专题 26 与弧长、扇形面积有关的问题

专题知识回顾

1.扇形弧长面积公式

（1）弧长的计算公式

$$l=\frac{n}{360}\cdot 2\pi r=\frac{n\pi r}{180}$$

（2）扇形面积计算公式

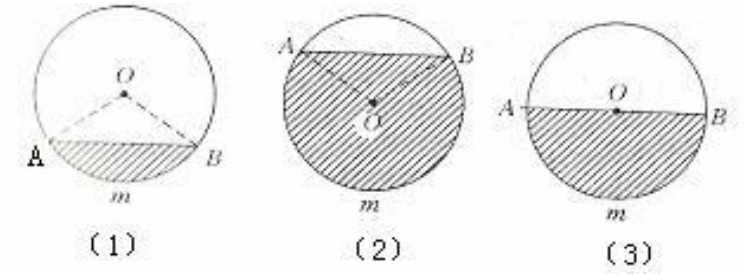
$$s=\frac{n}{360}\cdot \pi r^2 \quad 或 s=\frac{1}{2}lr$$

2.弓形的面积

（1）弓形的定义：由弦及其所对的弧（包括劣弧、优弧、半圆）组成的图形叫做弓形。

（2）弓形的周长＝弦长＋弧长

（3）弓形的面积



当弓形所含的弧是劣弧时，如图 1 所示，$S_{弓形}=S_{扇形OAmB}-S_{\triangle AOB}$

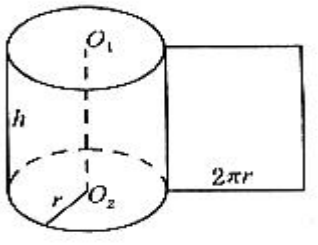
当弓形所含的弧是优弧时，如图 2 所示，$S_{弓形}=S_{扇形OAmB}+S_{\triangle AOB}$

当弓形所含的弧是半圆时，如图 3 所示，$S_{弓形}=\frac{1}{2}S_{半圆}$

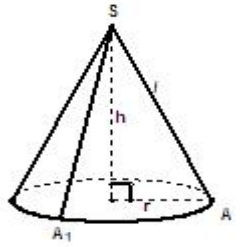
3．圆柱侧面积体积公式

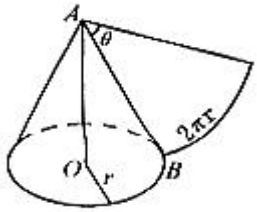
（1）圆柱的侧面积公式 $S_{侧}=2\pi rh$

（2）圆柱的表面积公式：$S_{表}=S_{底}\times 2+S_{侧}=2\pi r^2+2\pi r\ h$



4.圆锥侧面积体积公式





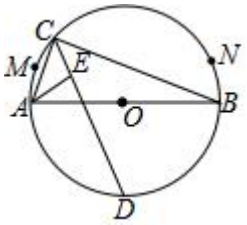
（1）圆锥侧面积计算公式

从右图中可以看出，圆锥的母线即为扇形的半径，而圆锥底面的周长是扇形的弧长，这样，圆锥侧面积计算公式:$S_{圆锥侧}=S_{扇形}=\pi rl$

（2）圆锥全面积计算公式:$S_{圆锥全}=S_{圆锥侧}+S_{圆锥底面}=\pi rl+\pi r^2=\pi r(l+r)$

专题典型题考法及解析

【例题 1】（2019•湖北武汉）如图，AB是⊙O的直径，M、N是$\overset{\frown}{AB}$（异于 A.B）上两点，C是$\overset{\frown}{MN}$上一动点，$\angle ACB$的角平分线交⊙O于点 D，$\angle BAC$的平分线交 CD于点 E．当点 C从点 M运动到点 N时，则 C.E两点的运动路径长的比是（　　）

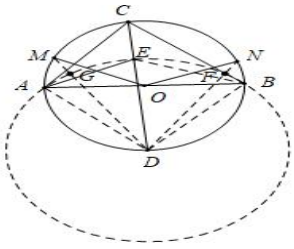


A．$\sqrt{2}$　　B．$\frac{\pi}{2}$　　C．$\frac{3}{2}$　　D．$\frac{\sqrt{5}}{2}$

【答案】A.

【解析】如图，连接 EB．设 $OA=r$．易知点 E在以 D为圆心 DA为半径的圆上，运动轨迹是$\overset{\frown}{GF}$，点 C的运动轨迹是$\overset{\frown}{MN}$，由题意$\angle MON=2\angle GDF$，设$\angle GDF=\alpha$，则$\angle MON=2\alpha$，利用弧长公式计算即可解决问题．

如图，连接 EB．设 $OA=r$．



∵AB是直径，

∴$\angle ACB=90°$，

∵E是$\triangle ACB$的内心，

∴$\angle AEB=135°$，

∵$\angle ACD=\angle BCD$，

∴$\overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{DB}$，

∴$AD=DB=\sqrt{2}r$，

∴$\angle ADB=90°$，

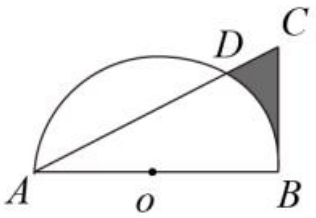
易知点E在以D为圆心DA为半径的圆上，运动轨迹是$\overset{\frown}{GF}$，点C的运动轨迹是$\overset{\frown}{MN}$，

∵$\angle MON=2\angle GDF$，设$\angle GDF=\alpha$，则$\angle MON=2\alpha$

$$\therefore \frac{\overset{\frown}{MN}\text{的长}}{\overset{\frown}{GF}\text{的长}}=\frac{\frac{2\alpha\cdot\pi\cdot r}{180}}{\frac{\alpha\cdot\pi\cdot\sqrt{2}r}{180}}=\sqrt{2}.$$

【例题2】(2019山西）如图，在$Rt\triangle ABC$中，$\angle ABC=90°$，$AB=2\sqrt{3}$，$BC=2$，以AB的中点为圆心，OA的长为半径作半圆交AC于点D，则图中阴影部分的面积为（　　）

A. $\frac{5\sqrt{3}}{4}-\frac{\pi}{2}$　　B. $\frac{5\sqrt{3}}{4}+\frac{\pi}{2}$　　C. $2\sqrt{3}-\pi$　　D. $4\sqrt{3}-\frac{\pi}{2}$



【答案】A

【解析】作$DE\perp AB$于点E，连接OD，在$Rt\triangle ABC$中：

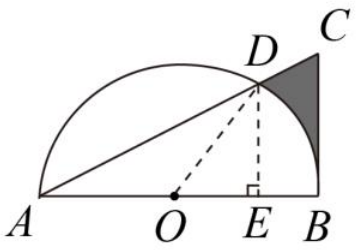
$$\tan\angle CAB=\frac{BC}{AB}=\frac{2}{2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3},$$

∴$\angle CAB=30°$，$\angle BOD=2\angle CAB=60°$.

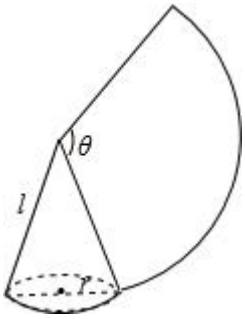
在$Rt\triangle ODE$中：$OE=\frac{1}{2}OD=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$DE=\sqrt{3}OE=\frac{3}{2}$.

$S_{阴影}=S_{\triangle ABC}-S_{\triangle AOD}-S_{扇形BOD}=\frac{1}{2}\cdot AB\cdot BC-\frac{1}{2}\cdot OD\cdot DE-\frac{60°}{360°}\cdot\pi\cdot OB^2$

$=\frac{1}{2}\times2\sqrt{3}\times2-\frac{1}{2}\times\sqrt{3}\times\frac{3}{2}-\frac{60°}{360°}\times\pi\times(\sqrt{3})^2=\frac{5\sqrt{3}}{4}-\frac{\pi}{2}$，故选 A



【例题 3】（2019 • 贵州安顺）如图，沿一条母线将圆锥侧面剪开并展平，得到一个扇形，若圆锥的底面圆的半径 $r=2$，扇形的圆心角 $\theta=120°$，则该圆锥母线 l 的长为_____.



【答案】6

【解析】根据题意得 $2\pi\times2=\frac{120\cdot\pi\cdot l}{180}$，

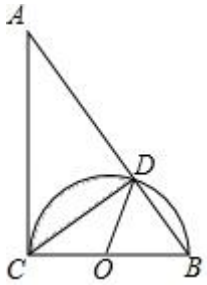
解德 $l=6$，

即该圆锥母线 l 的长为 6.

专题典型训练题

一. 选择题

1.（2019•四川省广安市）如图，在 $Rt\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=90°$，$\angle A=30°$，$BC=4$，以 BC 为直径的半圆 O 交斜边 AB 于点 D，则图中阴影部分的面积为（　　）



A. $\frac{4}{3}\pi-\sqrt{3}$　　B. $\frac{2}{3}\pi-\frac{\sqrt{3}}{2}$　　C. $\frac{1}{3}\pi-\frac{\sqrt{3}}{2}$　　D. $\frac{1}{3}\pi-\sqrt{3}$

【答案】A.

【解析】本题考查扇形面积公式、直角三角形的性质、解题的关键是学会分割法求面积，中考常考题型.根据三角形的内角和得到$\angle B=60°$，根据圆周角定理得到$\angle COD=120°$，$\angle CDB=90°$，根据扇形和三角形的面积公式即可得到结论.

∵在$Rt\triangle ABC$中，$\angle ACB=90°$，$\angle A=30°$，

∴$\angle B=60°$，

∴$\angle COD=120°$，

∵$BC=4$，BC为半圆O的直径，

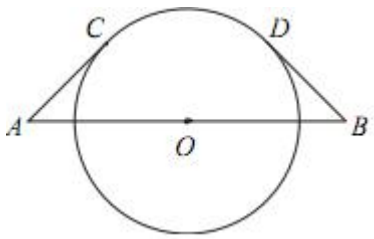
∴$\angle CDB=90°$，

∴$OC=OD=2$，

∴$CD=\frac{\sqrt{3}}{2}BC=2\sqrt{3}$，

图中阴影部分的面积$=S_{扇形COD}-S_{\triangle COD}=\frac{120\cdot\pi\times2^2}{360}-\frac{1}{2}\times2\sqrt{3}\times1=\frac{4\pi}{3}-\sqrt{3}$。

2.（2019•山东青岛）如图，线段AB经过⊙O的圆心，AC，BD分别与⊙O相切于点C，D．若$AC=BD=4$，$\angle A=45°$，则$\overset{\frown}{CD}$的长度为（　　）



A. π　　B. 2π　　C. $2\sqrt{2}\pi$　　D. 4π

【答案】B.

【解析】连接OC、OD，根据切线性质和$\angle A=45°$，易证得$\triangle AOC$和$\triangle BOD$是等腰直角三角形，进而求得$OC=OD=4$，$\angle COD=90°$，根据弧长公式求得即可.

连接 OC、OD，

∵AC，BD 分别与⊙O 相切于点 C，D．

∴$OC\perp AC$，$OD\perp BD$，

∵$\angle A=45°$，

∴$\angle AOC=45°$，

∴$AC=OC=4$，

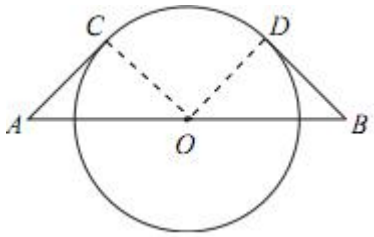
∵$AC=BD=4$，$OC=OD=4$，

∴$OD=BD$，

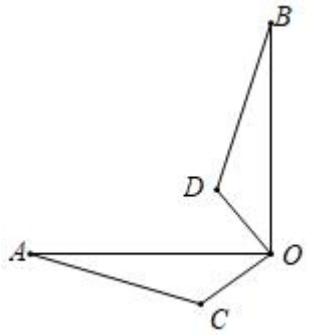
∴$\angle BOD=45°$，

∴$\angle COD=180°-45°-45°=90°$，

∴$\overset{\frown}{CD}$的长度为：$\frac{90\pi\times4}{180}=2\pi$。



3.（2019•四川省凉山州）如图，在△AOC 中，$OA=3cm$，$OC=1cm$，将△AOC 绕点 O 顺时针旋转 90° 后得到△BOD，则 AC 边在旋转过程中所扫过的图形的面积为（　　）cm^2．



A．$\frac{\pi}{2}$　　B．2π　　C．$\frac{17}{8}\pi$　　D．$\frac{19}{8}\pi$

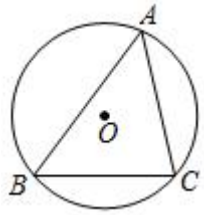
【答案】B

【解析】根据旋转的性质可以得到阴影部分的面积＝扇形 OAB 的面积－扇形 OCD 的面积，利用扇形的面积公式即可求解．

∵△$AOC\cong$△BOD，

∴阴影部分的面积＝扇形 OAB 的面积－扇形 OCD 的面积＝$\frac{90\cdot\pi\times3^2}{360}-\frac{90\cdot\pi\times1^2}{360}=2\pi$，故选：B．

4.（2019•浙江绍兴）如图，△ABC内接于⊙O，∠B=65°，∠C=70°．若$BC=2\sqrt{2}$，则$\overset{\frown}{BC}$的长为（　　）



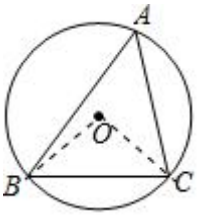
A．π　　B．$\sqrt{2}\pi$　　C．2π　　D．$2\sqrt{2}\pi$

【答案】A

【解析】本题考查圆周角定理，弧长公式，等腰直角三角形的性质的等知识，解题的关键是熟练掌握基本知识，属于中考常考题型．

连接OB，OC．首先证明△OBC是等腰直角三角形，求出OB即可解决问题．

连接OB，OC．



∵∠A=180°－∠ABC－∠ACB=180°－65°－70°=45°，

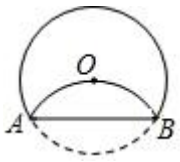
∴∠BOC=90°，

∵$BC=2\sqrt{2}$，

∴$OB=OC=2$，

∴$\overset{\frown}{BC}$的长为$\frac{90\cdot\pi\cdot 2^2}{360}=\pi$

5.（2019•山东泰安）如图所示，将⊙O沿弦AB折叠，$\overset{\frown}{AB}$恰好经过圆心O，若⊙O的半径为3，则$\overset{\frown}{AB}$的长为（　　）



A．$\frac{1}{2}\pi$　　B．π　　C．2π　　D．3π

【答案】C

【解析】连接OA、OB，作$OC\perp AB$于C，根据翻转变换的性质得到$OC=\frac{1}{2}OA$，根据等腰三角形的性质、三角形内角和定理求出∠AOB，根据弧长公式计算即可．

连接OA、OB，作$OC\perp AB$于C，

由题意得，$OC=\frac{1}{2}OA$，

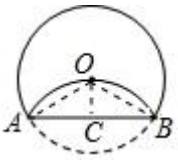
∴∠OAC=30°，

∵$OA=OB$，

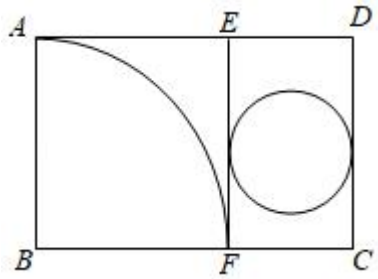
∴∠OBA=∠OAC=30°，

∴∠AOB=120°，

∴$\overset{\frown}{AB}$的长$=\frac{120\pi\times3}{180}=2\pi$



6.（2019•浙江宁波）如图所示，矩形纸片 $ABCD$ 中，$AD=6cm$，把它分割成正方形纸片 $ABFE$ 和矩形纸片 $EFCD$ 后，分别裁出扇形 ABF 和半径最大的圆，恰好能作为一个圆锥的侧面和底面，则 AB 的长为（　　）



A．3.5cm　　B．4cm　　C．4.5cm　　D．5cm

【答案】B

【解析】本题考查了圆锥的计算，矩形的性质，正确理解圆锥的侧面展开图与原来的扇形之间的关系是解决本题的关键，理解圆锥的母线长是扇形的半径，圆锥的底面圆周长是扇形的弧长．

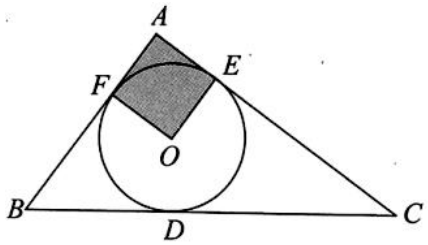
设 $AB=xcm$，则 $DE=（6-x）cm$，根据扇形的弧长等于圆锥底面圆的周长列出方程，求解即可．

根据题意，得$\frac{90\pi x}{180}=\pi（6-x）$，

解得 $x=4$．

7.(2019•云南)如图，△ABC 的内切圆⊙O 与 BC、CA、AB 分别相切于点 D、E、F，且 $AB=5$，$BC=13$，$CA=12$，则阴影部分(即四边形 $AEOF$)的面积是(　　)

A．4　　B．6.25　　C．7.5　　D．9



【答案】A

【解析】此题主要考查了已知直角三角形三边的长，如何求其内切圆的半径．由切线长定理可知 $Rt\triangle ABC$（a、b 为直角边，c 为斜边）的内切圆半径 $r=\frac{1}{2}(a+b-c)$，也可根据面积公式求直角三角形内切圆的半径．

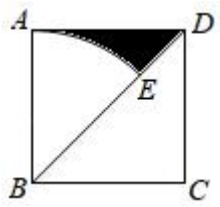
∵$AB=5$，$BC=13$，$CA=12$，∴$AB^2+AC^2=BC^2$，∴$\triangle ABC$ 为直角三角形，且$\angle A=90°$，

∵$\odot O$ 为$\triangle ABC$ 内切圆，∴$\angle AFO=\angle AEO=90°$，且 $AE=AF$，∴四边形 $AEOF$ 为正方形，设$\odot O$ 的半径为 r，则 $OE=OF=AE=AF=r$，∴$BD=BF=AB-r$，$CD=CE=AC-r$，

∴$BC=BD+CD=AB-r+AC-r$，∴$r=\frac{1}{2}(AB+AC-BC)=2$，

∴$S_{四边形AEOF}=r^2=4$，故选 A．

8.（2019 山东枣庄）如图，在边长为 4 的正方形 $ABCD$ 中，以点 B 为圆心，AB 为半径画弧，交对角线 BD 于点 E，则图中阴影部分的面积是（结果保留 π）（　　）



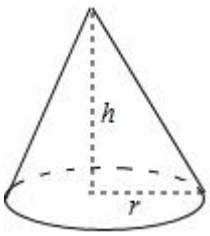
A．$8-\pi$　　B．$16-2\pi$　　C．$8-2\pi$　　D．$8-\frac{1}{2}\pi$

【答案】C

【解析】本题考查扇形的面积的计算，正方形的性质等知识，解题的关键是学会用分割法求阴影部分面积．根据 $S_{阴}=S_{\triangle ABD}-S_{扇形BAE}$ 计算即可．

$S_{阴}=S_{\triangle ABD}-S_{扇形BAE}=\frac{1}{2}\times4\times4-\frac{45\cdot\pi\cdot4^2}{360}=8-2\pi$

9.（2019 四川巴中）如图，圆锥的底面半径 $r=6$，高 $h=8$，则圆锥的侧面积是（　　）



A．15π　　B．30π　　C．45π　　D．60π

【答案】D

【解析】圆锥的侧面积：$S_{侧}=\frac{1}{2}\cdot 2\pi r\cdot l=\pi rl$，求出圆锥的母线 l 即可解决问题．

圆锥的母线 $l=\sqrt{h^2+r^2}=\sqrt{6^2+8^2}=10$，

∴圆锥的侧面积＝$\pi\cdot 10\cdot 6=60\pi$。

二．填空题

10．（2019•湖北省鄂州市）一个圆锥的底面半径 $r=5$，高 $h=10$，则这个圆锥的侧面积是____．

【答案】$25\sqrt{5}\pi$．

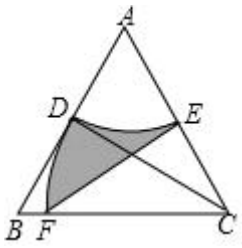
【解析】利用勾股定理易得圆锥的母线长，进而利用圆锥的侧面积＝π×底面半径×母线长，把相应数值代入即可求解．

∵圆锥的底面半径 $r=5$，高 $h=10$，

∴圆锥的母线长为$\sqrt{5^2+10^2}=5\sqrt{5}$，

∴圆锥的侧面积为$\pi\times 5\sqrt{5}\times 5=25\sqrt{5}\pi$。

11．（2019•湖北省荆门市）如图，等边三角形 ABC 的边长为 2，以 A 为圆心，1 为半径作圆分别交 AB，AC 边于 D，E，再以点 C 为圆心，CD 长为半径作圆交 BC 边于 F，连接 E，F，那么图中阴影部分的面积为_____．



【答案】$\frac{\pi}{12}+\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{4}$．

【解答】过 A 作 $AM\perp BC$ 于 M，$EN\perp BC$ 于 N，

∵等边三角形 ABC 的边长为 2，$\angle BAC=\angle B=\angle ACB=60°$，

∴$AM=\frac{\sqrt{3}}{2}BC=\frac{\sqrt{3}}{2}\times 2=\sqrt{3}$，

∵$AD=AE=1$，

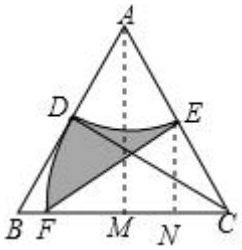
∴$AD=BD$，$AE=CE$，

∴$EN=\frac{1}{2}AM=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

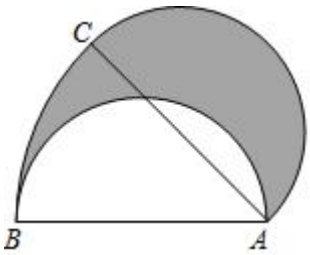
∴图中阴影部分的面积＝$S_{\triangle ABC}-S_{扇形\ ADE}-S_{\triangle CEF}-(S_{\triangle BCD}-S_{扇形\ DCF})$

$=\frac{1}{2}\times2\times\sqrt{3}-\frac{60\cdot\pi\times1}{360}-\frac{1}{2}\times\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}-\left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times2\times\sqrt{3}-\frac{30\cdot\pi\times3}{360}\right)$

$=\frac{\pi}{12}+\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{4}$



12.（2019•湖北十堰）如图，AB为半圆的直径，且$AB=6$，将半圆绕点A顺时针旋转60°，点B旋转到点C的位置，则图中阴影部分的面积为_____.



【答案】6π.

【解析】根据图形可知，阴影部分的面积是半圆的面积与扇形ABC的面积之和减去半圆的面积．由图可得，图中阴影部分的面积为：$\frac{60\times\pi\times6^2}{360}+\frac{\pi\times(6\div2)^2}{2}-\frac{\pi\times(6\div2)^2}{2}=6\pi$

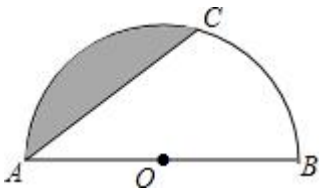
13.（2019•湖北天门）75°的圆心角所对的弧长是$2.5\pi cm$，则此弧所在圆的半径是__6__cm.

【答案】6

【解析】由弧长公式：$l=\frac{n\pi R}{180}$计算.

由题意得：圆的半径$R=180\times2.5\pi\div(75\pi)=6cm$.

14.（2019•湖北省咸宁市）如图，半圆的直径$AB=6$，点C在半圆上，$\angle BAC=30°$，则阴影部分的面积为（结果保留π）.



【答案】$3\pi-\frac{9\sqrt{3}}{4}$.

【解析】根据题意，作出合适的辅助线，即可求得CD和$\angle COB$的度数，即可得到阴影部分的面积是半圆的

面积减去△AOC和扇形BOC的面积.

连接OC.BC，作$CD\perp AB$于点D，

∵直径$AB=6$，点C在半圆上，$\angle BAC=30°$，

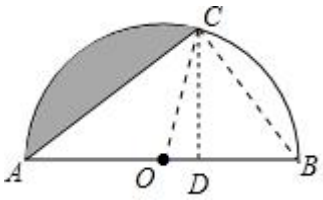
∴$\angle ACB=90°$，$\angle COB=60°$，

∴$AC=3\sqrt{3}$，

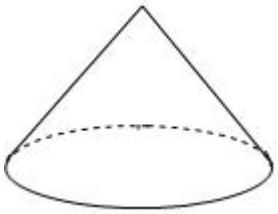
∵$\angle CDA=90°$，

∴$CD=\frac{3\sqrt{3}}{2}$，

∴阴影部分的面积是：$\frac{\pi\cdot 3^2}{2}-\frac{3\times\frac{3\sqrt{3}}{2}}{2}-\frac{60\times\pi\times 3^2}{360}=3\pi-\frac{9\sqrt{3}}{4}$，



15.（2019•广东广州）如图放置的一个圆锥，它的主视图是直角边长为2的等腰直角三角形，则该圆锥侧面展开扇形的弧长为_____.（结果保留π）



【答案】$2\sqrt{2}\pi$.

【解析】根据圆锥侧面展开扇形的弧长＝底面圆的周长即可解决问题.

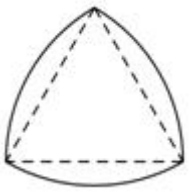
∵某圆锥的主视图是一个腰长为2的等腰直角三角形，

∴斜边长为$2\sqrt{2}$，

则底面圆的周长为$2\sqrt{2}\pi$，

∴该圆锥侧面展开扇形的弧长为$2\sqrt{2}\pi$。

16.（2019•江苏泰州）如图，分别以正三角形的3个顶点为圆心，边长为半径画弧，三段弧围成的图形称为莱洛三角形．若正三角形边长为6cm，则该莱洛三角形的周长为_____cm.

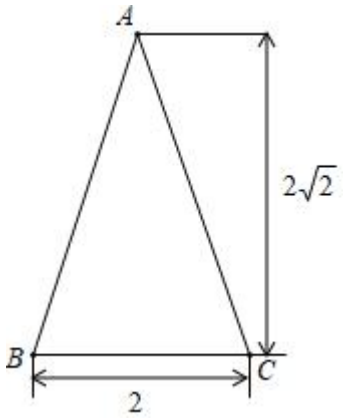


【答案】6π.

【解析】本题考查了弧长公式：$l=\frac{n\cdot\pi\cdot R}{180}$（弧长为 l，圆心角度数为 n，圆的半径为 R）．也考查了等边三角形的性质．直接利用弧长公式计算即可．

该莱洛三角形的周长＝$3\times\frac{60\times\pi\times6}{180}$＝6π（$cm$）．

17.（2019•山东省聊城市）如图是一个圆锥的主视图，根据图中标出的数据（单位：cm），计算这个圆锥侧面展开图圆心角的度数为_____.



【答案】120°．

【解析】根据圆锥的底面半径得到圆锥的底面周长，也就是圆锥的侧面展开图的弧长，根据勾股定理得到圆锥的母线长，利用弧长公式可求得圆锥的侧面展开图中扇形的圆心角．

∵圆锥的底面半径为 1，

∴圆锥的底面周长为 2π，

∵圆锥的高是 $2\sqrt{2}$，

∴圆锥的母线长为 3，

设扇形的圆心角为 n°，

∴$\frac{n\pi\times3}{180}$＝2π，

解得 n＝120.

即圆锥的侧面展开图中扇形的圆心角为 120°．

18. （2019•黑龙江省齐齐哈尔市）将圆心角为 216°，半径为 5cm 的扇形围成一个圆锥的侧面，那么围成

的这个圆锥的高为_____cm.

【答案】4

【解析】设圆锥的底面圆的半径为 r，

根据题意得 $2\pi r=\frac{216\pi\times5}{180}$，解得 $r=3$，

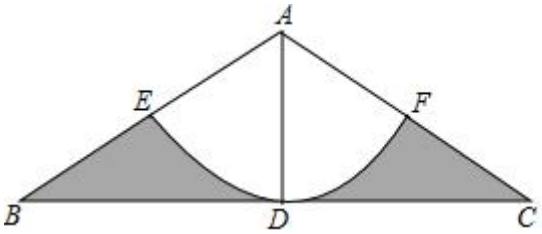
所以圆锥的高 $=\sqrt{5^2-3^2}=4$（cm）.

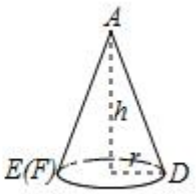
三、解答题

19.（2019•湖南邵阳）如图，在等腰△ABC中，$\angle BAC=120°$，AD是$\angle BAC$的角平分线，且$AD=6$，以点A为圆心，AD长为半径画弧EF，交AB于点E，交AC于点F.

（1）求由弧EF及线段FC.CB.BE围成图形（图中阴影部分）的面积；

（2）将阴影部分剪掉，余下扇形AEF，将扇形AEF围成一个圆锥的侧面，AE与AF正好重合，圆锥侧面无重叠，求这个圆锥的高h.





【答案】见解析。

【解析】（1）利用等腰三角形的性质得到$AD\perp BC$，$BD=CD$，则可计算出$BD=6\sqrt{3}$，然后利用扇形的面积公式，利用由弧EF及线段FC.CB.BE围成图形（图中阴影部分）的面积$=S_{\triangle ABC}-S_{扇形EAF}$进行计算；

∵在等腰△ABC中，$\angle BAC=120°$，

∴$\angle B=30°$，

∵AD是$\angle BAC$的角平分线，

∴$AD\perp BC$，$BD=CD$，

∴$BD=\sqrt{3}AD=6\sqrt{3}$，

∴$BC=2BD=12\sqrt{3}$，

∴由弧EF及线段FC.CB.BE围成图形（图中阴影部分）的面积

$S=S_{\triangle ABC}-S_{扇形EAF}=\frac{1}{2}\times6\times12\sqrt{3}-\frac{120\cdot\pi\cdot6^2}{360}=36\sqrt{3}-12\pi$；

（2）设圆锥的底面圆的半径为r，利用圆锥的侧面展开图为一扇形，这个扇形的弧长等于圆锥底面的周长，扇形的半径等于圆锥的母线长和弧长公式得到$2\pi r=\frac{120\cdot\pi\cdot6}{180}$，解得$r=2$，然后利用勾股定理计算这个

圆锥的高 h.

根据题意得 $2\pi r=\frac{120\cdot\pi\cdot 6}{180}$，解得 $r=2$，

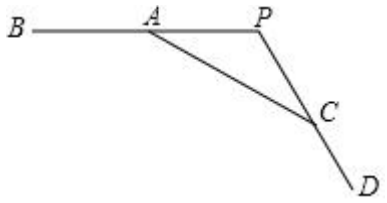
这个圆锥的高 $h=\sqrt{6^2-2^2}=4\sqrt{2}$.

20.（2019•山东省德州市）如图，$\angle BPD=120°$，点 A.C 分别在射线 PB.PD 上，$\angle PAC=30°$，$AC=2\sqrt{3}$.

（1）用尺规在图中作一段劣弧，使得它在 A.C 两点分别与射线 PB 和 PD 相切．要求：写出作法，并保留作图痕迹；

（2）根据（1）的作法，结合已有条件，请写出已知和求证，并证明；

（3）求所得的劣弧与线段 PA.PC 围成的封闭图形的面积．



【答案】见解析。

【解答】（1）过 A.C 分别作 PB.PD 的垂线，它们相交于 O，然后以 OA 为半径作⊙O 即可。

如图所示。

（2）写出已知、求证，然后进行证明；连接 OP，先证明 $Rt\triangle PAO\cong Rt\triangle PCO$，然后根据切线的判定方法判断 PB.PC 为⊙O 的切线。

已知：如图，$\angle BPD=120°$，点 A.C 分别在射线 PB.PD 上，$\angle PAC=30°$，$AC=2\sqrt{3}$，过 A.C 分别作 PB.PD 的垂线，它们相交于 O，以 OA 为半径作⊙O，$OA\perp PB$，

求证：PB.PC 为⊙O 的切线；

证明：∵$\angle BPD=120°$，$PAC=30°$，

∴$\angle PCA=30°$，

∴$PA=PC$，

连接 OP，

∵$OA\perp PA$，$PC\perp OC$，

∴$\angle PAO=\angle PCO=90°$，

∵$OP=OP$，

∴$Rt\triangle PAO\cong Rt\triangle PCO$（$HL$）

∴$OA=OC$，

∴*PB*. *PC*为⊙*O*的切线；

（3）先证明△*OAC*为等边三角形得到*OA*＝*AC*＝$2\sqrt{3}$，∠*AOC*＝60°，再计算出*AP*＝2，然后根据扇形的面积公式，利用劣弧*AC*与线段*PA*. *PC*围成的封闭图形的面积进行计算.

∵∠*OAP*＝∠*OCP*＝90°－30°＝60°，

∴△*OAC*为等边三角形，

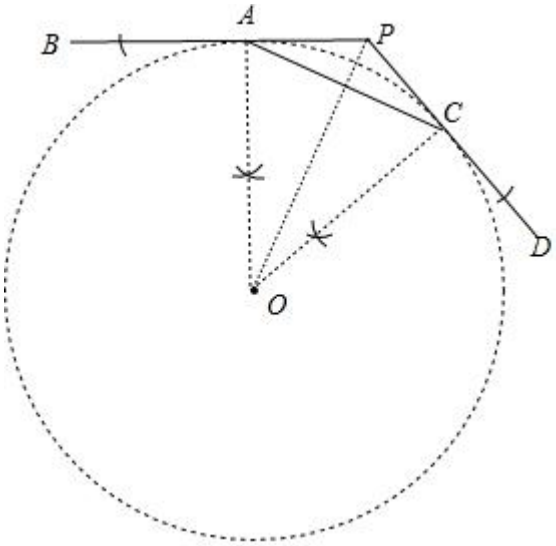
∴*OA*＝*AC*＝$2\sqrt{3}$，∠*AOC*＝60°，

∵*OP*平分∠*APC*，

∴∠*APO*＝60°，

∴*AP*＝$\frac{\sqrt{3}}{3}\times 2\sqrt{3}=2$，∴劣弧*AC*与线段*PA*. *PC*围成的封闭图形的面积

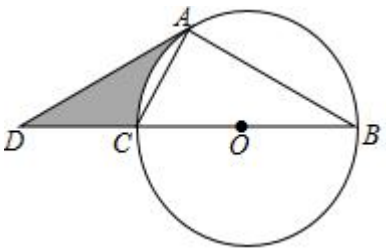
$S=S_{四边形APCO}-S_{扇形AOC}=2\times\frac{1}{2}\times 2\sqrt{3}\times 2-\frac{60\cdot\pi\cdot(2\sqrt{3})^2}{360}=4\sqrt{3}-2\pi$.



21.（2019•黑龙江省齐齐哈尔市）如图，以△*ABC*的边*BC*为直径作⊙*O*，点*A*在⊙*O*上，点*D*在线段*BC*的延长线上，*AD*＝*AB*，∠*D*＝30°.

（1）求证：直线*AD*是⊙*O*的切线；

（2）若直径*BC*＝4，求图中阴影部分的面积.



【答案】见解析。

【解析】（1）证明：连接 OA，则 $\angle COA=2\angle B$，

$\because AD=AB$，

$\therefore \angle B=\angle D=30°$，

$\therefore \angle COA=60°$，

$\therefore \angle OAD=180°-60°-30°=90°$，

$\therefore OA\perp AD$，

即 CD 是 $\odot O$ 的切线；

（2）解：$\because BC=4$，

$\therefore OA=OC=2$，

在 $Rt\triangle OAD$ 中，$OA=2$，$\angle D=30°$，

$\therefore OD=2OA=4$，$AD=2\sqrt{3}$，

所以 $S_{\triangle OAD}=\frac{1}{2}OA\cdot AD=\frac{1}{2}\times 2\times 2\sqrt{3}=2\sqrt{3}$，

因为 $\angle COA=60°$，

所以 $S_{扇形COA}=\frac{60\pi\cdot 2^2}{360}=\frac{2}{3}\pi$，

所以 $S_{阴影}=S_{\triangle OAD}-S_{扇形COA}=2\sqrt{3}-\frac{2\pi}{3}$.

