专题 25　圆的问题

专题知识回顾

一、与圆有关的概念与规律

1．圆：平面上到定点的距离等于定长的所有点组成的图形叫做圆。定点称为圆心，定长称为半径。圆的半径或直径决定圆的大小，圆心决定圆的位置。

2.圆的性质：（1）圆具有旋转不变性；（2）圆具有轴对称性；（3）圆具有中心对称性。

3.垂径定理：垂直于弦的直径平分弦，并且平分弦所对的两条弧。

4．推论：平分弦（不是直径）的直径垂直于弦，并且平分弦所对的两条弧.

5．圆心角：顶点在圆心上的角叫做圆心角。圆心角的度数等于它所对弧的度数。

6．在同圆或等圆中，相等的圆心角所对的弧相等，所对的弦相等，所对的弦心距也相等。

在同圆或等圆中，如果两条弧相等，那么他们所对的圆心角相等，所对的弦相等，所对的弦心距也相等。

在同圆或等圆中，如果两条弦相等，那么他们所对的圆心角相等，所对的弧相等，所对的弦心距也相等。

7.圆周角：顶点在圆周上，并且两边分别与圆相交的角叫做圆周角。

8.在同圆或等圆中，同弧或等弧所对的圆周角相等，都等于这条弧所对的圆心角的一半.

9．半圆（或直径）所对的圆周角是直角，90°的圆周角所对的弦是直径.

10．点和圆的位置关系：

① 点在圆内 $\Leftrightarrow$ 点到圆心的距离小于半径

② 点在圆上 $\Leftrightarrow$ 点到圆心的距离等于半径

③ 点在圆外 $\Leftrightarrow$ 点到圆心的距离大于半径

11．过三点的圆：不在同一直线上的三个点确定一个圆。

12．外接圆和外心：经过三角形的三个顶点可以做一个圆，这个圆叫做三角形的外接圆。

外接圆的圆心，叫做三角形的外心。外心是三角形三条边垂直平分线的交点。外心到三角形三个顶点的距离相等。

13．若四边形的四个顶点都在同一个圆上，这个四边形叫做圆内接四边形，这个圆叫做这个四边形的外接圆。

14. 圆内接四边形的特征：

①圆内接四边形的对角互补；

②圆内接四边形任意一个外角等于它的内对角。

15.直线与圆有 3 种位置关系：

如果⊙0 的半径为 r，圆心 0 到直线 l 的距离为 d，那么

① 直线 l 和⊙0 相交 $\Leftrightarrow d < r$；

② 直线 l 和⊙0 相切 $\Leftrightarrow d = r$；

③ 直线 l 和⊙0 相离 $\Leftrightarrow d > r$。

16.和三角形三边都相切的圆叫做这个三角形的内切圆，其圆心称为内心。内心是三角形三个角的角平分线的交点。内心到三角形三边的距离相等。

17.切线的性质

（1）经过切点垂直于这条半径的直线是圆的切线。

（2）经过切点垂直于切线的直线必经过圆心。

（3）圆的切线垂直于经过切点的半径。

18.切线的判定方法：经过半径外端并且垂直于这条半径的直线是圆的切线。

19.切线长定理： 从圆外一点引圆的两条切线，它们的切线长相等，并且圆心和这一点的连线平分两条切线的夹角。

20. 设圆 O_1 的半径为 r_1，圆 O_2 的半径为 r_2，两个圆的圆心距 $d = |O_1O_2|$，则：

两圆外离 $\Leftrightarrow d > r_1 + r_2$；

两圆外切 $\Leftrightarrow d = r_1 + r_2$；

两圆相交 $\Leftrightarrow |r_1 - r_2| < d < r_1 + r_2$；

两圆内切 $\Leftrightarrow d = |r_1 - r_2|$；

两圆内含 $\Leftrightarrow d < |r_1 - r_2|$

21.圆中几个关键元素之间的相互转化

弧、弦、圆心角、圆周角等都可以通过相等来互相转化.这在圆中的证明和计算中经常用到.

22.与圆有关的公式

设圆的周长为 r，则：

（1）求圆的直径公式 d=2r

（2）求圆的周长公式 C=2πr

（3）求圆的面积公式 $S=\pi r^2$

二、解题要领

1.判定切线的方法：

（1）若切点明确，则“连半径，证垂直”。常见手法有全等转化；平行转化；直径转化；中线转化等；有时可通过计算结合相似、勾股定理证垂直；

（2）若切点不明确，则“作垂直，证半径”。常见手法有角平分线定理；等腰三角形三线合一，隐藏角平分线；

总而言之，要完成两个层次的证明：

①直线所垂直的是圆的半径（过圆上一点）；

②直线与半径的关系是互相垂直。在证明中的关键是要处理好弧、弦、角之间的相互转化,要善于进行由此及彼的联想、要总结常添加的辅助线.

2.与圆有关的计算：

计算圆中的线段长或线段比，通常与勾股定理、垂径定理与三角形的全等、相似等知识的结合，形式复杂，无规律性。分析时要重点注意观察已知线段间的关系，选择定理进行线段或者角度的转化。特别是要借助圆的相关定理进行弧、弦、角之间的相互转化，找出所求线段与已知线段的关系，从而化未知为已知，解决问题。其中重要而常见的数学思想方法有：

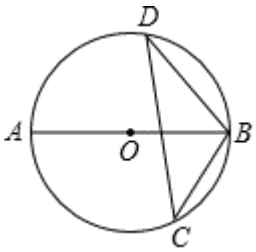
（1）构造思想：①构建矩形转化线段；②构建“射影定理”基本图研究线段（已知任意两条线段可求其它所有线段长）；③构造垂径定理模型：弦长一半、弦心距、半径；④构造勾股定理模型；⑤构造三角函数.

（2）方程思想：设出未知数表示关键线段，通过线段之间的关系，特别是发现其中的相等关系建立方程，解决问题。

（3）建模思想：借助基本图形的结论发现问题中的线段关系，把问题分解为若干基本图形的问题，通过基本图形的解题模型快速发现图形中的基本结论，进而找出隐藏的线段之间的数量关系。

专题典型题考法及解析

【例题 1】（2019•山东省滨州市）如图，AB 为⊙O 的直径，C，D 为⊙O 上两点，若∠BCD=40°，则∠ABD 的大小为（　　）

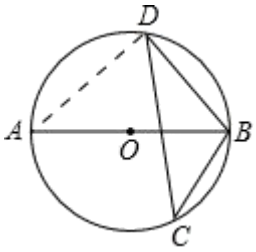


A．60°　　B．50°　　C．40°　　D．20°

【答案】B

【解析】考点是圆周角定理。本题考查的是圆周角定理，根据题意作出辅助线，构造出圆周角是解答此题的关键．连接 AD，先根据圆周角定理得出$\angle A$及$\angle ADB$的度数，再由直角三角形的性质即可得出结论．

连接 AD，

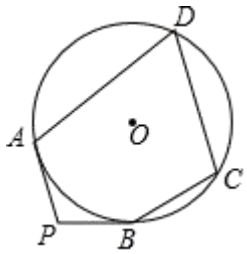


∵AB为⊙O的直径，∴$\angle ADB=90°$．

∵$\angle BCD=40°$，∴$\angle A=\angle BCD=40°$，

∴$\angle ABD=90°-40°=50°$．

【例题 2】（2019•南京）如图，PA.PB是⊙O的切线，A.B为切点，点C.D在⊙O上．若$\angle P=102°$，则$\angle A+\angle C=$_____.



【答案】219°．

【解析】连接 AB，根据切线的性质得到 $PA=PB$，根据等腰三角形的性质得到$\angle PAB=\angle PBA=\frac{1}{2}$（180°－102°）＝39°，由圆内接四边形的性质得到$\angle DAB+\angle C=180°$，于是得到结论．

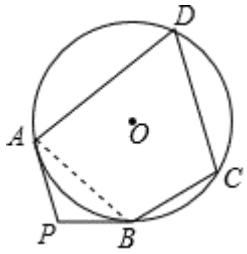
连接 AB，

∵PA.PB是⊙O的切线，∴$PA=PB$，

∵$\angle P=102°$，∴$\angle PAB=\angle PBA=\frac{1}{2}$（180°－102°）＝39°，

∵∠DAB+∠C=180°，

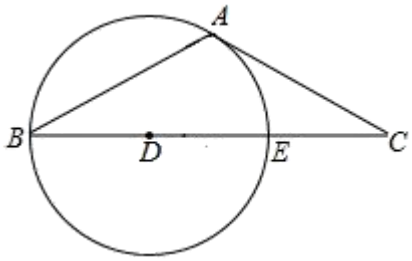
∴∠PAD+∠C=∠PAB+∠DAB+∠C=180°+39°=219°



【例题 3】（2019•甘肃武威）如图，在△ABC中，AB=AC，∠BAC=120°，点 D在 BC边上，⊙D经过点 A和点 B且与 BC边相交于点 E.

（1）求证：AC是⊙D的切线；

（2）若 CE=$2\sqrt{3}$，求⊙D的半径.



【答案】见解析。

【解析】本题考查了切线的判定和性质，等腰三角形的性质，等边三角形的判定和性质，正确的作出辅助线是解题的关键.

（1）连接 AD，根据等腰三角形的性质得到∠B=∠C=30°，∠BAD=∠B=30°，求得∠ADC=60°，根据三角形的内角和得到∠DAC=180°-60°-30°=90°，于是得到 AC是⊙D的切线；

证明：连接 AD，

∵AB=AC，∠BAC=120°，

∴∠B=∠C=30°，

∵AD=BD，∴∠BAD=∠B=30°，∴∠ADC=60°，

∴∠DAC=180°-60°-30°=90°，

∴AC是⊙D的切线；

（2）连接 AE，推出△ADE是等边三角形，得到 AE=DE，∠AED=60°，求得∠EAC=∠AED-∠C=30°，得到 AE=CE=$2\sqrt{3}$，于是得到结论.

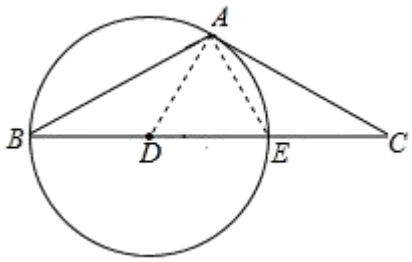
连接 AE，

∵$AD=DE$，$\angle ADE=60°$，

∴△ADE是等边三角形，∴$AE=DE$，$\angle AED=60°$，

∴$\angle EAC=\angle AED-\angle C=30°$，∴$\angle EAC=\angle C$，

∴$AE=CE=2\sqrt{3}$，∴⊙D的半径$AD=2\sqrt{3}$.

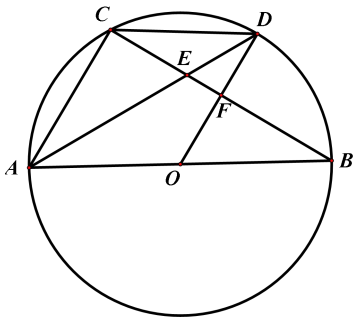


【例题 4】（2019•江苏苏州）如图，AE为⊙O的直径，D是弧BC的中点BC与AD，OD分别交于点E，F.

（1）求证：$DO/\!/AC$；

（2）求证：$DE\cdot DA=DC^2$；

（3）若$\tan\angle CAD=\dfrac{1}{2}$，求$\sin\angle CDA$的值.



【答案】见解析。

【解析】（1）证明：∵D为弧BC的中点，OD为⊙O的半径

∴$OD\perp BC$

又∵AB为⊙O的直径

∴$\angle ACB=90°$ ∴$AC/\!/OD$

（2）证明：∵D为弧BC的中点

∴$\overset{\frown}{CD}=\overset{\frown}{BD}$ ∴$\angle DCB=\angle DAC$ ∴$\Delta DCE\backsim\Delta DAC$

∴$\dfrac{DC}{DA}=\dfrac{DE}{DC}$，即$DE\cdot DA=DC^2$

（3）解：∵$\Delta DCE\backsim\Delta DAC$，$\tan\angle CAD=\dfrac{1}{2}$

∴$\dfrac{CD}{DA}=\dfrac{DE}{DC}=\dfrac{CE}{AC}=\dfrac{1}{2}$

设 $CD=2a$，则 $DE=a$，$DA=4a$

又∵ $AC//OD$ ∴ $\Delta AEC\backsim DEF$

∴ $\frac{CE}{EF}=\frac{AE}{DE}=3$，所以 $BC=\frac{8}{3}CE$

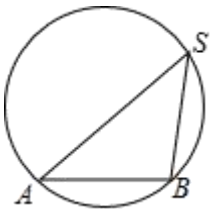
又 $AC=2CE$，∴ $AB=\frac{10}{3}CE$

即 $\sin\angle CDA=\sin\angle CBA=\frac{CA}{AB}=\frac{3}{5}$

专题典型训练题

一、选择题

1．(2019 甘肃陇南)如图，点 A，B，S 在圆上，若弦 AB 的长度等于圆半径的$\sqrt{2}$倍，则$\angle ASB$ 的度数是（　　）



A．22.5°　　B．30°　　C．45°　　D．60°

【答案】C.

【解析】本题考查了圆周角定理：在同圆或等圆中，同弧或等弧所对的圆周角相等，都等于这条弧所对的圆心角的一半.

设圆心为 0，连接 OA. OB，如图，先证明△OAB 为等腰直角三角形得到$\angle AOB$=90°，然后根据圆周角定理确定$\angle ASB$ 的度数.

设圆心为 O，连接 OA. OB，如图，

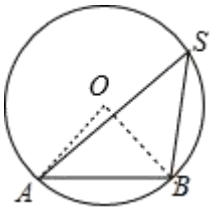
∵弦 AB 的长度等于圆半径的$\sqrt{2}$倍，

即 AB=$\sqrt{2}OA$，

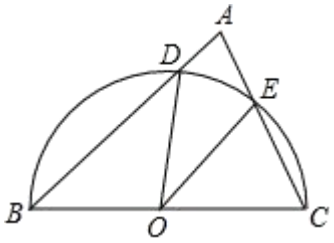
∴$OA^2+OB^2=AB^2$，

∴△OAB 为等腰直角三角形，$\angle AOB$=90°，

∴$\angle ASB$=$\frac{1}{2}\angle AOB$=45°.



2.（2019•山东省聊城市）如图，BC是半圆O的直径，D，E是$\overset{\frown}{BC}$上两点，连接BD，CE并延长交于点A，连接OD，OE．如果$\angle A=70°$，那么$\angle DOE$的度数为（　　）



A．35°　　B．38°　　C．40°　　D．42°

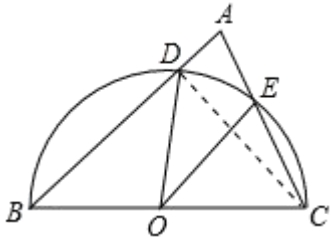
【答案】C.

【解析】考点是圆周角定理、直角三角形的性质。连接CD，由圆周角定理得出$\angle BDC=90°$，求出$\angle ACD=90°-\angle A=20°$，再由圆周角定理得出$\angle DOE=2\angle ACD=40°$即可，

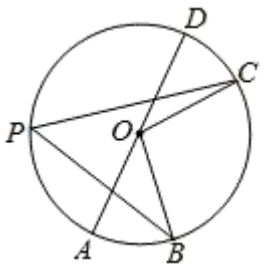
连接CD，如图所示：

∵BC是半圆O的直径，∴$\angle BDC=90°$，∴$\angle ADC=90°$，

∴$\angle ACD=90°-\angle A=20°$，∴$\angle DOE=2\angle ACD=40°$



3.（2019•广西贵港）如图，AD是⊙O的直径，$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{CD}$，若$\angle AOB=40°$，则圆周角$\angle BPC$的度数是（　　）



A．40°　　B．50°　　C．60°　　D．70°

【答案】B.

【解析】根据圆周角定理即可求出答案.

∵$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{CD}$，∠$AOB$=40°，

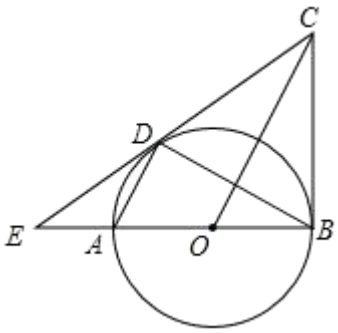
∴∠COD=∠AOB=40°，

∵∠AOB+∠BOC+∠COD=180°，

∴∠BOC=100°，

∴∠$BPC=\frac{1}{2}$∠BOC=50°

4.（2019•湖北天门）如图，AB为⊙O的直径，BC为⊙O的切线，弦AD// OC，直线CD交BA的延长线于点E，连接BD．下列结论：①CD是⊙O的切线；②CO⊥DB；③△EDA∽△EBD；④ED•BC=BO•BE．其中正确结论的个数有（　　）



A．4个　　B．3个　　C．2个　　D．1个

【答案】A

【解析】本题主要考查了切线的判定、全等三角形的判定与性质以及相似三角形的判定与性质，注意掌握辅助线的作法，注意数形结合思想的应用是解答此题的关键．

连结DO.

∵AB为⊙O的直径，BC为⊙O的切线，∴∠CBO=90°，

∵AD// OC，∴∠DAO=∠COB，∠ADO=∠COD.

又∵OA=OD，∴∠DAO=∠ADO，∴∠COD=∠COB.

在△COD和△COB中，$\begin{cases}CO=DO\\ \angle COD=\angle COB,\\ OD=OB\end{cases}$

∴△COD≌△COB（SAS），

∴∠CDO=∠CBO=90°．

又∵点D在⊙O上，

∴CD是⊙O的切线；故①正确，

∵△*COD*≌△*COB*，∴*CD*＝*CB*，

∵*OD*＝*OB*，∴*CO*垂直平分 *DB*，

即 *CO*⊥*DB*，故②正确；

∵*AB*为⊙*O*的直径，*DC*为⊙*O*的切线，∴∠*EDO*＝∠*ADB*＝90°，

∴∠*EDA*+∠*ADO*＝∠*BDO*+∠*ADO*＝90°，∴∠*ADE*＝∠*BDO*，

∵*OD*＝*OB*，∴∠*ODB*＝∠*OBD*，∴∠*EDA*＝∠*DBE*，

∵∠*E*＝∠*E*，∴△*EDA*∽△*EBD*，故③正确；

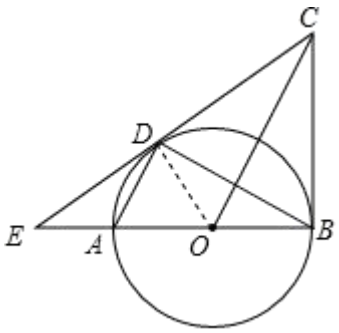
∵∠*EDO*＝∠*EBC*＝90°，∠*E*＝∠*E*，

∴△*EOD*∽△*ECB*，

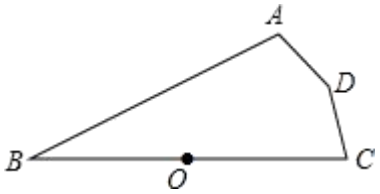
∴$\frac{ED}{BE}=\frac{OD}{BC}$，

∵*OD*＝*OB*，

∴*ED*•*BC*＝*BO*•*BE*，故④正确.



5.（2019•山东省德州市 ）如图，点 *O*为线段 *BC*的中点，点 *A*，*C*，*D*到点 *O*的距离相等，若∠*ABC*＝40°，则∠*ADC*的度数是（　　）



A．130°　　B．140°　　C．150°　　D．160°

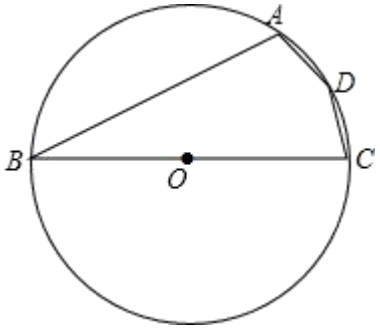
【答案】B.

【解析】根据题意得到四边形 *ABCD*共圆，利用圆内接四边形对角互补即可求出所求角的度数．由题意得到 *OA*＝*OB*＝*OC*＝*OD*，作出圆 *O*，如图所示，

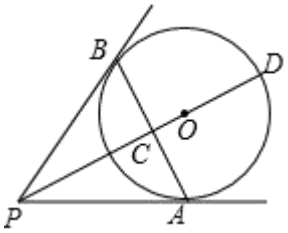
∴四边形 *ABCD*为圆 *O*的内接四边形，

∴∠*ABC*+∠*ADC*＝180°，

∵∠ABC=40°，∴∠ADC=140°



6.（2019 湖南益阳）如图，PA、PB为圆O的切线，切点分别为A、B，PO交AB于点C，PO的延长线交圆O于点D，下列结论不一定成立的是（　　）



A．PA=PB　　B．∠BPD=∠APD　　C．AB⊥PD　　D．AB平分PD

【答案】D.

【解析】本题考查了切线的性质：圆的切线垂直于经过切点的半径．也考查了切线长定理、垂径定理和等腰三角形的性质．

先根据切线长定理得到PA=PB，∠APD=∠BPD；再根据等腰三角形的性质得OP⊥AB，根据菱形的性质，只有当AD//PB，BD//PA时，AB平分PD，由此可判断D不一定成立．

∵PA，PB是⊙O的切线，

∴PA=PB，所以A成立；

∠BPD=∠APD，所以B成立；

∴AB⊥PD，所以C成立；

∵PA，PB是⊙O的切线，

∴AB⊥PD，且AC=BC，

只有当AD//PB，BD//PA时，AB平分PD，所以D不一定成立．

7.（2019•广东广州）平面内，⊙O的半径为1，点P到O的距离为2，过点P可作⊙O的切线条数为（　　）

A．0条　　B．1条　　C．2条　　D．无数条

【答案】C.

【解析】此题主要考查了对点与圆的位置关系，切线的定义，切线就是与圆有且只有1个公共点的直线，

理解定义是关键.

先确定点与圆的位置关系，再根据切线的定义即可直接得出答案.

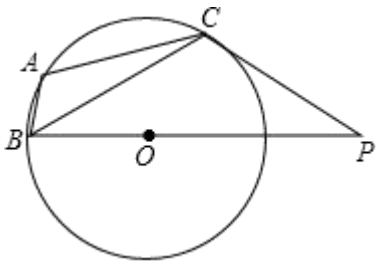
∵⊙O的半径为 1，点 P到圆心 O的距离为 2，

∴$d>r$，

∴点 P与⊙O的位置关系是：P在⊙O外，

∵过圆外一点可以作圆的 2 条切线。

8.（2019•山东泰安）如图，△ABC是⊙O的内接三角形，$\angle A=119°$，过点 C的圆的切线交 BO于点 P，则 $\angle P$的度数为（　　）



A．32°　　B．31°　　C．29°　　D．61°

【答案】A.

【解析】连接 OC、CD，由切线的性质得出$\angle OCP=90°$，由圆内接四边形的性质得出$\angle ODC=180°-\angle A=61°$，由等腰三角形的性质得出$\angle OCD=\angle ODC=61°$，求出$\angle DOC=58°$，由直角三角形的性质即可得出结果.

如图所示：连接 OC、CD，

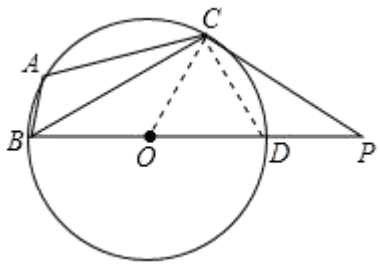
∵PC是⊙O的切线，∴$PC\perp OC$，∴$\angle OCP=90°$，

∵$\angle A=119°$，∴$\angle ODC=180°-\angle A=61°$，

∵$OC=OD$，∴$\angle OCD=\angle ODC=61°$，

∴$\angle DOC=180°-2\times 61°=58°$，

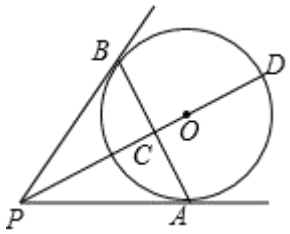
∴$\angle P=90°-\angle DOC=32°$



9.（2019•湖南益阳）如图，PA、PB为圆 O的切线，切点分别为 A、B，PO交 AB于点 C，PO的延长线交圆 O

于点 D，下列结论不一定成立的是(　　)

A．$PA=PB$　　B．$\angle BPD=\angle APD$　　C．$AB\perp PD$　　D．AB 平分 PD



【答案】D

【解析】先根据切线长定理得到 $PA=PB$，$\angle APD=\angle BPD$；再根据等腰三角形的性质得 $OP\perp AB$，根据菱形的性质，只有当 $AD// PB$，$BD// PA$ 时，AB 平分 PD，由此可判断 D 不一定成立．

∵PA，PB 是⊙O 的切线，∴$PA=PB$，所以 A 成立；

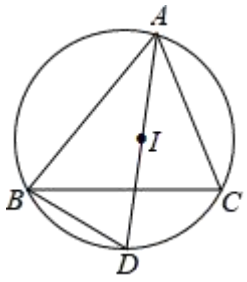
$\angle BPD=\angle APD$，所以 B 成立；

∴$AB\perp PD$，所以 C 成立；

∵PA，PB 是⊙O 的切线，∴$AB\perp PD$，且 $AC=BC$，

只有当 $AD// PB$，$BD// PA$ 时，AB 平分 PD，所以 D 不一定成立．故选 D．

10．(2019 湖北荆门)如图，△ABC 内心为 I，连接 AI 并延长交△ABC 的外接圆于 D，则线段 DI 与 DB 的关系是(　　)



A．$DI=DB$　　B．$DI>DB$　　C．$DI<DB$　　D．不确定

【答案】A．

【解析】本题考查了三角形的内切圆与内心：三角形的内心到三角形三边的距离相等；三角形的内心与三角形顶点的连线平分这个内角．也考查了三角形的外接圆和圆周角定理．

连接 BI，如图，根据三角形内心的性质得∠1＝∠2，∠5＝∠6，再根据圆周角定理得到∠3＝∠1，然后利用三角形外角性质和角度的代换证明∠4＝∠DBI，从而可判断 $DI=DB$．

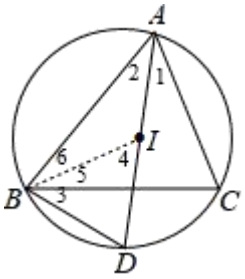
连接 BI，如图，

∵△ABC 内心为 I，∴∠1＝∠2，∠5＝∠6，

∵∠3＝∠1，∴∠3＝∠2，

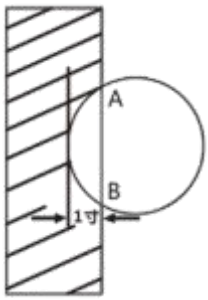
∵∠4＝∠2+∠6＝∠3+∠5，

即∠4＝∠*DBI*，∴*DI*＝*DB*.



二、填空题

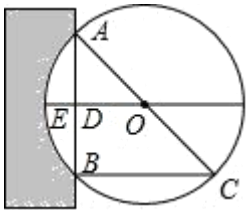
11.（2019 广西北部湾）《九章算术》作为古代中国乃至东方的第一部自成体系的数学专著，与古希腊的《几何原本》并称现代数学的两大源泉.在《九章算术》中记载有一问题：“今有圆材埋在壁中，不知大小。以锯锯之，深一寸，锯道长一尺，问径几何？”小辉同学根据原文题意，画出圆材截面图如图所示，已知：锯口深为 1 寸，锯道 AB=1 尺（1 尺=10 寸），则该圆材的直径为_____寸.



【答案】26.

【解析】本题考查垂径定理、勾股定理等知识，设⊙O 的半径为 r. 在 Rt△ADO 中，AD=5，OD=r−1，OA=r，则有 $r^2=5^2+(r-1)^2$，解方程即可.

设⊙O 的半径为 r.



在 Rt△ADO 中，AD=5，OD=r−1，OA=r，

则有 $r^2=5^2+(r-1)^2$，

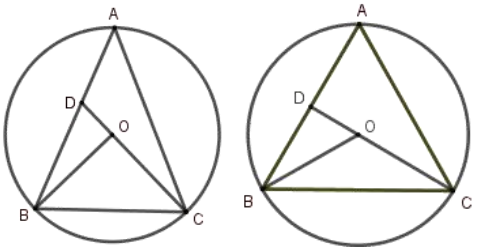
解得 r=13，

∴⊙O 的直径为 26 寸。

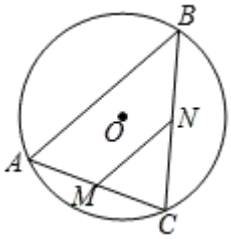
12. （2019 黑龙江绥化）半径为 5 的⊙O 是锐角三角形 ABC 的外接圆，AB＝AC，连接 OB，OC，延长 CO 交弦 AB 于点 D．若△OBD 是直角三角形，则弦 BC 的长为_____．

【答案】 $5\sqrt{3}$或$5\sqrt{2}$

【解析】∵△OBD 为直角三角形，∴分类讨论：如图，当∠BOD＝90°时，∠BOC＝90°，在 Rt△BOC 中，BO＝OC＝5，∴BC＝$5\sqrt{2}$；当∠ODB＝90°时，∵OB＝OC，设∠OBC＝∠OCB＝x，∴∠BOD＝2x，∠BOC＝180°－2x，∴∠ABO＝90°－2x，∠ABC＝∠ACB＝90°－x，∴∠A＝2x，∵∠BOC＝2∠A，即 180－2x＝2×2x，∴x＝30°，∴∠BOC＝120°，∵OB＝OC＝5，∴BC＝$5\sqrt{3}$．综上所述，BC 的长度为$5\sqrt{3}$或$5\sqrt{2}$



13. （2019 山东东营）如图，*AC*是⊙*O*的弦，*AC*=5，点 *B*是⊙*O* 上的一个动点，且∠*ABC*=45°，若点 *M*、*N* 分别是*AC*、*BC*的中点，则*MN*的最大值是_____．



【答案】 $\frac{5\sqrt{2}}{2}$

【解析】∵MN 是△ABC 的中位线，∴MN=$\frac{1}{2}$AB．

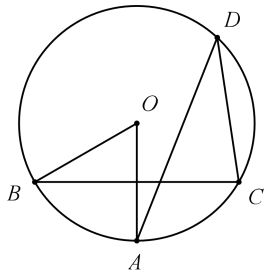
当 AB 为⊙O 的直径时，AB 有最大值，则 MN 有最大值．

当 AB 为直径时，∠ACB=90°，

∵∠*ABC*=45°，*AC*=5，∴AB=$5\sqrt{2}$，

∴MN=$\frac{5\sqrt{2}}{2}$．

14.（2019 黑龙江省龙东地区）如图，在⊙*O*中，半径 *OA* 垂直于弦 *BC*，点 *D*在圆上，且∠*ADC*＝30°，则∠*AOB*的度数为_____．

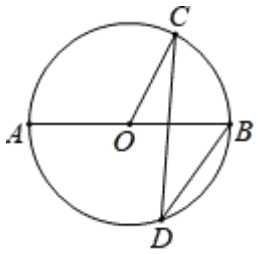


【答案】60°.

【解析】∵$OA\perp BC$，∴$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{AC}$，∴$\angle AOB=2\angle ADC$，

∵$\angle ADC=30°$，∴$\angle AOB=60°$.

15.（2019 江苏常州）如图，AB是⊙O的直径，C、D是⊙O上的两点，$\angle AOC=120°$，则$\angle CDB=$_____°.

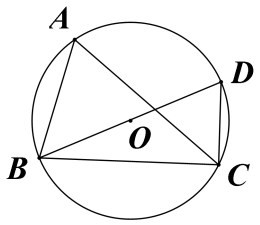


【答案】30

【解析】∵$\angle BOC=180°-\angle AOC=180°-120°=60°$，

∴$\angle CDB=\frac{1}{2}\angle BOC=30°$.

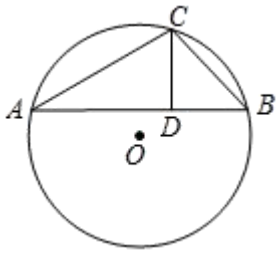
16.（2019 四川省雅安市）如图，△ABC 内接于⊙O，BD 是⊙O 的直径，∠CBD=21°，则 ∠A 的度数为_____.



【答案】69°

【解析】∵BD 是⊙O 的直径，∴∠BCD=90°，∵∠CBD=21°，∴∠D=69°，∴∠A=∠D=69°.

17.（2019 安徽）如图，△ABC内接于⊙O，$\angle CAB=30°$，$\angle CBA=45°$，$CD\perp AB$于点D，若⊙O的半径为 2，则CD的长为_____.



【答案】$\sqrt{2}$.

【解析】本题考查了三角形的外接圆与外心，圆周角定理，等腰直角三角形的性质，正确的作出辅助线是解题的关键.

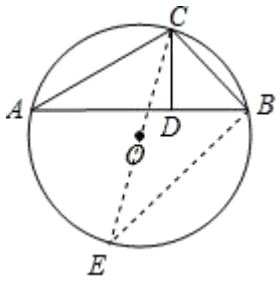
连接 CO 并延长交⊙O 于 E，连接 BE，于是得到∠E＝∠A＝30°，∠EBC＝90°，解直角三角形即可得到结论.

连接 CO 并延长交⊙O 于 E，连接 BE，

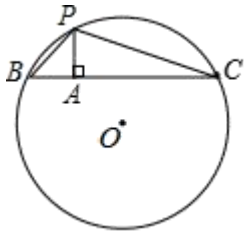
则∠E＝∠A＝30°，∠EBC＝90°，

∵⊙O 的半径为 2，∴CE＝4，∴$BC=\frac{1}{2}CE$＝2，

∵$CD\perp AB$，∠CBA＝45°，∴$CD=\frac{\sqrt{2}}{2}BC=\sqrt{2}$



18.（2019•江苏泰州）如图，⊙O 的半径为 5，点 P 在⊙O 上，点 A 在⊙O 内，且 AP＝3，过点 A 作 AP 的垂线交⊙O 于点 B.C．设 PB＝x，PC＝y，则 y 与 x 的函数表达式为_____.



【答案】$y=\frac{10}{3}x$.

【解析】连接 PO 并延长交⊙O 于 D，连接 BD，根据圆周角定理得到∠C＝∠D，∠PBD＝90°，求得∠PAC＝∠PBD，根据相似三角形的性质即可得到结论.

连接 PO 并延长交⊙O 于 D，连接 BD，

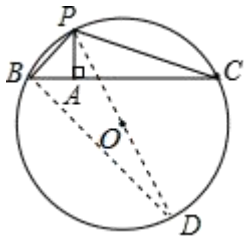
则∠C=∠D，∠PBD=90°，

∵PA⊥BC，∴∠PAC=90°，∴∠PAC=∠PBD，

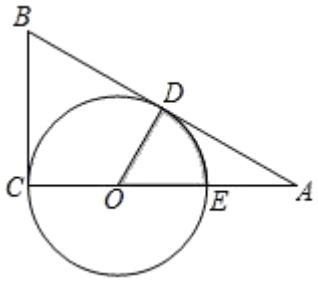
∴△PAC∽△PBD，∴$\frac{PB}{PA}=\frac{PC}{PD}$，

∵⊙O的半径为5，AP=3，PB=x，PC=y，

∴$\frac{x}{3}=\frac{y}{10}$，∴$y=\frac{10}{3}x$



19.（2019•山东省济宁市）如图，O为 Rt△ ABC 直角边 AC 上一点，以 OC 为半径的⊙O 与斜边 AB 相切于点 D，交 OA 于点 E，已知 $BC=\sqrt{3}$，$AC=3$．则图中阴影部分的面积是_____．



【答案】$\frac{\pi}{6}$．

【解析】本题考查了切线的性质定理、切线长定理以及勾股定理的运用，熟记和圆有关的各种性质定理是解题的关键．

在 Rt△ ABC 中，∵$BC=\sqrt{3}$，$AC=3$．

∴$AB=\sqrt{AC^2+BC^2}=2\sqrt{3}$，

∵BC⊥OC，∴BC 是圆的切线，

∵⊙O 与斜边 AB 相切于点 D，∴BD=BC，

∴AD=AB-BD=$2\sqrt{3}-\sqrt{3}=\sqrt{3}$；

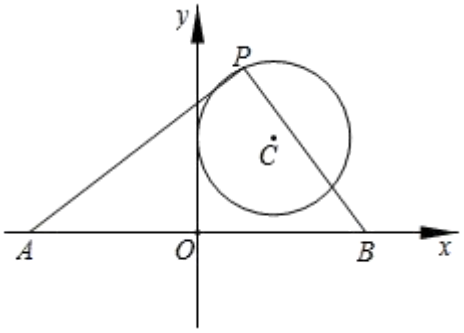
在Rt△ ABC 中，∵$\sin A=\frac{BC}{AB}=\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}=\frac{1}{2}$，∴$\angle A=30°$，

∵⊙O 与斜边 AB 相切于点 D，∴$OD\perp AB$，∴$\angle AOD=90°-\angle A=60°$，

∵$\frac{OD}{AD}=\tan A=\tan 30°$，∴$\frac{OD}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，∴$OD=1$，

∴S 阴影$=\frac{60\pi\times 1^2}{360}=\frac{\pi}{6}$.

20.（2019•湖北省鄂州市）如图，在平面直角坐标系中，已知 C（3，4），以点 C 为圆心的圆与 y 轴相切．点 A、B 在 x 轴上，且 $OA=OB$．点 P 为⊙C 上的动点，$\angle APB=90°$，则 AB 长度的最大值为_____.



【答案】16.

【解析】连接 OC 并延长，交⊙C 上一点 P，以 O 为圆心，以 OP 为半径作⊙O，交 x 轴于 A、B，此时 AB 的长度最大，

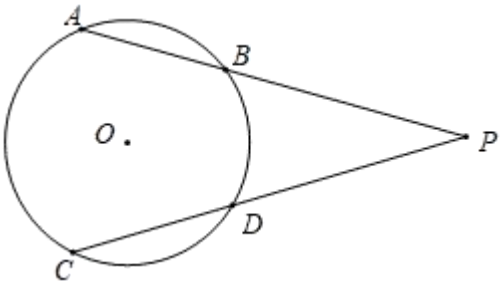
∵C（3，4），∴$OC=\sqrt{3^2+4^2}=5$，

∵以点 C 为圆心的圆与 y 轴相切．∴⊙C 的半径为 3，∴$OP=OA=OB=8$，

∵AB 是直径，∴$\angle APB=90°$，∴AB 长度的最大值为 16。

三、解答题

21.（2019•南京）如图，⊙O 的弦 AB.CD 的延长线相交于点 P，且 $AB=CD$．求证：$PA=PC$.



【答案】见解析。

【解析】本题考查了圆心角、弧、弦的关系，圆周角定理，等腰三角形的判定等，熟练掌握性质定理是解

题的关键.

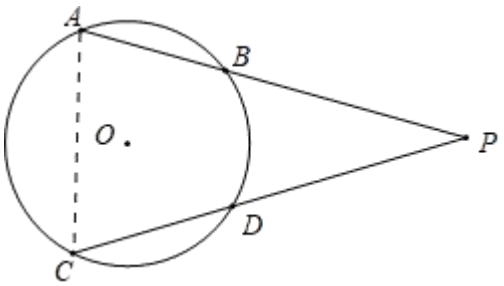
连接 AC，由圆心角、弧、弦的关系得出$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{CD}$，进而得出$\overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{CB}$，根据等弧所对的圆周角相等得出$\angle C=\angle A$，根据等角对等边证得结论.

证明：连接 AC，

$\because AB=CD$，$\therefore \overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{CD}$，

$\therefore \overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{BD}=\overset{\frown}{BD}+\overset{\frown}{CD}$，即$\overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{CB}$，

$\therefore \angle C=\angle A$，$\therefore PA=PC$.



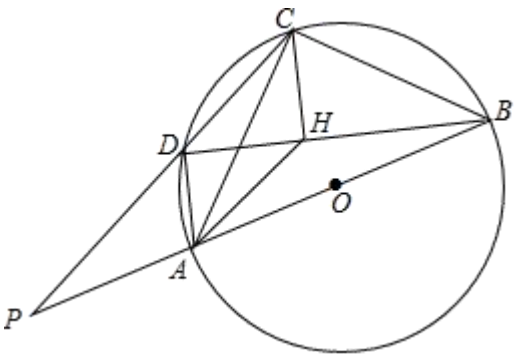
22.（2019•湖南株洲）四边形 $ABCD$ 是⊙O 的圆内接四边形，线段 AB 是⊙O 的直径，连结 AC.BD．点 H 是线段 BD 上的一点，连结 AH、CH，且$\angle ACH=\angle CBD$，$AD=CH$，BA 的延长线与 CD 的延长线相交与点 P.

（1）求证：四边形 $ADCH$ 是平行四边形；

（2）若 $AC=BC$，$PB=\sqrt{5}PD$，$AB+CD=2(\sqrt{5}+1)$

①求证：△DHC 为等腰直角三角形；

②求 CH 的长度.



【答案】见解析。

【解析】本题是圆的综合题，考查了圆的有关知识，平行四边形的判定和性质，相似三角形的判定和性质等知识，求 CD 的长度是本题的关键.

（1）由圆周角的定理可得$\angle DBC=\angle DAC=\angle ACH$，可证 $AD/\!/CH$，由一组对边平行且相等的是四边形是平行

四边形可证四边形 $ADCH$ 是平行四边形；

（2）①由平行线的性质可证 $\angle ADH=\angle CHD=90°$，由 $\angle CDB=\angle CAB=45°$，可证 $\triangle DH$ 为等腰直角三角形；

②通过证明 $\triangle ADP\backsim\triangle CBP$，可得 $\frac{AD}{BC}=\frac{PD}{PB}$，可得 $\frac{CH}{BC}=\frac{1}{\sqrt{5}}$，通过证明 $\triangle CHD\backsim\triangle ACB$，可得 $\frac{CD}{AB}=\frac{CH}{BC}=\frac{1}{\sqrt{5}}$，可得 $AB=\sqrt{5}CD$，可求 $CD=2$，由等腰直角三角形的性质可求 CH 的长度.

证明：（1）$\because\angle DBC=\angle DAC$，$\angle ACH=\angle CBD$

$\therefore\angle DAC=\angle ACH$，$\therefore AD// CH$，且 $AD=CH$

$\therefore$四边形 $ADCH$ 是平行四边形

（2）①$\because AB$ 是直径

$\therefore\angle ACB=90°=\angle ADB$，且 $AC=BC$

$\therefore\angle CAB=\angle ABC=45°$，$\therefore\angle CDB=\angle CAB=45°$

$\because AD// CH$

$\therefore\angle ADH=\angle CHD=90°$，且 $\angle CDB=45°$

$\therefore\angle CDB=\angle DCH=45°$，$\therefore CH=DH$，且 $\angle CHD=90°$

$\therefore\triangle DHC$ 为等腰直角三角形；

②$\because$四边形 $ABCD$ 是 $\odot O$ 的圆内接四边形，

$\therefore\angle ADP=\angle PBC$，且 $\angle P=\angle P$，$\therefore\triangle ADP\backsim\triangle CBP$

$\therefore\frac{AD}{BC}=\frac{PD}{PB}$，且 $PB=\sqrt{5}PD$，

$\therefore\frac{AD}{BC}=\frac{1}{\sqrt{5}}$，$AD=CH$，$\therefore\frac{CH}{BC}=\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\because\angle CDB=\angle CAB=45°$，$\angle CHD=\angle ACB=90°$ $\therefore\triangle CHD\backsim\triangle ACB$

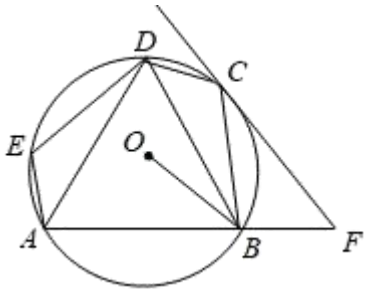
$\therefore\frac{CD}{AB}=\frac{CH}{BC}=\frac{1}{\sqrt{5}}$，$\therefore AB=\sqrt{5}CD$

$\because AB+CD=2(\sqrt{5}+1)$，$\therefore\sqrt{5}CD+CD=2(\sqrt{5}+1)$

$\therefore CD=2$，且 $\triangle DHC$ 为等腰直角三角形，$\therefore CH=\sqrt{2}$

23.（2019▪广西池河）如图，五边形 $ABCDE$ 内接于 $\odot O$，CF 与 $\odot O$ 相切于点 C，交 AB 延长线于点 F.

（1）若 $AE=DC$，$\angle E=\angle BCD$，求证：$DE=BC$；（2）若 $OB=2$，$AB=BD=DA$，$\angle F=45°$，求 CF 的长.



【答案】见解析。

【解析】（1）由圆心角、弧、弦之间的关系得出$\overset{\frown}{AE}=\overset{\frown}{DC}$，由圆周角定理得出∠*ADE*＝∠*DBC*，证明△*ADE*≌△*DBC*，即可得出结论；

证明：∵*AE*＝*DC*，∴$\overset{\frown}{AE}=\overset{\frown}{DC}$，∴∠*ADE*＝∠*DBC*，

在△*ADE*和△*DBC*中，$\begin{cases}\angle ADE=\angle DBC\\ \angle E=\angle BCD\\ AE=DC\end{cases}$，

∴△*ADE*≌△*DBC*（*AAS*），∴*DE*＝*BC*；

（2）连接*CO*并延长交*AB*于*G*，作*OH*⊥*AB*于*H*，则∠*OHG*＝∠*OHB*＝90°，由切线的性质得出∠*FCG*＝90°，得出△*CFG*、△*OGH*是等腰直角三角形，得出*CF*＝*CG*，*OG*＝$\sqrt{2}$*OH*，由等边三角形的性质得出∠*OBH*＝30°，由直角三角形的性质得出*OH*＝$\frac{1}{2}$*OB*＝1，*OG*＝$\sqrt{2}$，即可得出答案．

连接*CO*并延长交*AB*于*G*，作*OH*⊥*AB*于*H*，如图所示：

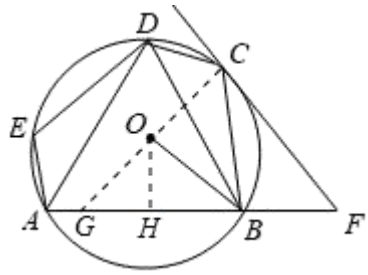
则∠*OHG*＝∠*OHB*＝90°，

∵*CF*与⊙*O*相切于点*C*，∴∠*FCG*＝90°，

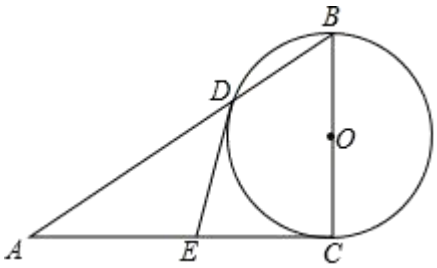
∵∠*F*＝45°，∴△*CFG*、△*OGH*是等腰直角三角形，∴*CF*＝*CG*，*OG*＝$\sqrt{2}$*OH*，

∵*AB*＝*BD*＝*DA*，∴△*ABD*是等边三角形，∴∠*ABD*＝60°，∴∠*OBH*＝30°，

∴*OH*＝$\frac{1}{2}$*OB*＝1，∴*OG*＝$\sqrt{2}$，∴*CF*＝*CG*＝*OC*+*OG*＝2+$\sqrt{2}$.



24.（2019•甘肃）如图，在*Rt*△*ABC*中，∠*C*＝90°，以*BC*为直径的⊙*O*交*AB*于点*D*，切线*DE*交*AC*于点*E*.（1）求证：∠*A*＝∠*ADE*；（2）若*AD*＝8，*DE*＝5，求*BC*的长.



【答案】见解析。

【解析】本题考查切线的性质、勾股定理、等腰三角形的判定和性质等知识，解题的关键是灵活运用所学知识解决问题，属于中考常考题型.

（1）只要证明∠A+∠B=90°，∠ADE+∠B=90°即可解决问题。

证明：连接OD，

∵DE是切线，∴∠ODE=90°，∴∠ADE+∠BDO=90°，

∵∠ACB=90°，∴∠A+∠B=90°，

∵OD=OB，∴∠B=∠BDO，∴∠ADE=∠A.

（2）首先证明AC=2DE=10，在Rt△ADC中，DC=6，设BD=x，在Rt△BDC中，BC^2=x^2+6^2，在Rt△ABC中，BC^2=（x+8）^{2}-10^2，可得x^2+6^2=（x+8）^{2}-10^2，解方程即可解决问题．连接CD.

∵∠ADE=∠A，∴AE=DE，

∵BC是⊙O的直径，∠ACB=90°，∴EC是⊙O的切线，∴ED=EC，∴AE=EC，

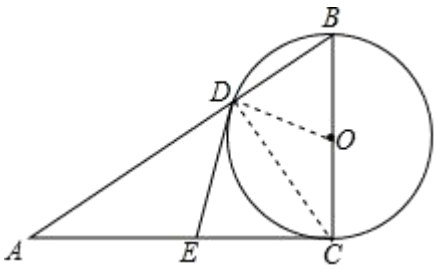
∵DE=5，∴AC=2DE=10，

在Rt△ADC中，DC=6，

设BD=x，在Rt△BDC中，BC^2=x^2+6^2，在Rt△ABC中，BC^2=（x+8）^{2}-10^2，

∴x^2+6^2=（x+8）^{2}-10^2，解得x=$\frac{9}{2}$，

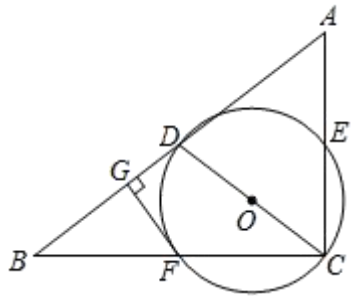
∴BC=$\sqrt{6^2+(\frac{9}{2})^2}$=$\frac{15}{2}$.



25.（2019•湖北省咸宁市）如图，在Rt△ABC中，∠ACB=90°，D为AB的中点，以CD为直径的⊙O分别交AC，BC于点E，F两点，过点F作FG⊥AB于点G.

（1）试判断 FG 与⊙O 的位置关系，并说明理由．

（2）若 $AC=3$，$CD=2.5$，求 FG 的长．



【答案】见解析。

【解析】（1）如图，连接 OF，根据直角三角形的性质得到 $CD=BD$，得到∠DBC=∠DCB，根据等腰三角形的性质得到∠OFC=∠OCF，得到∠OFC=∠DBC，推出∠OFG=90°，于是得到结论。FG 与⊙O 相切，

理由：如图，连接 OF，

∵∠ACB=90°，D 为 AB 的中点，∴$CD=BD$，∴∠DBC=∠DCB，

∵$OF=OC$，∴∠OFC=∠OCF，∴∠OFC=∠DBC，∴OF∥DB，∴∠OFG+∠DGF=180°，

∵FG⊥AB，∴∠DGF=90°，∴∠OFG=90°，∴FG 与⊙O 相切。

（2）连接 DF，根据勾股定理得到 $BC=\sqrt{AB^2-AC^2}=4$，根据圆周角定理得到∠DFC=90°，根据三角函数的定义即可得到结论．连接 DF，

∵$CD=2.5$，∴$AB=2CD=5$，∴$BC=\sqrt{AB^2-AC^2}=4$，

∵CD 为⊙O 的直径，∴∠DFC=90°，∴FD⊥BC，

∵$DB=DC$，∴$BF=\frac{1}{2}BC=2$，

∵$sin∠ABC=\frac{AC}{AB}=\frac{FG}{FB}$，

即$\frac{3}{5}=\frac{FG}{2}$，∴$FG=\frac{6}{5}$．

