专题 31 轴对称、图形的平移和旋转

专题知识回顾

一、轴对称

1．对称轴：把一个图形沿某条直线对折，如果它与另一个图形重合，就说这两个图形关于这条直线成轴对称，该直线叫做对称轴。

2．对称轴图形：如果一个图形沿某条直线折叠后，直线两旁的部分能够互相重合，那么这个图形叫做轴对称图形；这条直线叫做对称轴。

3．轴对称的性质：

（1）关于某条直线成轴对称的两个图形是全等形。

（2）如果两个图形关于某直线对称，那么对称轴是对应点连线的垂直平分线。

（3）两个图形关于某直线对称，如果它们的对应线段或延长线相交，那么交点在对称轴上。

（4）轴对称图形上对应线段相等、对应角相等。

二、平移

1．平移：在平面内，把一个图形整体沿某一方向移动，会得到一个新的图形，新图形与原图形的形状和大小完全相同，图形的这种移动叫做平移变换，简称平移。

2．对应点：平移后得到的新图形中每一点，都是由原图形中的某一点移动后得到的，这样的两个点叫做对应点。

3．平移的性质：

（1）平移前后两个图形的形状、大小完全相同。

（2）平移前后两个图形的对应点连接线段平行（或在同一直线上）且相等。

三、旋转

1．旋转：在平面内，将一个图形绕某一点按某个方向转动一个角度，这样的运动叫做图形的旋转。这个定点叫做旋转中心，转动的角度叫做旋转角。

2. 旋转的性质：

（1）对应点到旋转中心的距离相等，对应线段相等，对应角相等；

（2）对应点与旋转中心所连线段的夹角等于旋转角。

3．旋转对称中心：把一个图形绕着一个定点旋转一个角度后，与初始图形重合，这种图形叫做旋转对称图

形，这个定点叫做旋转对称中心，旋转的角度叫做旋转角（旋转角小于 0°，大于 360°）。

4．中心对称：如果把一个图形绕着某一点旋转 180 度后能与另一个图形重合，那么我们就说，这两个图形成中心对称。这个点就是它的对称中心。

5．中心对称的性质

（1）关于中心对称的两个图形是全等形。

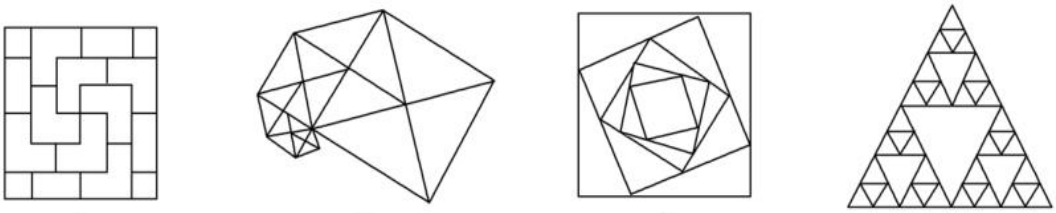
（2）关于中心对称的两个图形，对称点连线都经过对称中心，并且被对称中心平分。

（3）关于中心对称的两个图形，对应线段平行（或在同一直线上）且相等。

6．中心对称图形：如果把一个图形绕着某一点旋转 180 度后能与自身重合，那么我们就说，这个图形成中心对称图形。这个点就是它的对称中心。

专题典型题考法及解析

【例题 1】（2019 山东东营）下列图形中，是轴对称图形的是（　　）

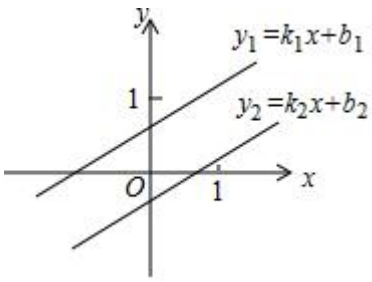


A.　　B.　　C.　　D.

【答案】D

【解析】观察图形，选项 D 中图形是轴对称图形，有 3 条对称轴，其他图形都不是轴对称图形．故选 D.

【例题 2】（2019•湖南邵阳）一次函数 $y_1=k_1x+b_1$ 的图象 l_1 如图所示，将直线 l_1 向下平移若干个单位后得直线 l_2，l_2 的函数表达式为 $y_2=k_2x+b_2$．下列说法中错误的是（　　）



A．$k_1=k_2$　　B．$b_1<b_2$

C．$b_1>b_2$　　D．当 $x=5$ 时，$y_1>y_2$

【答案】B.

【解析】本题考查图形的平移变换和函数解析式之间的关系，在平面直角坐标系中，图形的平移与图形上某点的平移相同．平移中点的变化规律是：横坐标左移加，右移减；纵坐标上移加，下移减．平移后解析式有这样一个规律“左加右减，上加下减”．关键是要搞清楚平移前后的解析式有什么关系．

根据两函数图象平行 k 相同，以及向下平移减即可判断．

∵将直线 l_1 向下平移若干个单位后得直线 l_2，

∴直线 l_1 // 直线 l_2，

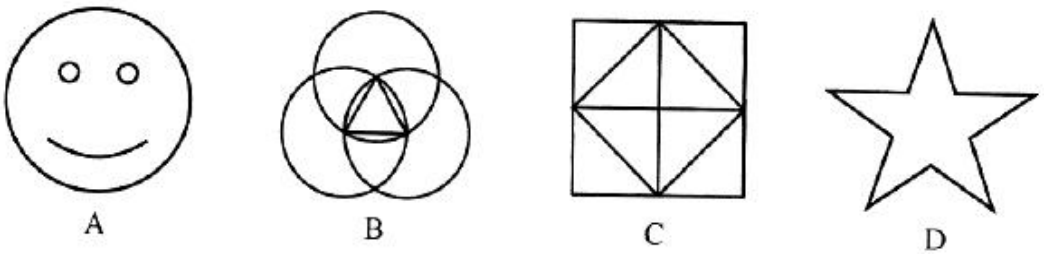
∴$k_1=k_2$，

∵直线 l_1 向下平移若干个单位后得直线 l_2，

∴$b_1>b_2$，

∴当 $x=5$ 时，$y_1>y_2$。

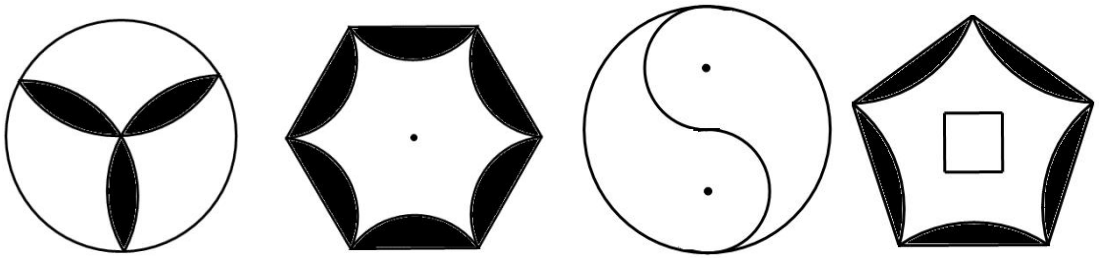
【例题 3】(2019 黑龙江绥化)下列图形中,属于中心对称图形的是(　　)



【答案】C

【解析】绕某点旋转 180°能和原图形重合,则这个图形称为中心对称图形,其中,A 是轴对称图形,B 旋转 120°的整数倍可以重合,D 选项旋转 72°的整数倍可以重合,故选 C.

【例题 4】（2019 辽宁本溪）下列图形中，既是轴对称图形又是中心对称图形的是（　　）



【答案】B.

【解析】A 选项，是轴对称图形，但不是中心对称图形，故错误；

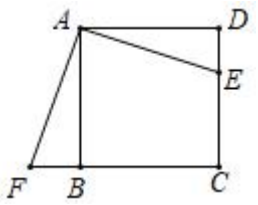
B 选项，既是轴对称图形，又是中心对称图形，故正确；

C 选项，是中心对称图形，但不是轴对称图形，故错误；

D 选项，是轴对称图形，但不是中心对称图形，故错误，

故选 B．

【例题 5】（2019 山东枣庄）如图，点 E 是正方形 $ABCD$ 的边 DC 上一点，把△ADE 绕点 A 顺时针旋转 90°到△ABF 的位置．若四边形 $AECF$ 的面积为 20，$DE=2$，则 AE 的长为（　　）



A．4　　B．$2\sqrt{5}$　　C．6　　D．$2\sqrt{6}$

【答案】D．

【解析】利用旋转的性质得出四边形 $AECF$ 的面积等于正方形 $ABCD$ 的面积，进而可求出正方形的边长，再利用勾股定理得出答案．

∵△ADE 绕点 A 顺时针旋转 90°到△ABF 的位置．

∴四边形 $AECF$ 的面积等于正方形 $ABCD$ 的面积等于 20，

∴$AD=DC=2\sqrt{5}$，

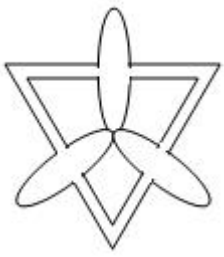
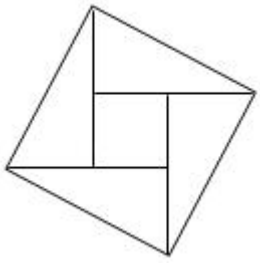
∵$DE=2$，

∴Rt△ADE 中，$AE=\sqrt{AD^2+DE^2}=2\sqrt{6}$

专题典型训练题

一、选择题

1.（2019•江苏泰州）如图图形中的轴对称图形是（　　）

A．　B．　C．　D．

【答案】B

【解析】本题考查的是轴对称图形的概念，轴对称图形的关键是寻找对称轴，图形两部分折叠后可重合．根据轴对称图形的概念判断即可．

A.不是轴对称图形；B.是轴对称图形；C.不是轴对称图形；D.不是轴对称图形。

2.（2019 湖北宜昌）如下字体的四个汉字中，是轴对称图形的是（　　）

A. 智　B. 慧　C. 宜　D. 昌

【答案】D

【解析】本题考查了轴对称图形的概念．轴对称图形的关键是寻找对称轴，图形两部分折叠后可重合．根据轴对称图形的概念对各选项分析判断即可得解．

*A.*不是轴对称图形，故本选项错误；

*B.*不是轴对称图形，故本选项错误；

*C.*不是轴对称图形，故本选项错误；

*D.*是轴对称图形，故本选项正确．

3.（2019•湖南怀化）怀化是一个多民族聚居的地区，民俗文化丰富多彩．下面是几幅具有浓厚民族特色的图案，其中既是轴对称图形又是中心对称图形的是（　　）

A. 　B. 　C. 　D. 

【答案】C

【解析】直接利用轴对称图形和中心对称图形的概念求解．

A.是轴对称图形，不是中心对称图形，故此选项错误；

B.是轴对称图形，不是中心对称图形，故此选项错误；

C.既是中心对称图形也是轴对称图形，故此选项正确；

D.是轴对称图形，但不是中心对称图形，故此选项错误．

4.（2019 山东枣庄）下列图形，可以看作中心对称图形的是（　　）

A. 　B. 　C. 　D. 

【答案】B.

【解析】根据中心对称图形的概念对各选项分析判断即可得解.

A.不是中心对称图形，故本选项不符合题意；

B.是中心对称图形，故本选项符合题意；

C.不是中心对称图形，故本选项不符合题意；

D.不是中心对称图形，故本选项不符合题意.

5.（2019 山东枣庄）在平面直角坐标系中，将点 A（1，﹣2）向上平移 3 个单位长度，再向左平移 2 个单位长度，得到点 A'，则点 A'的坐标是（　　）

A.（﹣1，1）　　B.（﹣1，﹣2）　　C.（﹣1，2）　　D.（1，2）

【答案】A

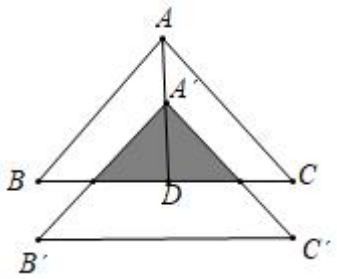
【解析】根据向左平移横坐标减，向上平移纵坐标加求解即可.

∵将点 A（1，﹣2）向上平移 3 个单位长度，再向左平移 2 个单位长度，得到点 A'，

∴点 A'的横坐标为 1﹣2=﹣1，纵坐标为﹣2+3=1，

∴A'的坐标为（﹣1，1）.

6.（2019 山东枣庄）如图，将△ABC 沿 BC 边上的中线 AD 平移到△$A'B'C'$的位置．已知△ABC 的面积为 16，阴影部分三角形的面积 9．若 AA'=1，则 $A'D$ 等于（　　）



A．2　　B．3　　C．4　　D．$\frac{3}{2}$

【答案】B.

【解析】本题主要平移的性质，解题的关键是熟练掌握平移变换的性质与三角形中线的性质、相似三角形的判定与性质等知识点.

由 $S_{\triangle ABC}$=16.$S_{\triangle A'EF}$=9 且 AD 为 BC 边的中线知 $S_{\triangle A'DE}=\frac{1}{2}S_{\triangle A'EF}=\frac{9}{2}$，$S_{\triangle ABD}=\frac{1}{2}S_{\triangle ABC}$=8，根据△$DA'E$ ∽△DAB 知 $(\frac{A'D}{AD})^2=\frac{S_{\triangle A'DE}}{S_{\triangle ABD}}$，据此求解可得.

∵$S_{\triangle ABC}$=16.$S_{\triangle A'EF}$=9，且 AD 为 BC 边的中线，

∴$S_{\triangle A'DE}=\frac{1}{2}S_{\triangle A'EF}=\frac{9}{2}$，$S_{\triangle ABD}=\frac{1}{2}S_{\triangle ABC}=8$，

∵将△*ABC* 沿 *BC* 边上的中线 *AD* 平移得到△*A'B'C'*，

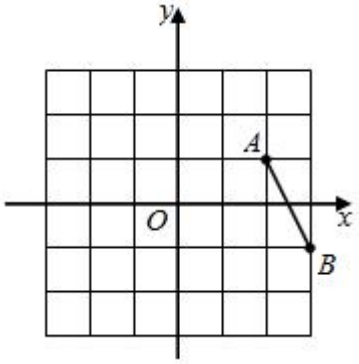
∴*A'E* // *AB*，

∴△*DA'E*∽△*DAB*，

则（$\frac{A'D}{AD}$）$^2=\frac{S_{\triangle A'DE}}{S_{\triangle ABD}}$，即（$\frac{A'D}{A'D+1}$）$^2=\frac{\frac{9}{2}}{8}=\frac{9}{16}$，

解得 *A'D*=3 或 *A'D*=－$\frac{3}{7}$（舍）。

7.（2019•海南）如图，在平面直角坐标系中，已知点 *A*（2，1），点 *B*（3，－1），平移线段 *AB*，使点 *A* 落在点 A_1（－2，2）处，则点 *B* 的对应点 B_1 的坐标为（　　）



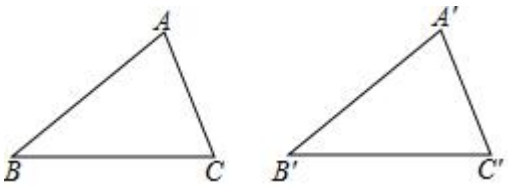
A.（－1，－1）　　B.（1，0）　　C.（－1，0）　　D.（3，0）

【答案】C

【解析】由点 *A*（2，1）平移后 A_1（－2，2）可得坐标的变化规律是：左移 4 个单位，上移 1 个单位，

∴点 *B* 的对应点 B_1 的坐标（－1，0）.

8.（2019•南京）如图，△*A'B'C'*是由△*ABC* 经过平移得到的，△*A'B'C* 还可以看作是△*ABC* 经过怎样的图形变化得到？下列结论：①1 次旋转；②1 次旋转和 1 次轴对称；③2 次旋转；④2 次轴对称．其中所有正确结论的序号是（　　）



A．①④　　B．②③　　C．②④　　D．③④

【答案】D.

【解析】本题主要考查了几何变换的类型，在轴对称变换下，对应线段相等，对应直线（段）或者平行，

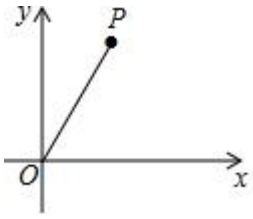
或者交于对称轴，且这两条直线的夹角被对称轴平分．在旋转变换下，对应线段相等，对应直线的夹角等于旋转角．

依据旋转变换以及轴对称变换，即可使△*ABC* 与△*A'B'C'*重合．

先将△*ABC* 绕着 *B'C* 的中点旋转 180°，再将所得的三角形绕着 *B'C'*的中点旋转 180°，即可得到△*A'B'C'*；

先将△*ABC* 沿着 *B'C* 的垂直平分线翻折，再将所得的三角形沿着 *B'C'*的垂直平分线翻折，即可得到△*A'B'C'*。

9.（2019•湖北孝感）如图，在平面直角坐标系中，将点 *P*（2，3）绕原点 *O* 顺时针旋转 90°得到点 *P'*，则 *P'*的坐标为（　　）



A.（3，2）　　B.（3，﹣1）　　C.（2，﹣3）　　D.（3，﹣2）

【答案】D.

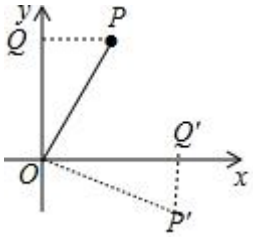
【解析】本题考查了坐标与图形变化﹣旋转：图形或点旋转之后要结合旋转的角度和图形的特殊性质来求出旋转后的点的坐标．常见的是旋转特殊角度如：30°，45°，60°，90°，180°．

作 *PQ*⊥*y* 轴于 *Q*，如图，把点 *P*（2，3）绕原点 *O* 顺时针旋转 90°得到点 *P'*看作把△*OPQ* 绕原点 *O* 顺时针旋转 90°得到△*OP'Q'*，利用旋转的性质得到∠*P'Q'O*＝90°，∠*QOQ'*＝90°，*P'Q'*＝*PQ*＝2，*OQ'*＝*OQ*＝3，从而可确定 *P'*点的坐标．

作 *PQ*⊥*y* 轴于 *Q*，如图，

∵*P*（2，3），

∴*PQ*＝2，*OQ*＝3，



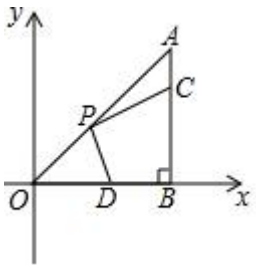
∵点 *P*（2，3）绕原点 *O* 顺时针旋转 90°得到点 *P'*相当于把△*OPQ* 绕原点 *O* 顺时针旋转 90°得到△*OP'Q'*，

∴∠*P'Q'O*＝90°，∠*QOQ'*＝90°，*P'Q'*＝*PQ*＝2，*OQ'*＝*OQ*＝3，

∴点 *P'*的坐标为（3，﹣2）．

10.（2019•山东省聊城市）如图，在 Rt△*ABO* 中，∠*OBA*＝90°，*A*（4，4），点 *C* 在边 *AB* 上，且$\frac{AC}{CB}=\frac{1}{3}$，

点 D 为 OB 的中点，点 P 为边 OA 上的动点，当点 P 在 OA 上移动时，使四边形 $PDBC$ 周长最小的点 P 的坐标为（　　）



A．（2，2）　　B．（$\frac{5}{2}$，$\frac{5}{2}$）　　C．（$\frac{8}{3}$，$\frac{8}{3}$）　　D．（3，3）

【答案】C．

【解析】根据已知条件得到 $AB=OB=4$，$\angle AOB=45°$，求得 $BC=3$，$OD=BD=2$，得到 D（0，2），C（4，3），作 D 关于直线 OA 的对称点 E，连接 EC 交 OA 于 P，则此时，四边形 $PDBC$ 周长最小，E（0，2），求得直线 EC 的解析式为 $y=\frac{1}{4}x+2$，解方程组可得到结论．

∵在 Rt△ABO 中，$\angle OBA=90°$，A（4，4），

∴$AB=OB=4$，$\angle AOB=45°$，

∵$\frac{AC}{CB}=\frac{1}{3}$，点 D 为 OB 的中点，

∴$BC=3$，$OD=BD=2$，

∴D（0，2），C（4，3），

作 D 关于直线 OA 的对称点 E，连接 EC 交 OA 于 P，

则此时，四边形 $PDBC$ 周长最小，E（0，2），

∵直线 OA 的解析式为 $y=x$，

设直线 EC 的解析式为 $y=kx+b$，

∴$\begin{cases}b=2\\4k+b=3\end{cases}$，

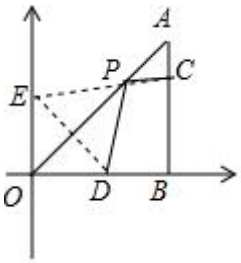
解得：$\begin{cases}k=\frac{1}{4}\\b=2\end{cases}$，

∴直线 EC 的解析式为 $y=\frac{1}{4}x+2$，

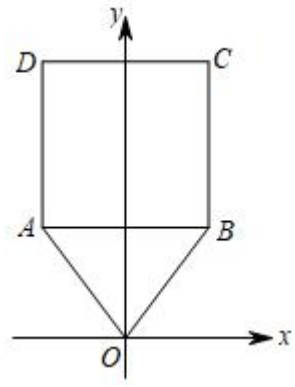
解$\begin{cases}y=x\\y=\frac{1}{4}x+2\end{cases}$得，$\begin{cases}x=\frac{8}{3}\\y=\frac{8}{3}\end{cases}$，

∴P（$\frac{8}{3}$，$\frac{8}{3}$），

故选：C．



11.（2019•河南）如图，在△OAB中，顶点O（0，0），A（﹣3，4），B（3，4），将△OAB与正方形$ABCD$组成的图形绕点O顺时针旋转，每次旋转90°，则第70次旋转结束时，点D的坐标为（　　）



A．（10，3）　　B．（﹣3，10）　　C．（10，﹣3）　　D．（3，﹣10）

【答案】D.

【解析】先求出AB＝6，再利用正方形的性质确定D（﹣3，10），由于70＝4×17+2，所以第70次旋转结束时，相当于△OAB与正方形$ABCD$组成的图形绕点O顺时针旋转2次，每次旋转90°，此时旋转前后的点D关于原点对称，于是利用关于原点对称的点的坐标特征可出旋转后的点D的坐标．

∵A（﹣3，4），B（3，4），

∴AB＝3+3＝6，

∵四边形$ABCD$为正方形，

∴AD＝AB＝6，

∴D（﹣3，10），

∵70＝4×17+2，

∴每4次一个循环，第70次旋转结束时，相当于△OAB与正方形$ABCD$组成的图形绕点O顺时针旋转2次，每次旋转90°，

∴点 D 的坐标为（3，﹣10）.

二、填空题

12.（2019•山东临沂）在平面直角坐标系中，点 P（4，2）关于直线 $x=1$ 的对称点的坐标是____.

【答案】（﹣2，2）.

【解析】先求出点 P 到直线 $x=1$ 的距离，再根据对称性求出对称点 P'到直线 $x=1$ 的距离，从而得到点 P'的横坐标，即可得解.

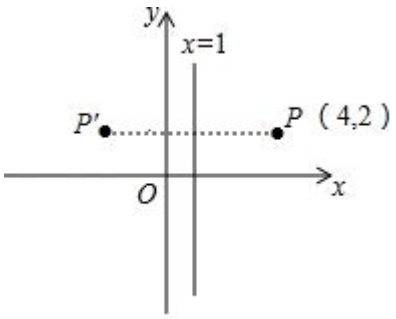
∵点 P（4，2），

∴点 P 到直线 $x=1$ 的距离为 4﹣1=3，∴点 P 关于直线 $x=1$ 的对称点 P'到直线 $x=1$ 的距离为 3，

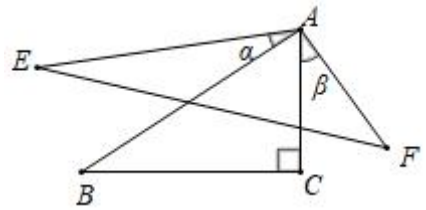
∴点 P'的横坐标为 1﹣3=﹣2，

∴对称点 P'的坐标为（﹣2，2）.

故答案为：（﹣2，2）.



13.（2019•海南省）如图，将 $Rt\triangle ABC$ 的斜边 AB 绕点 A 顺时针旋转α（$0°<\alpha<90°$）得到 AE，直角边 AC 绕点 A 逆时针旋转β（$0°<\beta<90°$）得到 AF，连结 EF．若 $AB=3$，$AC=2$，且$\alpha+\beta=\angle B$，则 $EF=$_____.



【答案】$\sqrt{13}$

【解析】由旋转的性质可得 $AE=AB=3$，$AC=AF=2$，由勾股定理可求 EF 的长.

由旋转的性质可得 $AE=AB=3$，$AC=AF=2$，

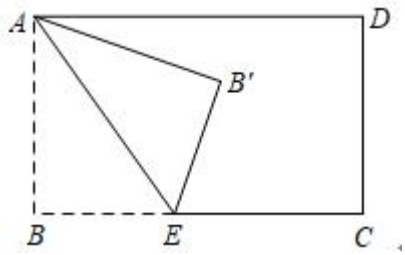
∵$\angle B+\angle BAC=90°$，且$\alpha+\beta=\angle B$，

∴$\angle BAC+\alpha+\beta=90°$

∴$\angle EAF=90°$

∴$EF=\sqrt{AE^2+AF^2}=\sqrt{13}$

14.（2019•河南）如图，在矩形 ABCD 中，AB＝1，BC＝a，点 E 在边 BC 上，且 BE＝$\frac{3}{5}$a．连接 AE，将△ABE 沿 AE 折叠，若点 B 的对应点 B′落在矩形 ABCD 的边上，则 a 的 值为_____．



【答案】$\frac{5}{3}$或$\frac{\sqrt{5}}{3}$．

【解析】本题考查了折叠的性质：折叠是一种对称变换，它属于轴对称，折叠前后图形 的形状和大小不变，位置变化，对应边和对应角相等．也考查了矩形的性质，勾股定 理，相似三角形的判定与性质．进行分类讨论与数形结合是解题的关键．

分两种情况：①点 B′落在 AD 边上，根据矩形与折叠的性质易得 AB＝BE，即可

求出 a 的值；②点 B′落在 CD 边上，证明△ADB′∽△B′CE，据相似三角形对应边成比例即可求出 a 的值．

分两种情况：

①当点 B′落在 AD 边上时，如图 1．

∵四边形 ABCD 是矩形，

∴∠BAD＝∠B＝90°，

∵将△ABE 沿 AE 折叠，点 B 的对应点 B′落在 AD 边上，

∴∠BAE＝∠B′AE＝$\frac{1}{2}$∠BAD＝45°，

∴AB＝BE，

∴$\frac{3}{5}$a＝1，∴a＝$\frac{5}{3}$；

②当点 B′落在 CD 边上时，如图 2．

∵四边形 ABCD 是矩形，

∴∠BAD＝∠B＝∠C＝∠D＝90°，AD＝BC＝a．

∵将△ABE 沿 AE 折叠，点 B 的对应点 B′落在 CD 边上，

∴∠B＝∠AB′E＝90°，AB＝AB′＝1，EB＝EB′＝$\frac{3}{5}$a，

∴DB′=$\sqrt{B'A^2-AD^2}=\sqrt{1-a^2}$，EC=BC﹣BE=a﹣$\frac{3}{5}$a=$\frac{2}{5}$a.

在△ADB′与△B′CE中，

$$\begin{cases}\angle B'AD=\angle EB'C=90^0-\angle AB'I\\ \angle D=\angle C=90^0\end{cases},$$

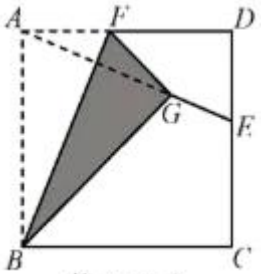
∴△ADB′∽△B′CE，

∴$\frac{DB'}{CE}=\frac{AB'}{B'E}$，即$\frac{\sqrt{1-a^2}}{\frac{2}{5}a}=\frac{1}{\frac{3}{5}a}$，

解得 $a_1=\frac{\sqrt{5}}{3}$，$a_2=0$（舍去）.

综上，所求 a 的值为$\frac{5}{3}$或$\frac{\sqrt{5}}{3}$.

15.（重点题）如图，正方形纸片ABCD的边长为12，E是边CD上一点，连接AE，折叠该纸片，使点A落在AE上的G点，并使折痕经过点B，得到折痕BF，点F在AD上，若DE=5，则GE的长为_____.



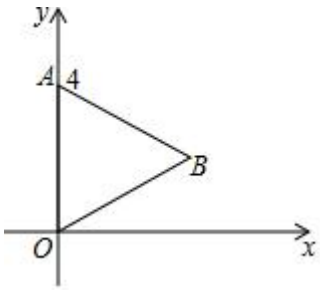
第（17）题

【答案】$\frac{49}{13}$

【解析】因为四边形ABCD是正方形，易得△AFB≌△DEA，∴AF=DE=5，则BF=13.

又易知△AFH∽△BFA，所以$\frac{AH}{BA}=\frac{AF}{BF}$，即AH=$\frac{60}{13}$，∴AH=2AH=$\frac{120}{13}$，∴由勾股定理得AE=13，∴GE=AE-AG=$\frac{49}{13}$

16.（2019•湖南邵阳）如图，将等边△*AOB* 放在平面直角坐标系中，点 *A* 的坐标为（4，0），点 *B* 在第一象限，将等边△*AOB* 绕点 *O* 顺时针旋转 180°得到△*A′OB′*，则点 *B′*的坐标是_____.



【答案】故答案为（﹣2，﹣$2\sqrt{3}$）.

【解析】作 $BH\perp y$ 轴于 H，如图，

∵△OAB 为等边三角形，

∴$OH=AH=2$，$\angle BOA=60°$，

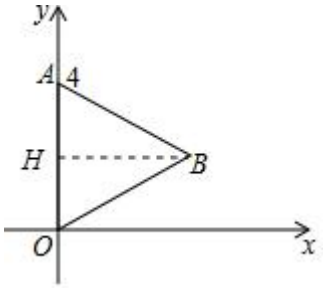
∴$BH=\sqrt{3}OH=2\sqrt{3}$，

∴B 点坐标为（2，$2\sqrt{3}$），

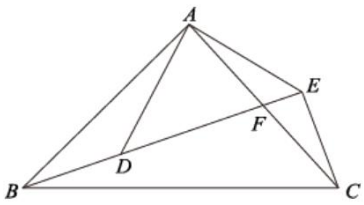
∵等边△AOB 绕点 O 顺时针旋转 180°得到△$A'OB'$，

∴点 B'的坐标是（﹣2，﹣$2\sqrt{3}$）.

故答案为（﹣2，﹣$2\sqrt{3}$）.



17.(2019 山西)如图，在△ABC 中，∠BAC=90°，AB=AC=10cm，点 D 为△ABC 内一点，∠BAD=15°，AD=6cm，连接 BD，将△ABD 绕点 A 逆时针方向旋转，使 AB 与 AC 重合，点 D 的对应点 E，连接 DE，DE 交 AC 于点 F，则 CF 的长为_____cm.



【答案】$10-2\sqrt{6}$

【解析】过点 A 作 AG⊥DE 于点 G，由旋转可知：AD=AE，∠DAE=90°，∠CAE=∠BAD=15°

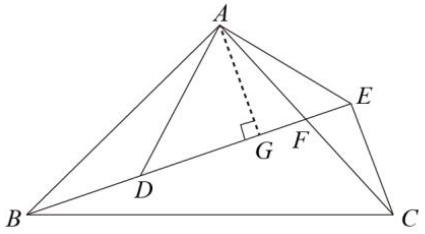
∴∠AED=45°；在△AEF 中：∠AFD=∠AED+∠CAE=60°

在 Rt△ADG 中：AG=DG=$\frac{AD}{\sqrt{2}}=3\sqrt{2}$

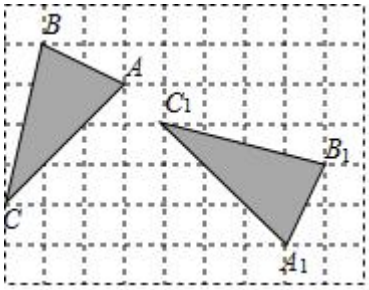
在 Rt△AFG 中：$GF=\frac{AG}{\sqrt{3}}=\sqrt{6},AF=2FG=2\sqrt{6}$

$\therefore CF=AC-AF=10-2\sqrt{6}$

故答案为：$10-2\sqrt{6}$



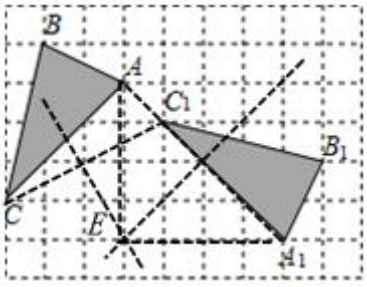
18.（2019 山东淄博）如图，在正方形网格中，格点△*ABC* 绕某点顺时针旋转角α（0＜α＜180°）得到格点△$A_1B_1C_1$，点 *A* 与点 A_1，点 *B* 与点 B_1，点 *C* 与点 C_1 是对应点，则α＝____度.



【答案】90

【解析】作 CC_1，AA_1 的垂直平分线交于点 *E*，可得点 *E* 是旋转中心，即∠AEA_1＝α＝90°.

如图，连接 CC_1，AA_1，作 CC_1，AA_1 的垂直平分线交于点 *E*，连接 *AE*，A_1E

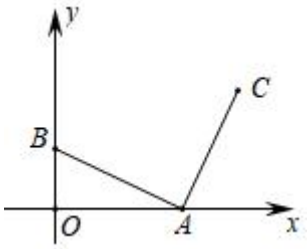


∵CC_1，AA_1 的垂直平分线交于点 *E*，

∴点 *E* 是旋转中心，

∵∠AEA_1＝90°∴旋转角α＝90°

19.（2019•广西池河）如图，在平面直角坐标系中，A（2，0），B（0，1），AC 由 AB 绕点 A 顺时针旋转 90°而得，则 AC 所在直线的解析式是_____.



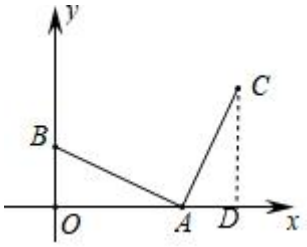
【答案】 $y=2x-4$.

【解析】过点 C 作 $CD\perp x$ 轴于点 D，易知$\triangle ACD\cong\triangle BAO$（$AAS$），已知 A（2，0），B（0，1），从而求得点 C 坐标，设直线 AC 的解析式为 $y=kx+b$，将点 A，点 C 坐标代入求得 k 和 b，从而得解.

∵A（2，0），B（0，1）

∴$OA=2$，$OB=1$

过点 C 作 $CD\perp x$ 轴于点 D，



则易知$\triangle ACD\cong\triangle BAO$（$AAS$）

∴$AD=OB=1$，$CD=OA=2$

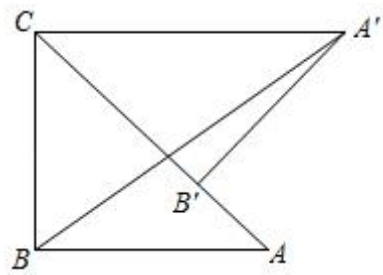
∴C（3，2）

设直线 AC 的解析式为 $y=kx+b$，将点 A，点 C 坐标代入得$\begin{cases}0=2k+b\\2=3k+b\end{cases}$

∴$\begin{cases}k=2\\b=-4\end{cases}$

∴直线 AC 的解析式为 $y=2x-4$.

20.（2019•黑龙江哈尔滨）如图，将$\triangle ABC$ 绕点 C 逆时针旋转得到$\triangle A'B'C$，其中点 A'与 A 是对应点，点 B'与 B 是对应点，点 B'落在边 AC 上，连接 $A'B$，若$\angle ACB=45°$，$AC=3$，$BC=2$，则 $A'B$ 的长为_____.



【答案】$\sqrt{13}$

【解析】由旋转的性质可得 $AC=A'C=3$，$\angle ACB=\angle ACA'=45°$，可得$\angle A'CB=90°$，由勾股定理可求解.

∵将△ABC 绕点 C 逆时针旋转得到△$A'B'C$，

∴$AC=A'C=3$，$\angle ACB=\angle ACA'=45°$

∴$\angle A'CB=90°$

∴$A'B=\sqrt{BC^2+A'C^2}=\sqrt{13}$

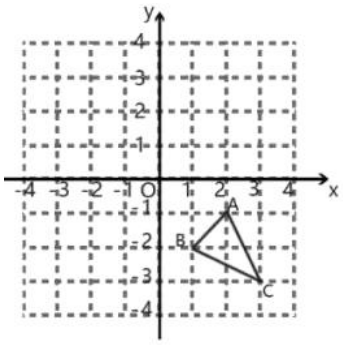
三、解答题

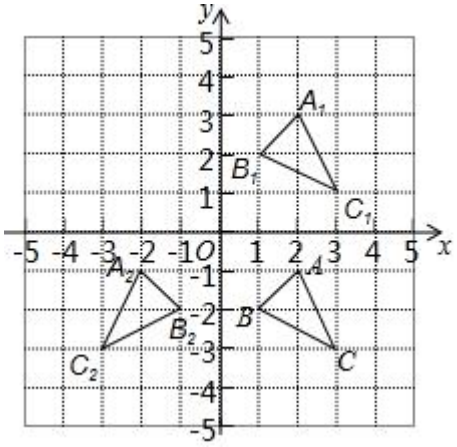
21.（2019•广西北部湾）如图，在平面直角坐标系中，已知△ABC 的三个顶点坐标分别是 A（2，−1）、B（1，−2）、C（3，−3）.

（1）将△ABC 向上平移 4 个单位长度得到△$A_1B_1C_1$，请画出△$A_1B_1C_1$;

（2）请画出△ABC 关于 y 轴对称的△$A_2B_2C_2$;

（3）请写出 A_1、A_2 的坐标.





【答案】（1）如图所示：△$A_1B_1C_1$，即为所求；

（2）如图所示：△$A_2B_2C_2$，即为所求；

（3）A_1（2，3），A_2（-2，-1）.

【解析】此题主要考查了轴对称变换以及平移变换，正确得出对应点位置是解题关键.

(1)直接利用平移的性质得出对应点位置进而得出答案；

(2)直接利用轴对称的性质得出对应点位置进而得出答案；

(3)利用所画图象得出对应点坐标.

22.（2019 北京市）已知 $\angle AOB=30°$，H 为射线 OA 上一定点，$OH=\sqrt{3}+1$，P 为射线 OB 上一点，M 为线段 OH 上一动点，连接 PM，满足 $\angle OMP$ 为钝角，以点 P 为中心，将线段 PM 顺时针旋转 150°，得到线

段 PN，连接 ON.

（1）依题意补全图 1；

（2）求证：$\angle OMP = \angle OPN$；

（3）点 M 关于点 H 的对称点为 Q，连接 QP．写出一个 OP 的值，使得对于任意的点 M 总有 ON=QP，并证明.

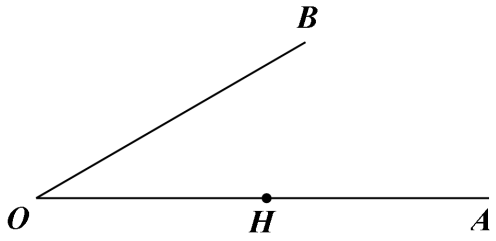
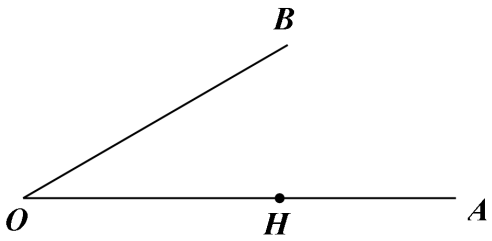


图1

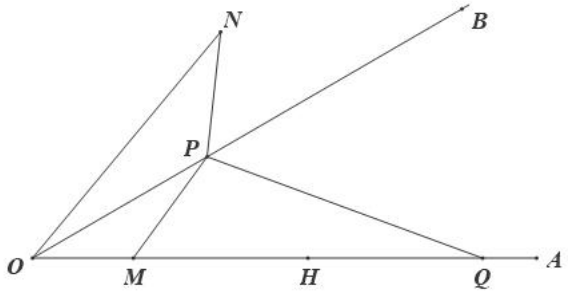


备用图

【答案】见解析。

【解析】本题考查的知识点有尺规作图、旋转、三角形的内角和、方程思想、30°锐角的性质、中心对称的性质.

（1）见下图。



（2）证明：$\because \angle AOB = 30°$

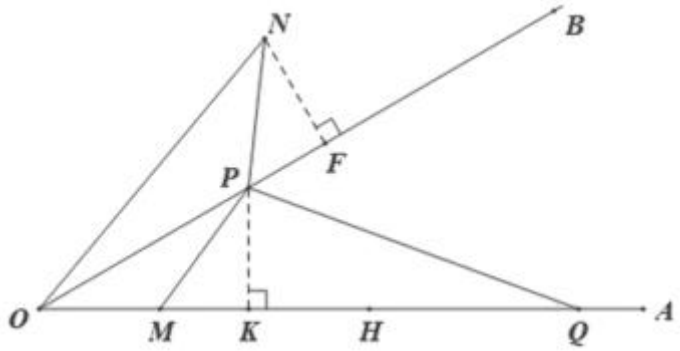
$\therefore$在△OPM 中，$\angle OMP = 180° - \angle POM - \angle OPM = 150° - \angle OPM$

又$\because \angle MPN = 150°$，

$\therefore \angle OPN = \angle MPN - \angle OPM = 150° - \angle OPM$

$\therefore \angle OMP = \angle OPN$.

（3）如下图，过点 P 作 PK⊥OA 于 K，过点 N 作 NF⊥OB 于 F



∵∠OMP=∠OPN

∴∠PMK=∠NPF

在△NPF 和△PMK 中，$\begin{cases}\angle NPF=\angle PMK\\ \angle NFO=\angle PKM=90°\\ PN=PM\end{cases}$

∴△NPF≌△PMK　（AAS）

∴PF=MK，∠PNF=∠MPK，NF=PK

又∵ON=PQ

在 Rt△NOF 和 Rt△PKQ 中，$\begin{cases}ON=PQ\\ NF=PK\end{cases}$

∴Rt△NOF≌Rt△PKQ　（HL）

∴KQ=OF

设 $MK=y, PK=x$

∵∠POA=30°，PK⊥OQ

∴ $OP=2x$

∴ $OK=\sqrt{3}x, OM=\sqrt{3}x-y$

∴ $OF=OP+PF=2x+y$ ，

$MH=OH-OM=\sqrt{3}+1-\left(\sqrt{3}x-y\right)$，

$KH=OH-OK=\sqrt{3}+1-\sqrt{3}x$.

∵M 与 Q 关于 H 对称

∴MH=HQ

∴KQ=KH+HQ

$=\sqrt{3}+1-\sqrt{3}x+\sqrt{3}+1-\sqrt{3}x+y$

$=2\sqrt{3}+2-2\sqrt{3}x+y$

又∵KQ=OF

$\therefore 2\sqrt{3}+2-2\sqrt{3}x+y=2x+y$

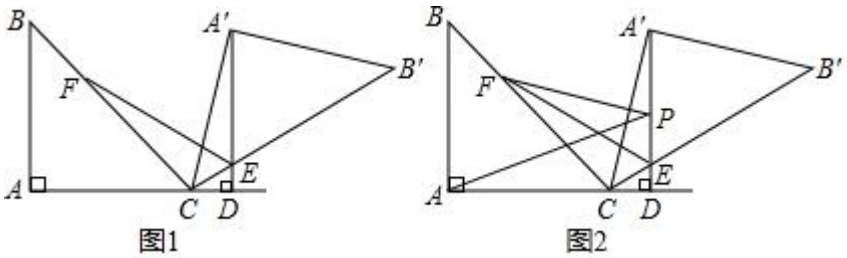
$\therefore 2\sqrt{3}+2=x\left(2+2\sqrt{3}\right)$

$\therefore x=1$，即 PK=1

又∵ $\angle POA=30°$

∴OP=2.

23.（2019•广西贵港）已知：△*ABC* 是等腰直角三角形，∠*BAC*＝90°，将△*ABC* 绕点 *C* 顺时针方向旋转得到△*A′B′C*，记旋转角为α，当 90°＜α＜180°时，作 *A′D*⊥*AC*，垂足为 *D*，*A′D* 与 *B′C* 交于点 *E*.



（1）如图 1，当∠*CA′D*＝15°时，作∠*A′EC* 的平分线 *EF* 交 *BC* 于点 *F*.

①写出旋转角α的度数；

②求证：*EA′*+*EC*＝*EF*；

（2）如图 2，在（1）的条件下，设 *P* 是直线 *A′D* 上的一个动点，连接 *PA*，*PF*，若 *AB*＝$\sqrt{2}$，求线段 *PA*+*PF* 的最小值.（结果保留根号）

【答案】见解析。

【解析】（1）①解直角三角形求出∠*A′CD* 即可解决问题.

②连接 *A′F*，设 *EF* 交 *CA′*于点 *O*. 在 *EF* 时截取 *EM*＝*EC*，连接 *CM*. 首先证明△*CFA′*是等边三角形，再证明△*FCM*≌△*A′CE*（*SAS*），即可解决问题.

（2）如图 2 中，连接 *A′F*，*PB′*，*AB′*，作 *B′M*⊥*AC* 交 *AC* 的延长线于 *M*. 证明△*A′EF*≌△*A′EB′*，推出 *EF*＝*EB′*，推出 *B′*，*F* 关于 *A′E* 对称，推出 *PF*＝*PB′*，推出 *PA*+*PF*＝*PA*+*PB′*≥*AB′*，求出 *AB′*即可解决问题.

【解答】（1）①解：旋转角为 105°.

理由：如图 1 中，

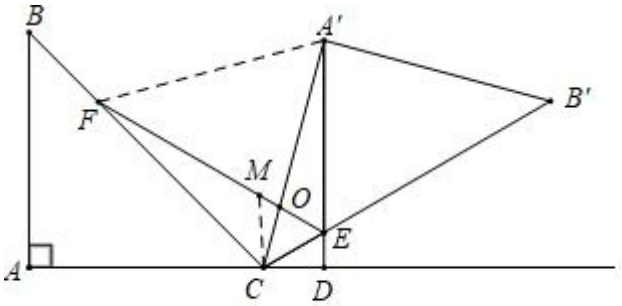


图1

∵$A'D\perp AC$，∴$\angle A'DC=90°$，

∵$\angle CA'D=15°$，

∴$\angle A'CD=75°$，∴$\angle ACA'=105°$，

∴旋转角为 105°.

②证明：连接 $A'F$，设 EF 交 CA' 于点 O．在 EF 时截取 $EM=EC$，连接 CM.

∵$\angle CED=\angle A'CE+\angle CA'E=45°+15°=60°$，

∴$\angle CEA'=120°$，

∵FE 平分 $\angle CEA'$，∴$\angle CEF=\angle FEA'=60°$，

∵$\angle FCO=180°-45°-75°=60°$，

∴$\angle FCO=\angle A'EO$，∵$\angle FOC=\angle A'OE$，

∴$\triangle FOC\backsim\triangle A'OE$，

∴$\frac{OF}{A'O}=\frac{OC}{OE}$，

∴$\frac{OF}{OC}=\frac{A'O}{OE}$，

∵$\angle COE=\angle FOA'$，∴$\triangle COE\backsim\triangle FOA'$，

∴$\angle FA'O=\angle OEC=60°$，

∴$\triangle A'OF$ 是等边三角形，∴$CF=CA'=A'F$，

∵$EM=EC$，$\angle CEM=60°$，∴$\triangle CEM$ 是等边三角形，

$\angle ECM=60°$，$CM=CE$，

∵$\angle FCA'=\angle MCE=60°$，∴$\angle FCM=\angle A'CE$，

∴$\triangle FCM\cong\triangle A'CE$（$SAS$），∴$FM=A'E$，

∴$CE+A'E=EM+FM=EF$.

（2）解：如图 2 中，连接 $A'F$，PB'，AB'，作 $B'M\perp AC$ 交 AC 的延长线于 M.

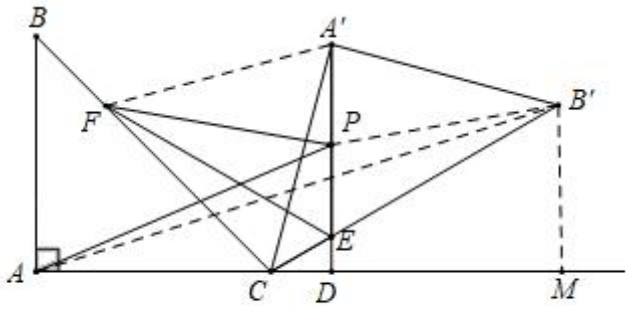


图2

由②可知，$\angle EA'F='EA'B'=75°$，$A'E=A'E$，$A'F=A'B'$，

$\therefore \triangle A'EF\cong\triangle A'EB'$，

$\therefore EF=EB'$，

$\therefore B'$，F 关于 $A'E$ 对称，$\therefore PF=PB'$，

$\therefore PA+PF=PA+PB'\geq AB'$，

在 Rt$\triangle CB'M$ 中，$CB'=BC=\sqrt{2}AB=2$，$\angle MCB'=30°$，

$\therefore B'M=\frac{1}{2}CB'=1$，$CM=\sqrt{3}$，

$\therefore AB'=\sqrt{AM^2+B'M^2}=\sqrt{(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2+1^2}=\sqrt{6+2\sqrt{6}}$.

$\therefore PA+PF$ 的最小值为$\sqrt{6+2\sqrt{6}}$.