 折叠后，点 A 恰好落到 CF 上的点 G 处，则折痕 EF 的长是_____.



【答案】$2\sqrt{15}$.

【解析】本题考查了矩形的性质，轴对称的性质，相似三角形的判定与性质等，解题关键是能够作出适当的辅助线，连接 CE，构造相似三角形，最终利用相似的性质求出结果.

连接 EC，利用矩形的性质，求出 EG，DE 的长度，证明 EC 平分 $\angle DCF$，再证 $\angle FEC=90°$，最后证 $\triangle FEC\backsim\triangle EDC$，利用相似的性质即可求出 EF 的长度.

如图，连接 EC，

$\because$ 四边形 $ABCD$ 为矩形，

$\therefore \angle A=\angle D=90°$，$BC=AD=12$，$DC=AB=3\sqrt{6}$，

$\because E$ 为 AD 中点，

$\therefore AE=DE=\frac{1}{2}AD=6$

由翻折知，$\triangle AEF\cong\triangle GEF$，

$\therefore AE=GE=6$，$\angle AEF=\angle GEF$，$\angle EGF=\angle EAF=90°=\angle D$，

$\therefore GE=DE$，

$\therefore EC$ 平分 $\angle DCG$，

$\therefore \angle DCE=\angle GCE$，

$\because \angle GEC=90°-\angle GCE$，$\angle DEC=90°-\angle DCE$，

$\therefore \angle GEC=\angle DEC$，

$\therefore \angle FEC=\angle FEG+\angle GEC=\frac{1}{2}\times 180°=90°$，

$\therefore \angle FEC=\angle D=90°$，

又$\because \angle DCE=\angle GCE$，

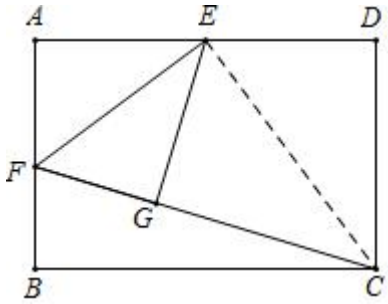
$\therefore \triangle FEC\backsim\triangle EDC$，

$\therefore \frac{FE}{DE}=\frac{EC}{DC}$，

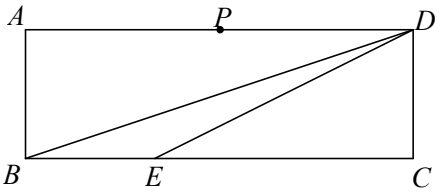
$\because EC=\sqrt{DE^2+DC^2}=\sqrt{6^2+(3\sqrt{6})^2}=3\sqrt{10}$，

$\therefore \frac{FE}{6}=\frac{3\sqrt{10}}{3\sqrt{6}}$,

$\therefore FE=2\sqrt{15}$

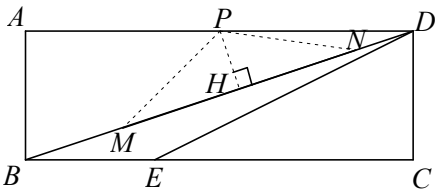


13.（2019 江苏常州）如图，在矩形 $ABCD$ 中，$AD=3AB=3\sqrt{10}$．点 P 是 AD 的中点，点 E 在 BC 上，$CE=2BE$，点 M、N 在线段 BD 上．若△PMN 是等腰三角形且底角与∠DEC 相等，则 $MN=$_____．

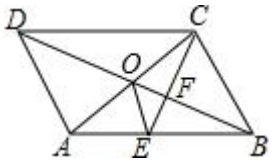


【答案】6.

【解析】本题考查了矩形的性质、相似三角形的性质与判定、等腰三角形的性质、勾股定理、锐角三角函数等几何知识点．首先由勾股定理，求得 $BD=10$，然后由“$AD=3AB=3\sqrt{10}$．点 P 是 AD 的中点，点 E 在 BC 上，$CE=2BE$”，求得 $PD=\frac{3\sqrt{10}}{2}$，$CE=2\sqrt{10}$，这样由 $\tan\angle DEC=\frac{DC}{EC}=\frac{1}{2}$；第四步过点 P 作 $PH\perp BD$ 于点 H，在 BD 上依次取点 M、N，使 $MH=NH=2PH$，于是因此△PMN 是所求符合条件的图形；第五步由△$DPH\backsim$△DBA，得 $\frac{PH}{BA}=\frac{PD}{BD}$，即 $\frac{PH}{\sqrt{10}}=\frac{\frac{3}{2}\sqrt{10}}{10}$，得 $PH=\frac{3}{2}$，于是 $MN=4PH=6$，本题答案为 6.



14.（2019•山东省滨州市）如图，$\square ABCD$ 的对角线 AC，BD 交于点 O，CE 平分 $\angle BCD$ 交 AB 于点 E，交 BD 于点 F，且 $\angle ABC=60°$，$AB=2BC$，连接 OE．下列结论：①$EO\perp AC$；②$S_{\triangle AOD}=4S_{\triangle OCF}$；③$AC:BD=\sqrt{21}:7$；④$FB^2=OF\cdot DF$．其中正确的结论有_____（填写所有正确结论的序号）



【答案】①③④．

【解析】本题考查，平行四边形的性质，角平分线的定义，解直角三角形等知识，解题的关键是灵活运用所学知识解决问题，学会利用参数解决问题，属于填空题中的压轴题．

①正确．只要证明 $EC=EA=BC$，推出 $\angle ACB=90°$，再利用三角形中位线定理即可判断．

②错误．想办法证明 $BF=2OF$，推出 $S_{\triangle BOC}=3S_{\triangle OCF}$ 即可判断．

③正确．设 $BC=BE=EC=a$，求出 AC，BD 即可判断．

④正确．求出 BF，OF，DF（用 a 表示），通过计算证明即可．

∵四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

∴$CD\parallel AB$，$OD=OB$，$OA=OC$，

∴$\angle DCB+\angle ABC=180°$，

∵$\angle ABC=60°$，

∴$\angle DCB=120°$，

∵EC 平分 $\angle DCB$，

∴$\angle ECB=\frac{1}{2}\angle DCB=60°$，

∴$\angle EBC=\angle BCE=\angle CEB=60°$，

∴$\triangle ECB$ 是等边三角形，

∴$EB=BC$，

∵$AB=2BC$，

∴$EA=EB=EC$，

∴$\angle ACB=90°$，

∵$OA=OC$，$EA=EB$，

∴$OE\parallel BC$，

∴$\angle AOE=\angle ACB=90°$，

∴$EO\perp AC$，故①正确，

∵$OE/\!/BC$，

∴△OEF∽△BCF，

∴$\frac{OE}{BC}=\frac{OF}{FB}=\frac{1}{2}$，

∴$OF=\frac{1}{3}OB$，

∴$S_{△AOD}=S_{△BOC}=3S_{△OCF}$，故②错误，

设 $BC=BE=EC=a$，则 $AB=2a$，$AC=\sqrt{3}a$，$OD=OB=\sqrt{a^2+(\frac{\sqrt{3}}{2}a)^2}=\frac{\sqrt{7}}{2}a$，

∴$BD=\sqrt{7}a$，

∴AC：$BD=\sqrt{3}a$：$\sqrt{7}a=\sqrt{21}$：7，故③正确，

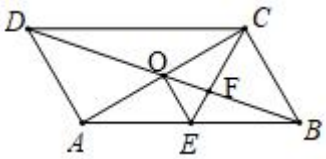
∵$OF=\frac{1}{3}OB=\frac{\sqrt{7}}{6}a$，

∴$BF=\frac{\sqrt{7}}{3}a$，

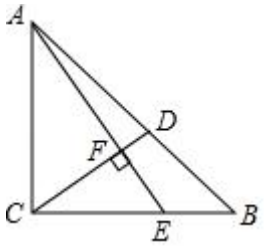
∴$BF^2=\frac{7}{9}a^2$，$OF\cdot DF=\frac{\sqrt{7}}{6}a\cdot(\frac{\sqrt{7}}{2}a+\frac{\sqrt{7}}{6}a)=\frac{7}{9}a^2$，

∴$BF^2=OF\cdot DF$，故④正确，

故答案为①③④.



15.（2019 四川泸州）如图，在等腰 Rt△ABC 中，∠C=90°，AC=15，点 E 在边 CB 上，CE=2EB，点 D 在边 AB 上，$CD\perp AE$，垂足为 F，则 AD 的长为_____.



【答案】$9\sqrt{2}$

【解析】过 D 作 $DH\perp AC$ 于 H，

∵在等腰 Rt△ABC 中，∠C=90°，AC=15，

∴$AC=BC=15$，

∴∠CAD=45°，

∴$AH=DH$，

∴$CH=15-DH$，

∵$CF\perp AE$，

∴$\angle DHA=\angle DFA=90°$，

∴$\angle HAF=\angle HDF$，

∴$\triangle ACE\backsim\triangle DHC$，

∴$\frac{DH}{AC}=\frac{CH}{CE}$，

∵$CE=2EB$，

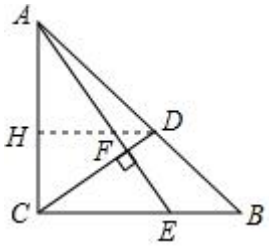
∴$CE=10$，

∴$\frac{DH}{15}=\frac{15-DH}{10}$，

∴$DH=9$，

∴$AD=9\sqrt{2}$，

故答案为：$9\sqrt{2}$.

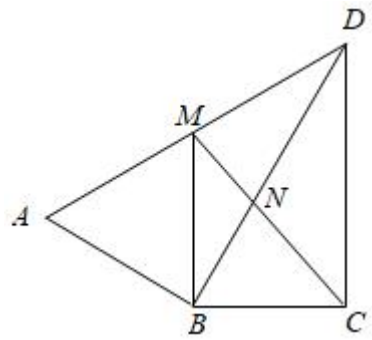


三、解答题

16.（2019•四川省凉山州）如图，$\angle ABD=\angle BCD=90°$，$DB$ 平分$\angle ADC$，过点 B 作 $BM\parallel CD$ 交 AD 于 M. 连接 CM 交 DB 于 N.

（1）求证：$BD^2=AD\cdot CD$；

（2）若 $CD=6$，$AD=8$，求 MN 的长.



【答案】见解析。

【解析】本题考查了相似三角形的判定和性质，勾股定理，直角三角形的性质，求 MC 的长度是本题的关

键.

证明：（1）通过证明△ABD∽△BCD，可得$\frac{AD}{BD}=\frac{BD}{CD}$，可得结论；

∵DB 平分∠ADC，

∴∠ADB＝∠CDB，且∠ABD＝∠BCD＝90°，

∴△ABD∽△BCD

∴$\frac{AD}{BD}=\frac{BD}{CD}$

∴$BD^2=AD\cdot CD$

（2）由平行线的性质可证∠MBD＝∠BDC，即可证 AM＝MD＝MB＝4，由 $BD^2=AD\cdot CD$ 和勾股定理可求 MC 的长，通过证明△MNB∽△CND，可得$\frac{BM}{CD}=\frac{MN}{CN}=\frac{2}{3}$，即可求 MN 的长．∵BM // CD

∴∠MBD＝∠BDC

∴∠ADB＝∠MBD，且∠ABD＝90°

∴BM＝MD，∠MAB＝∠MBA

∴BM＝MD＝AM＝4

∵$BD^2=AD\cdot CD$，且 CD＝6，AD＝8，

∴BD^2＝48，

∴$BC^2=BD^2-CD^2$＝12

∴$MC^2=MB^2+BC^2$＝28

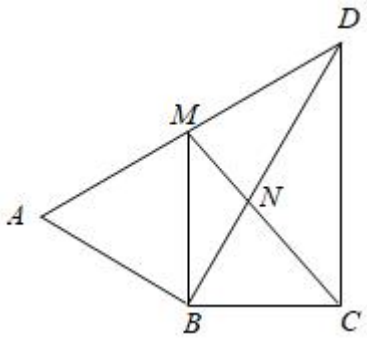
∴$MC=2\sqrt{7}$

∵BM // CD

∴△MNB∽△CND

∴$\frac{BM}{CD}=\frac{MN}{CN}=\frac{2}{3}$，且 $MC=2\sqrt{7}$

∴$MN=\frac{4}{5}\sqrt{7}$

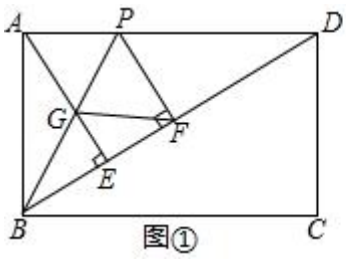


17.（2019•山东泰安）在矩形 $ABCD$ 中，$AE\perp BD$ 于点 E，点 P 是边 AD 上一点．

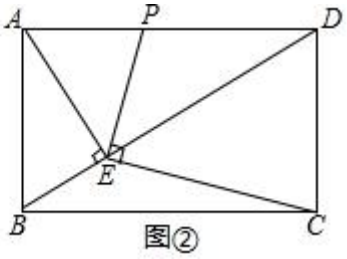
（1）若 BP 平分 $\angle ABD$，交 AE 于点 G，$PF\perp BD$ 于点 F，如图①，证明四边形 $AGFP$ 是菱形；

（2）若 $PE\perp EC$，如图②，求证：$AE\cdot AB=DE\cdot AP$；

（3）在（2）的条件下，若 $AB=1$，$BC=2$，求 AP 的长．



图①



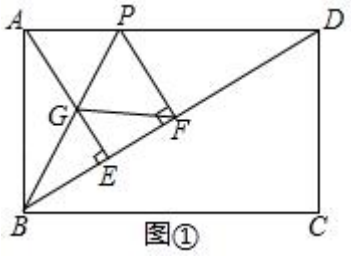
图②

【答案】见解析。

【解析】本题属于相似形综合题，考查了相似三角形的判定和性质，矩形的性质，解直角三角形等知识，解题的关键是正确寻找相似三角形解决问题，属于中考常考题型．

（1）想办法证明 $AG=PF$，$AG\parallel PF$，推出四边形 $AGFP$ 是平行四边形，再证明 $PA=PF$ 即可解决问题．

证明：如图①中，



图①

∵四边形 $ABCD$ 是矩形，

∴$\angle BAD=90°$，

∵$AE\perp BD$，

∴$\angle AED=90°$，

∴$\angle BAE+\angle EAD=90°$，$\angle EAD+\angle ADE=90°$，

∴$\angle BAE=\angle ADE$，

∵$\angle AGP=\angle BAG+\angle ABG$，$\angle APD=\angle ADE+\angle PBD$，$\angle ABG=\angle PBD$，

∴$\angle AGP=\angle APG$，

∴$AP=AG$，

∵$PA\perp AB$，$PF\perp BD$，BP 平分 $\angle ABD$，

∴$PA=PF$，

∴$PF=AG$，

∵$AE\perp BD$，$PF\perp BD$，

∴$PF/\!/AG$，

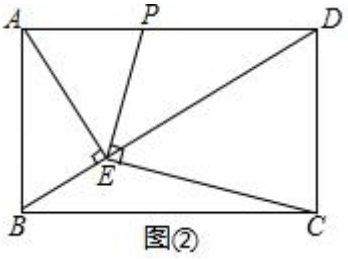
∴四边形 $AGFP$ 是平行四边形，

∵$PA=PF$，

∴四边形 $AGFP$ 是菱形．

（2）证明△$AEP\backsim$△DEC，可得$\frac{AE}{DE}=\frac{AP}{DC}$，由此即可解决问题．

证明：如图②中，



图②

∵$AE\perp BD$，$PE\perp EC$，

∴$\angle AED=\angle PEC=90°$，

∴$\angle AEP=\angle DEC$，

∵$\angle EAD+\angle ADE=90°$，$\angle ADE+\angle CDE=90°$，

∴$\angle EAP=\angle EDC$，

∴△$AEP\backsim$△DEC，

∴$\frac{AE}{DE}=\frac{AP}{DC}$，

∵$AB=CD$，

∴$AE\cdot AB=DE\cdot AP$；

（3）利用（2）中结论．求出 DE，AE 即可．

解：∵四边形 $ABCD$ 是矩形，

∴$BC=AD=2$，$\angle BAD=90°$，

∴$BD=\sqrt{AB^2+AD^2}=\sqrt{5}$，

∵$AE\perp BD$，

∴$S_{\triangle ABD}=\frac{1}{2}\cdot BD\cdot AE=\frac{1}{2}\cdot AB\cdot AD$，

∴$AE=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，

∴$DE=\sqrt{AD^2-AE^2}=\frac{4\sqrt{5}}{5}$,

∵$AE\cdot AB=DE\cdot AP$;

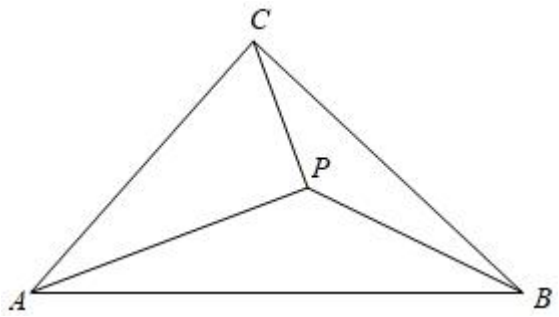
∴$AP=\frac{\frac{2\sqrt{5}}{5}\times 1}{\frac{4\sqrt{5}}{5}}=\frac{1}{2}$.

18. (2019 安徽)如图，$Rt\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=90°$，$AC=BC$，P 为$\triangle ABC$ 内部一点，且$\angle APB=\angle BPC=135°$.

（1）求证：$\triangle PAB\backsim\triangle PBC$；

（2）求证：$PA=2PC$；

（3）若点 P 到三角形的边 AB，BC，CA 的距离分别为 h_1，h_2，h_3，求证 $h_1^2=h_2\cdot h_3$.



【答案】见解析。

【解析】此题主要考查了相似三角形的判定和性质，等腰直角三角形的性质，判断出$\angle EAP=\angle PCD$ 是解本题的关键.

（1）∵$\angle ACB=90°$，$AB=BC$，

∴$\angle ABC=45°=\angle PBA+\angle PBC$

又$\angle APB=135°$，

∴$\angle PAB+\angle PBA=45°$

∴$\angle PBC=\angle PAB$

又∵$\angle APB=\angle BPC=135°$，

∴$\triangle PAB\backsim\triangle PBC$

（2）∵$\triangle PAB\backsim\triangle PBC$

∴$\frac{PA}{PB}=\frac{PB}{PC}=\frac{AB}{BC}$

在 $Rt\triangle ABC$ 中，$AB=AC$，

∴$\frac{AB}{BC}=\sqrt{2}$

∴$PB=\sqrt{2}PC$，$PA=\sqrt{2}PB$

∴$PA=2PC$

（3）如图，过点 P 作 $PD\perp BC$，$PE\perp AC$ 交 $BC.AC$ 于点 D，E，

∴$PF=h_1$，$PD=h_2$，$PE=h_3$，

∵$\angle CPB+\angle APB=135°+135°=270°$

∴$\angle APC=90°$，

∴$\angle EAP+\angle ACP=90°$，

又∵$\angle ACB=\angle ACP+\angle PCD=90°$

∴$\angle EAP=\angle PCD$，

∴$Rt\triangle AEP\backsim Rt\triangle CDP$，

∴$\frac{PE}{DP}=\frac{AP}{PC}=2$，即$\frac{h_3}{h_2}=2$，

∴$h_3=2h_2$

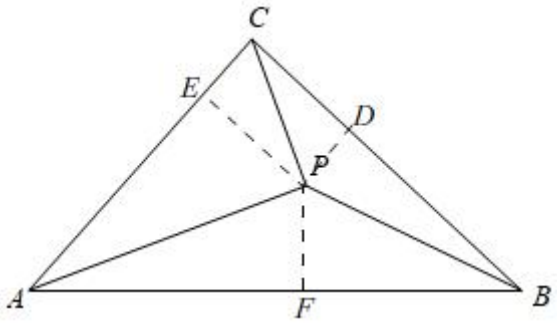
∵$\triangle PAB\backsim\triangle PBC$，

∴$\frac{h_1}{h_2}=\frac{AB}{BC}=\sqrt{2}$，

∴$h_1=\sqrt{2}h_2$

∴$h_1^{\,2}=2h_2^{\,2}=2h_2\cdot h_2=h_2h_3$.

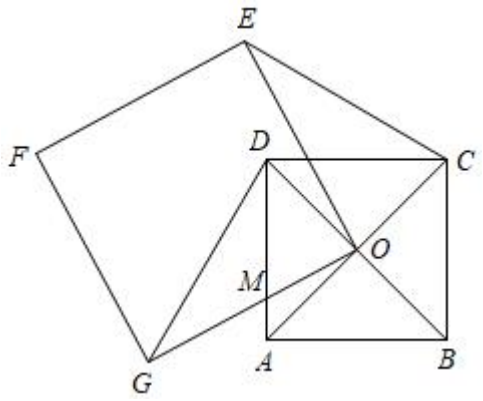
即：$h_1^2=h_2\cdot h_3$.



19.（2019 年湖南省株洲市）如图所示，已知正方形 $OEFG$ 的顶点 O 为正方形 $ABCD$ 对角线 AC、BD 的交点，连接 CE、DG.

（1）求证：$\triangle DOG\cong\triangle COE$；

（2）若 $DG\perp BD$，正方形 $ABCD$ 的边长为 2，线段 AD 与线段 OG 相交于点 M，$AM=\frac{1}{2}$，求正方形 $OEFG$ 的边长.



【答案】见解析。

【解析】由正方形 $ABCD$ 与正方形 $OEFG$，对角线 AC、BD，可得$\angle DOA=\angle DOC=90^\circ$，$\angle GOE=90^\circ$，即可证得$\angle GOD=\angle COE$，因 $DO=OC$，$GO=EO$，则可利用“边角边”即可证两三角形全等；过点 M 作 $MH\perp DO$ 交 DO 于点 H，由于$\angle MDB=45^\circ$，由可得 DH，MH 长，从而求得 HO，即可求得 MO，再通过 $MH\parallel DG$，易证得$\triangle OHM\backsim\triangle ODG$，则有$\frac{OH}{OD}=\frac{MO}{GO}$，求得 GO 即为正方形 $OEFG$ 的边长.

（1）∵正方形 $ABCD$ 与正方形 $OEFG$，对角线 AC、BD

∴$DO=OC$

∵$DB\perp AC$，

∴$\angle DOA=\angle DOC=90^\circ$

∵$\angle GOE=90^\circ$

∴$\angle GOD+\angle DOE=\angle DOE+\angle COE=90^\circ$

∴$\angle GOD=\angle COE$

∵$GO=OE$

∴在$\triangle DOG$ 和$\triangle COE$ 中

$$\begin{cases}DO=OC\\ \angle GOD=\angle COE\\ GD=OE\end{cases}$$

∴$\triangle DOG\cong\triangle COE$（$SAS$）

（2）如图，过点 M 作 $MH\perp DO$ 交 DO 于点 H

∵$AM=\frac{1}{2}$，$DA=2$

∴$DM=\frac{3}{2}$

∵$\angle MDB=45^\circ$

∴$MH=DH=\sin45^\circ\cdot DM=\frac{3\sqrt{2}}{4}$，$DO=\cos45^\circ\cdot DA=\sqrt{2}$

∴$HO=DO-DH=\sqrt{2}-\frac{3\sqrt{2}}{4}=\frac{\sqrt{2}}{4}$

∴在 Rt△MHO 中，由勾股定理得

$MO=\sqrt{MH^2+HO^2}=\sqrt{(\frac{3\sqrt{2}}{4})^2+(\frac{\sqrt{2}}{4})^2}=\frac{\sqrt{5}}{2}$

∵$DG\perp BD$，$MH\perp DO$

∴$MH/\!/DG$

∴易证△$OHM\backsim$△ODG

∴$\frac{OH}{OD}=\frac{MO}{GO}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{4}}{\sqrt{2}}=\frac{\frac{\sqrt{5}}{2}}{GO}$，得 $GO=2\sqrt{5}$

则正方形 $OEFG$ 的边长为 $2\sqrt{5}$

