专题 33　最值问题

专题知识回顾

在中学数学题中，最值题是常见题型，围绕最大（小）值所出的数学题是各种各样，就其解法，主要为以下几种：

1. 二次函数的最值公式

二次函数 $y=ax^2+bx+c$（a、b、c 为常数且 $a\neq 0$）其性质中有

①若 $a>0$ 当 $x=-\dfrac{b}{2a}$ 时，y 有最小值。$y_{\min}=\dfrac{4ac-b^2}{4a}$；

②若 $a<0$ 当 $x=-\dfrac{b}{2a}$ 时，y 有最大值。$y_{\max}=\dfrac{4ac-b^2}{4a}$。

2. 一次函数的增减性

一次函数 $y=kx+b(k\neq 0)$ 的自变量 x 的取值范围是全体实数，图象是一条直线，因而没有最大（小）值；但当 $m\le x\le n$ 时，则一次函数的图象是一条线段，根据一次函数的增减性，就有最大（小）值。

3. 判别式法

根据题意构造一个关于未知数 x 的一元二次方程；再根据 x 是实数，推得 $\Delta\ge 0$，进而求出 y 的取值范围，并由此得出 y 的最值。

4. 构造函数法

“最值”问题中一般都存在某些变量变化的过程，因此它们的解往往离不开函数。

5. 利用非负数的性质

在实数范围内，显然有 $a^2+b^2+k\ge k$，当且仅当 $a=b=0$ 时，等号成立，即 a^2+b^2+k 的最小值为 k。

6. 零点区间讨论法

用“零点区间讨论法”消去函数 y 中绝对值符号，然后求出 y 在各个区间上的最大值，再加以比较，从中确定出整个定义域上的最大值。

7. 利用不等式与判别式求解

在不等式 $x\le a$ 中，$x=a$ 是最大值，在不等式 $x\ge b$ 中，$x=b$ 是最小值。

8. “夹逼法”求最值

在解某些数学问题时，通过转化、变形和估计，将有关的量限制在某一数值范围内，再通过解不等式获取问题的答案，这一方法称为“夹逼法”。

专题典型题考法及解析

【例题 1】（经典题）二次函数 $y=2（x-3）^2-4$ 的最小值为_____.

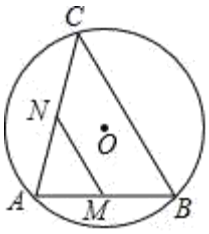
【答案】 -4.

【解析】题中所给的解析式为顶点式，可直接得到顶点坐标，从而得出解答.

二次函数 $y=2（x-3）^2-4$ 的开口向上，顶点坐标为（3， -4），

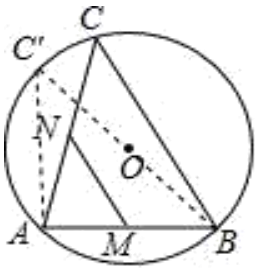
所以最小值为 -4.

【例题 2】（2018 江西）如图，AB 是⊙O 的弦，AB=5，点 C 是⊙O 上的一个动点，且∠ACB=45°，若点 M、N 分别是 AB、AC 的中点，则 MN 长的最大值是_____.



【答案】$\frac{5\sqrt{2}}{2}$.

【解析】根据中位线定理得到 MN 的最大时，BC 最大，当 BC 最大时是直径，从而求得直径后就可以求得最大值.



如图，∵点 M，N 分别是 AB，AC 的中点，

∴$MN=\frac{1}{2}BC$，

∴当 BC 取得最大值时，MN 就取得最大值，当 BC 是直径时，BC 最大，

连接 BO 并延长交⊙O 于点 C′，连接 AC′，

∵BC′ 是⊙O 的直径，

∴∠BAC′ =90°.

∵∠ACB=45°，AB=5，

∴∠AC′ B=45°，

$\therefore BC'=\dfrac{AB}{\sin 45^\circ}=\dfrac{5}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=5\sqrt{2}$,

$\therefore MN_{最大}=\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$.

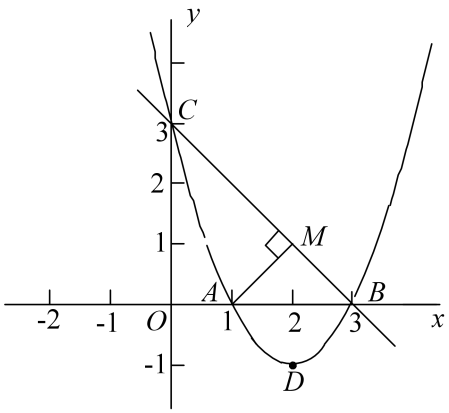
【例题 3】（2019 湖南张家界）已知抛物线 $y=ax^2+bx+c$（$a\neq 0$）过点 $A(1,0)$，$B(3,0)$两点，与 y 轴交于点 C，$OC=3$.

（1）求抛物线的解析式及顶点 D 的坐标；

（2）过点 A 作 $AM\perp BC$，垂足为 M，求证：四边形 $ADBM$ 为正方形；

（3）点 P 为抛物线在直线 BC 下方图形上的一动点，当△PBC 面积最大时，求 P 点坐标及最大面积的值；

（4）若点 Q 为线段 OC 上的一动点，问 $AQ+\frac{1}{2}QC$ 是否存在最小值?若存在，求出这个最小值；若不存在，请说明理由.



【思路分析】（1）将 A、B、C 三点坐标代入抛物线的解析式即可求出 a、b、c 的值（当然用两根式做更方便）；（2）先证四边形 $AMBD$ 为矩形，再证该矩形有一组邻边相等，即可证明该四边形为正方形；（3）如答图 2，过点 P 作 $PF\perp AB$ 于点 F，交 BC 于点 E，令 $P(m,\ m^2-4m+3)$，易知直线 BC 的解析式为 $y=-x+3$，则 $E(m,\ -m+3)$，$PE=(-m+3)-(m^2-4m+3)=-m^2+3m$. 再由 $S_{\triangle PBC}=S_{\triangle PBE}+S_{\triangle CPE}$，转化为$\frac{1}{2}PE\cdot OB=\frac{1}{2}\times 3\times(-m^2+3m)$，最后将二次函数化为顶点式即可锁定 $S_{\triangle PBC}$ 的最大值与点 P 坐标；（4）解决本问按两步走：一找（如答图 3，设 $OQ=t$，则 $CQ=3-t$，$AQ+\frac{1}{2}QC=\sqrt{t^2+1}+\dfrac{1}{2}(3-t)$，取 CQ 的中点 G，以点 Q 为圆心，QG 的长为半径作⊙Q，则当⊙Q 过点 A 时，$AQ+\frac{1}{2}QC=$⊙Q 的直径最小）、二求（由 $AQ=\frac{1}{2}QC$，解关于 t 的方程即可）.

【解题过程】（1）∵抛物线 $y=ax^2+bx+c$（$a\neq 0$）过点 $A(1,0)$，$B(3,0)$两点，

∴令抛物线解析为 $y=a(x-1)(x-3)$.

∵该抛物线过点 $C(0，3)$，

∴$3=a\times(0-1)\times(0-3)$，解得 $a=1$.

∴抛物线的解析式为 $y=(x-1)(x-3)$，即 $y=x^2-4x+3$.

∵$y=x^2-4x+3=(x-2)^2-1$，

∴抛物线的顶点 D 的坐标为$(2，-1)$.

综上，所求抛物线的解析式为 $y=x^2-4x+3$，顶点坐标为$(2，-1)$.

（2）如答图 1，连接 AD、BD，易知 $DA=DB$.

∵$OB=OC$，$\angle BOC=90°$，

∴$\angle MBA=45°$.

∵$D(2，-1)$，$A(3，0)$，

∴$\angle DBA=45°$.

∴$\angle DBM=90°$.

同理，$\angle DAM=90°$.

又∵$AM\perp BC$，

∴四边形 $ADBM$ 为矩形.

又∵$DA=DB$，

∴四边形 $ADBM$ 为正方形.

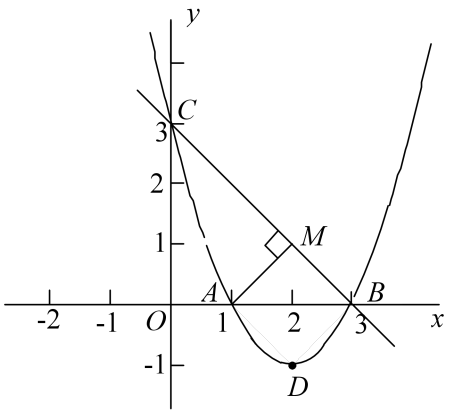


图 1

（3）如答图 2，过点 P 作 $PF\perp AB$ 于点 F，交 BC 于点 E，令 $P(m，m^2-4m+3)$，易知直线 BC 的解析式为 $y=-x+3$，则 $E(m，-m+3)$，$PE=(-m+3)-(m^2-4m+3)=-m^2+3m$.

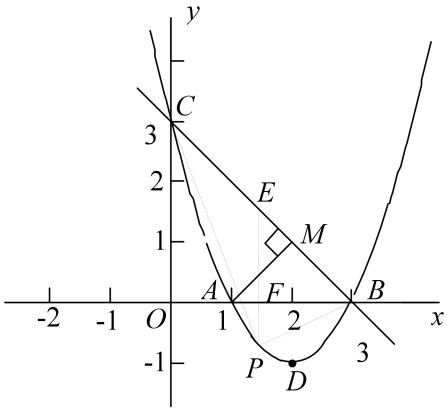


图 2

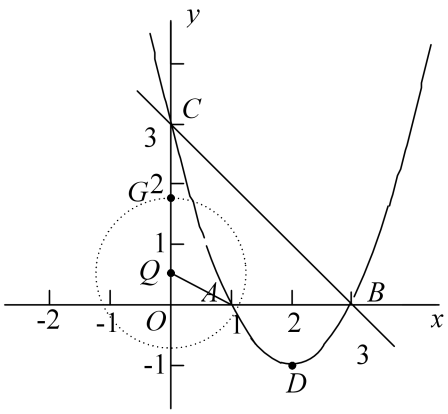


图 3

∵ $S_{\triangle PBC}=S_{\triangle PBE}+S_{\triangle CPE}=\frac{1}{2}PE\cdot BF+\frac{1}{2}PE\cdot OF=\frac{1}{2}PE\cdot OB=\frac{1}{2}\times 3\times(-m^2+3m)$

$=-\frac{3}{2}\left(m-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{27}{8}$,

∴当 $m=\frac{3}{2}$时，$S_{\triangle PBC}$有最大值为$\frac{27}{8}$，此时 P 点的坐标为$\left(\frac{3}{2},\ -\frac{3}{4}\right)$.

（4）如答图 3，设 $OQ=t$，则 $CQ=3-t$，$AQ+\frac{1}{2}QC=\sqrt{t^2+1}+\frac{1}{2}(3-t)$，

取 CQ的中点 G，以点 Q为圆心，QG的长为半径作⊙Q，则当⊙Q过点 A时，$AQ+\frac{1}{2}QC=$⊙Q的直径最小，

此时，$\sqrt{t^2+1}=\frac{1}{2}(3-t)$，解得 $t=\frac{2\sqrt{6}}{3}-1$，

于是 $AQ+\frac{1}{2}QC$的最小值为 $3-t=3-\left(\frac{2\sqrt{6}}{3}-1\right)=4-\frac{2\sqrt{6}}{3}$.

专题典型训练题

1.（2018 河南）要使代数式$\sqrt{2-3x}$有意义，则 x 的（　　）

A. 最大值为$\frac{2}{3}$　　B. 最小值为$\frac{2}{3}$

C. 最大值为$\frac{3}{2}$　　D. 最大值为$\frac{3}{2}$

【答案】A.

【解析】要使代数式$\sqrt{2-3x}$有意义，必须使 2-3x≥0，即 x≤$\frac{2}{3}$，所以 x 的最大值为$\frac{2}{3}$。

2.（2018 四川绵阳）不等边三角形 ΔABC 的两边上的高分别为 4 和 12 且第三边上的高为整数，那么此高的最大值可能为_____。

【答案】5

【解析】设 a、b、c 三边上高分别为 4、12、h

因为$2S_{\Delta ABC}=4a=12b=ch$，所以$a=3b$

又因为$c<a+b=4b$，代入$12b=ch$

得$12b<4bh$，所以$h>3$

又因为$c>a-b=2b$，代入$12b=ch$

得$12b>2bh$，所以$h<6$

所以 3<h<6，故整数 h 的最大值为 5。

3.（2018 齐齐哈尔）设 a、b 为实数，那么a^2+ab+b^2-a-2b的最小值为_____。

【答案】-1

【解析】a^2+ab+b^2-a-2b

$=a^2+(b-1)a+b^2-2b$

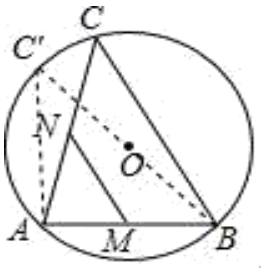
$=(a+\frac{b-1}{2})^2+\frac{3}{4}b^2-\frac{3}{2}b-\frac{1}{4}$

$=(a+\frac{b-1}{2})^2+\frac{3}{4}(b-1)^2-1\geq -1$

当$a+\frac{b-1}{2}=0$，$b-1=0$，即$a=0$，$b=1$时，

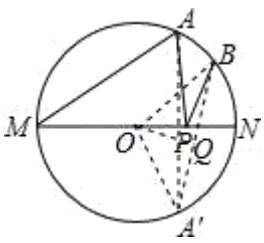
上式等号成立。故所求的最小值为－1。

4.（2018 云南）如图，MN 是⊙O 的直径，MN=4，∠AMN=40°，点 B 为弧 AN 的中点，点 P 是直径 MN 上的一个动点，则 PA+PB 的最小值为_____.



【答案】$2\sqrt{3}$.

【解析】过 A 作关于直线 MN 的对称点 A′，连接 A′B，由轴对称的性质可知 A′B 即为 PA+PB 的最小值，由对称的性质可知$\overset{\frown}{AN}=\overset{\frown}{A'N}$，再由圆周角定理可求出∠A′ON 的度数，再由勾股定理即可求解．过 A 作关于直线 MN 的对称点 A′，连接 A′B，由轴对称的性质可知 A′B 即为 PA+PB 的最小值，



连接 OB，OA′，AA′，

∵AA′ 关于直线 MN 对称，

∴$\overset{\frown}{AN}=\overset{\frown}{A'N}$，

∵∠AMN=40°，

∴∠A′ON=80°，∠BON=40°，

∴∠A′OB=120°，

过 O 作 OQ⊥A′B 于 Q，

在 Rt△A′OQ 中，OA′=2，

∴A′B=2A′Q=2$\sqrt{3}$，

即 PA+PB 的最小值 2$\sqrt{3}$.

5.（2018 海南）某水果店在两周内，将标价为 10 元/斤的某种水果，经过两次降价后的价格为 8.1 元/斤，并且两次降价的百分率相同.

（1）求该种水果每次降价的百分率；

（2）从第一次降价的第 1 天算起，第 x 天(x 为正数)的售价、销量及储存和损耗费用的相关信息如表所示. 已知该种水果的进价为 4.1 元/斤，设销售该水果第 x(天)的利润为 y(元)，求 y 与 x(1≤x<15)之间的函数关系式，并求出第几天时销售利润最大？

时间(天)	1≤x<9	9≤x<15	x≥15
售价(元/斤)	第 1 次降价后的价格	第 2 次降价后的价格	
销量(斤)	80－3x	120－x	
储存和损耗费用(元)	40＋3x	3x^2－64x＋400	

（3）在（2）的条件下，若要使第 15 天的利润比（2）中最大利润最多少 127.5 元，则第 15 天在第 14 天的价格基础上最多可降多少元？

【答案】看解析。

【解析】（1）设该种水果每次降价的百分率为 x，则第一次降价后的价格为 10(1－x)，第二次降价后的价格为 10(1－x)^2，进而可得方程；（2）分两种情况考虑，先利用“利润＝(售价－进价)×销量－储存和损耗费用”，再分别求利润的最大值，比较大小确定结论；(3)设第 15 天在第 14 天的价格基础上降 a 元，利用不等关系“(2)中最大利润－[(8.1－a－4.1)×销量－储存和损耗费用]≤127.5”求解.

解答：（1）设该种水果每次降价的百分率为 x，依题意得：

10(1－x)^2＝8.1.

解方程得：$x_1=0.1=10\%$，$x_2=1.9$(不合题意，舍去)

答：该种水果每次降价的百分率为 10%.

（2）第一次降价后的销售价格为：$10\times(1-10\%)=9$(元/斤)，

当 $1\leqslant x<9$ 时，$y=(9-4.1)(80-3x)-(40+3x)=-17.7x+352$；

当 $9\leqslant x<15$ 时，$y=(8.1-4.1)(120-x)-(3x^2-64x+400)=-3x^2+60x+80$，

综上，y 与 x 的函数关系式为：$y=\begin{cases}-17.7x+352(1\leqslant x<9，x\text{ 为整数}),\\-3x^2+60x+80(9\leqslant x<15，x\text{ 为整数}).\end{cases}$

当 $1\leqslant x<9$ 时，$y=-17.7x+352$，∴当 $x=1$ 时，$y_{最大}=334.3$(元)；

当 $9\leqslant x<15$ 时，$y=-3x^2+60x+80=-3(x-10)^2+380$，∴当 $x=10$ 时，$y_{最大}=380$(元)；

∵334.3<380，∴在第 10 天时销售利润最大.

（3）设第 15 天在第 14 天的价格上最多可降 a 元，依题意得：

$380-[(8.1-a-4.1)(120-15)-(3\times15^2-64\times15+400)]\leqslant127.5$，

解得：$a\leqslant0.5$，

则第 15 天在第 14 天的价格上最多可降 0.5 元.

6.（2018 湖北荆州）某玩具厂计划生产一种玩具熊猫，每日最高产量为 40 只，且每日产出的产品全部售出，已知生产 x 只玩具熊猫的成本为 R（元），售价每只为 P（元），且 R、P 与 x 的关系式分别为 $R=500+30x$，$P=170-2x$。

（1）当日产量为多少时，每日获得的利润为 1750 元；

（2）当日产量为多少时，可获得最大利润？最大利润是多少？

【答案】看解析。

【解析】（1）根据题意得：$1750=Px-R$

$(170-2x)x-(500+30x)=1750$

整理得 $x^2-70x+1125=0$

解得 $x_1=25$，$x_2=45$（不合题意，舍去）

（2）由题意知，利润为

$Px-R=-2x^2+140x-500=-2(x-35)^2+1950$

所以当 $x=35$ 时，最大利润为 1950 元。

7.（2018 吉林）某工程队要招聘甲、乙两种工种的工人 150 人，甲、乙两种工种的工人的月工资分别是 600 元和 1000 元，现要求乙种工种的人数不少于甲种工种人数的 2 倍，问甲、乙两种工种各招聘多少人时可使得每月所付的工资最少？

【答案】看解析。

【解析】设招聘甲种工种的工人为 x 人，则乙种工种的工人为 $(150-x)$ 人，

由题意得： $150-x\geq 2x$ 所以 $0\leq x\leq 50$

设所招聘的工人共需付月工资 y 元，

则有： $y=600x+1000(150-x)=-400x+150000$（$0\leq x\leq 50$）

因为 y 随 x 的增大而减小

所以当 $x=50$ 时， $y_{\min}=130000$（元）

8.（**经典题**）求 $\dfrac{x^2-x+1}{x^2+x+1}$ 的最大值与最小值。

【答案】最大值是 3，最小值是 $\dfrac{1}{3}$。

【解析】此题要求出最大值与最小值，直接求则较困难，若根据题意构造一个关于未知数 x 的一元二次方程；再根据 x 是实数，推得 $\Delta\geq 0$，进而求出 y 的取值范围，并由此得出 y 的最值。

设 $\dfrac{x^2-x+1}{x^2+x+1}=y$，整理得 $x^2-x+1=yx^2+yx+y$

即 $(1-y)x^2-(1+y)x+1-y=0$

因为 x 是实数，所以 $\Delta\geq 0$

即 $(1+y)^2-4(1-y)^2\geq 0$

解得 $\dfrac{1}{3}\leq y\leq 3$

所以 $\dfrac{x^2-x+1}{x^2+x+1}$ 的最大值是 3，最小值是 $\dfrac{1}{3}$。

9.（**经典题**）求代数式 $x\sqrt{1-x^2}$ 的最大值和最小值。

【答案】最大值为 1/2，最小值为-1/2.

【解析】设 $y=x\sqrt{1-x^2}$， $-1\leq x\leq 1$，再令 $x=\sin\alpha$， $-\dfrac{\pi}{2}\leq\alpha\leq\dfrac{\pi}{2}$，则有

$$y=x\sqrt{1-x^2}=\sin\alpha\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\sin\alpha\cos\alpha=\frac{1}{2}\sin 2\alpha$$

所以得 y 的最大值为 1/2，最小值为-1/2.

10.（**经典题**）求函数 $y=|x-1|-|x+4|-5$ 的最大值。

【答案】0

【解析】本题先用“零点区间讨论法”消去函数 y 中绝对值符号，然后求出 y 在各个区间上的最大值，再加以比较，从中确定出整个定义域上的最大值。

易知该函数有两个零点 $x=1$、 $x=-4$

当 $x<-4$ 时

$y=-(x-1)+(x+4)-5=0$

当$-4\le x\le 1$时

$y=-(x-1)-(x+4)-5=-2x-8$

当$x\le -4$时，得

$-10\le y=-2x-8\le 0$

当$x>1$时，$y=(x-1)-(x+4)-5=-10$

综上所述，当$x\le -4$时，y 有最大值为$y_{\max}=0$

11. （2018 山东济南）已知 x、y 为实数，且满足$x+y+m=5$，$xy+ym+mx=3$，求实数 m 最大值与最小值。

【答案】 m 的最大值是$\frac{13}{3}$，m 的最小值是－1。

【解析】由题意得$\begin{cases}x+y=5-m\\xy=3-m(x+y)=3-m(5-m)=m^2-5m+3\end{cases}$

所以 x、y 是关于 t 的方程$t^2-(5-m)t+(m^2-5m+3)=0$的两实数根，

所以 $\Delta=[-(5-m)]^2-4(m^2-5m+3)\ge 0$

即$3m^2-10m-13\le 0$

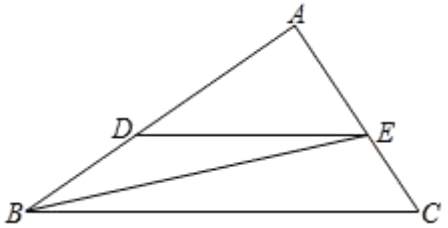
解得$-1\le m\le\frac{13}{3}$

m 的最大值是$\frac{13}{3}$，m 的最小值是－1。

12.（2019 年黑龙江省大庆市）如图，在 Rt△*ABC* 中，∠*A*＝90°．*AB*＝8*cm*，*AC*＝6*cm*，若动点 *D* 从 *B* 出发，沿线段 *BA* 运动到点 *A* 为止（不考虑 *D* 与 *B*，*A* 重合的情况），运动速度为 2*cm*/*s*，过点 *D* 作 *DE*∥*BC* 交 *AC* 于点 *E*，连接 *BE*，设动点 *D* 运动的时间为 *x*（*s*），*AE* 的长为 *y*（*cm*）.

（1）求 *y* 关于 *x* 的函数表达式，并写出自变量 *x* 的取值范围；

（2）当 *x* 为何值时，△*BDE* 的面积 *S* 有最大值？最大值为多少？



【答案】见解析。

【解析】本题主要考查相似三角形的判定、三角形的面积及涉及到二次函数的最值问题，找到等量比是解

题的关键.

（1）由平行线得△ABC∽△ADE，根据相似形的性质得关系式.

动点 D 运动 x 秒后，$BD=2x$.

又∵$AB=8$，∴$AD=8-2x$.

∵$DE/\!/BC$，

∴$\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}$，

∴$AB=\frac{6(8-2x)}{8}=6-\frac{3}{2}x$，

∴y 关于 x 的函数关系式为 $y=-\frac{3}{2}x+6$（$0<x<4$）.

（2）由 $S=\frac{1}{2}\cdot BD\cdot AE$；得到函数解析式，然后运用函数性质求解.

$S_{\triangle BDE}=\frac{1}{2}\cdot BD\cdot AE=\frac{1}{2}\times 2x\left(-\frac{3}{2}x+6\right)=-\frac{3}{2}x^2+6x$（$0<x<4$）.

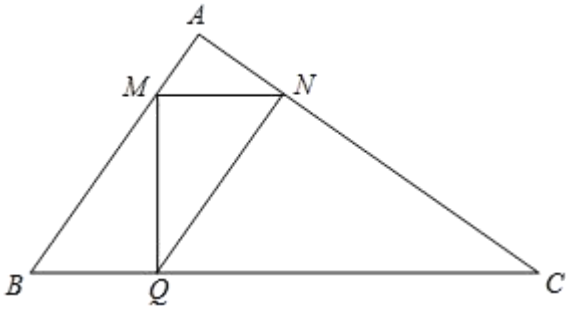
当 $x=-\frac{6}{2\times\left(-\frac{3}{2}\right)}=2$时，$S_{\triangle BDE}$最大，最大值为 $6cm^2$.

13.（2019 年宁夏）如图，在△ABC中，∠A=90°，AB=3，AC=4，点 M，Q分别是边 AB，BC上的动点（点 M不与 A，B重合），且 $MQ\perp BC$，过点 M作 BC的平行线 MN，交 AC于点 N，连接 NQ，设 BQ为 x.

（1）试说明不论 x 为何值时，总有△QBM∽△ABC；

（2）是否存在一点 Q，使得四边形 $BMNQ$为平行四边形，试说明理由；

（3）当 x 为何值时，四边形 $BMNQ$的面积最大，并求出最大值.



【答案】见解析。

【解析】本题考查的是相似三角形的判定和性质、平行四边形的判定、二次函数的性质，掌握相似三角形的判定定理、二次函数的性质是解题的关键.

（1）∵$MQ\perp BC$，

∴∠MQB=90°，

∴∠*MQB*＝∠*CAB*，又∠*QBM*＝∠*ABC*，

∴△*QBM*∽△*ABC*；

（2）根据对边平行且相等的四边形是平行四边形解答；

当 *BQ*＝*MN*时，四边形 *BMNQ* 为平行四边形，

∵*MN*// *BQ*，*BQ*＝*MN*，

∴四边形 *BMNQ* 为平行四边形；

（3）根据勾股定理求出 *BC*，根据相似三角形的性质用 *x* 表示出 *QM*、*BM*，根据梯形面积公式列出二次函数解析式，根据二次函数性质计算即可．

∵∠*A*＝90°，*AB*＝3，*AC*＝4，

∴$BC=\sqrt{AB^2+AC^2}=5$，

∵△*QBM*∽△*ABC*，

∴$\frac{QB}{AB}=\frac{QM}{AC}=\frac{BM}{BC}$，即$\frac{x}{3}=\frac{QM}{4}=\frac{BM}{5}$，

解得，$QM=\frac{4}{3}x$，$BM=\frac{5}{3}x$，

∵*MN*// *BC*，

∴$\frac{MN}{BC}=\frac{AM}{AB}$，即$\frac{MN}{5}=\frac{3-\frac{5}{3}x}{3}$，

解得，$MN=5-\frac{25}{9}x$，

则四边形 *BMNQ* 的面积＝$\frac{1}{2}\times(5-\frac{25}{9}x+x)\times\frac{4}{3}x=-\frac{32}{27}(x-\frac{45}{8})^2+\frac{75}{2}$，

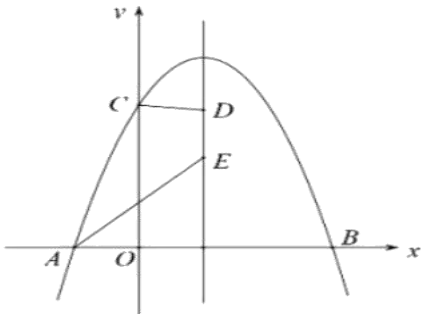
∴当 $x=\frac{45}{8}$时，四边形 *BMNQ* 的面积最大，最大值为$\frac{75}{2}$．

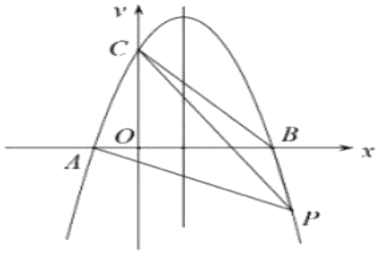
14. **（2019 广东深圳）**如图所示，抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 过点 A（－1，0），点 C（0，3），且 OB=OC．

（1）求抛物线的解析式及其对称轴；

（2）点 D，E 在直线 x=1 上的两个动点，且 DE=1，点 D 在点 E 的上方，求四边形 ACDE 的周长的最小值，

（3）点 P 为抛物线上一点，连接 CP，直线 CP 把四边形 CBPA 的面积分为 3∶5 两部分，求点 P 的坐标．





【思路分析】（1）先求出点 B 的坐标，然后把 A、B、C 三点坐标代入解析式得出方程组，解方程组即可得出 a，b，c 的值，得解析式，再用配方法或对称轴公式或中点公式可得对称轴方程；（2）利用轴对称原理作出点 C 的对称点，求出四边形 CDEA 的周长的最小值；（3）方法 1：设 CP 与 x 轴交于点 E，先根据面积关系得出 BE：AE=3:5 或 5:3，求出点 E 的坐标，进而求出直线 CE 的解析式，解直线 CE 与抛物线的解析式联立所得的方程组求出点 P 的坐标；方法 2：设 P（x，$-x^2+2x+3$），用含 x 的式子表示四边形 CBPA 的面积，然后求出 CB 的解析式，再用含 x 的式子表示出△CBP 的面积，利用面积比建立方程，解方程求出 x 的值，得出 P 的坐标.

【解题过程】（1）∵点 C（0，3），OB=OC，∴点 B（3，0）.

把 A（−1，0），C（0，3），B（3，0）代入 $y=ax^2+bx+c$，得

$$\begin{cases} a-b+c=0, \\ 9a+3b+c=0, \\ c=3, \end{cases} \text{解得} \begin{cases} a=-1, \\ b=2, \\ c=3. \end{cases}$$

∴抛物线的解析式为 $y=-x^2+2x+3$.

∵$y=-x^2+2x+3=-(x-1)^2+4$，

∴抛物线的对称轴为 x=1.

（2）如图，作点 C 关于 x=1 的对称点 C′（2，3），则 CD=C′D.

取 A′（−1，1），又∵DE=1，可证 A′D=AE.

在 Rt△AOC 中，AC=$\sqrt{OA^2+OC^2}=\sqrt{1^2+3^2}=\sqrt{10}$.

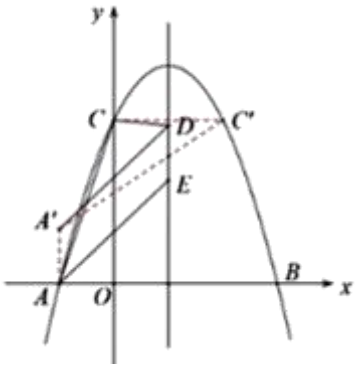
四边形 ACDE 的周长=AC+DE+CD+AE =$\sqrt{10}$+1+CD+AE.

要求四边形 ACDE 的周长的最小值，就是求 CD+AE 的最小值.

∵CD+AE=C′D+A′D，

∴当 A′D，C′三点共线时，C′D+A′D 有最小值为$\sqrt{13}$，

∴四边形 ACDE 的周长的最小值=$\sqrt{10}$+1+$\sqrt{13}$.



（3）方法 1：由题意知点 P 在 x 轴下方，连接 CP，设 PC 与 x 轴交于点 E，

∵直线 CP 把四边形 CBPA 的面积分为 3:5 两部分，

又∵$S_{\triangle CBE}$：$S_{\triangle CAE}$=$S_{\triangle PBE}$：$S_{\triangle PAE}$=BE：AE，

∴BE：AE=3:5 或 5:3，

∴点 E_1（$\frac{3}{2}$，0），E_2（$\frac{1}{2}$，0）.

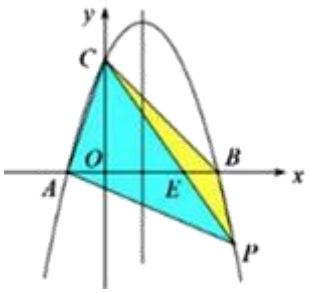
设直线 CE 的解析式为 y=kx+b，（$\frac{3}{2}$，0）和（0，3）代入，得

$\begin{cases}\frac{3}{2}k+b=0,\\ b=3,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=-2,\\ b=3.\end{cases}$

∴直线 CE 的解析式为 y=－2x+3.

同理可得，当 E_2（$\frac{1}{2}$，0）时，直线 CE 的解析式为 y=－6x+3.

由直线 CE 的解析式和抛物线的解析式联立解得 P_1（4，－5），P_2（8，－45）.



方法 2：由题意得 $S_{\triangle CBP}=\frac{3}{8}S_{\text{四边形 CBPA}}$ 或 $S_{\triangle CBP}=\frac{5}{8}S_{\text{四边形 CBPA}}$.

令 P（x，$-x^2+2x+3$），

$S_{\text{四边形 CBPA}}=S_{\triangle CAB}+S_{\triangle PAB}=6+\frac{1}{2}\times 4\cdot(x^2-2x-3)=2x^2-4x$.

直线 CB 的解析式为 y=－x+3，

作 PH∥y 轴交直线 CB 于点 H，则 H（x，－x+3），

$S_{\triangle CBP}=\frac{1}{2}OB\cdot PH=\frac{1}{2}\times 3\cdot(-x+3+x^2-2x-3)=\frac{3}{2}x^2-\frac{9}{2}x$.

当 $S_{\triangle CBP}=\frac{3}{8}S_{四边形CBPA}$ 时，$\frac{3}{2}x^2-\frac{9}{2}x=\frac{3}{8}(2x^2-4x)$，

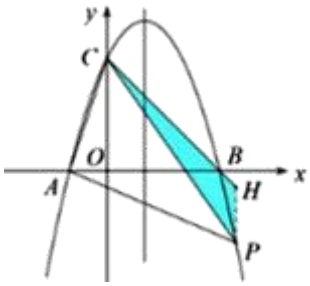
解得 $x_1=0$（舍），$x_2=4$，

∴P_1（4，−5）.

当 $S_{\triangle CBP}=\frac{5}{8}S_{四边形CBPA}$ 时，$\frac{3}{2}x^2-\frac{9}{2}x=\frac{5}{8}(2x^2-4x)$，

解得 $x_3=0$（舍），$x_4=8$，

∴P_2（8，−45）.



15.（2019 广西省贵港）已知：ΔABC 是等腰直角三角形，$\angle BAC=90°$，将 ΔABC 绕点 C 顺时针方向旋转得到△ $A'B'C$，记旋转角为 α，当 $90°<\alpha<180°$ 时，作 $A'D\perp AC$，垂足为 D，$A'D$ 与 $B'C$ 交于点 E.

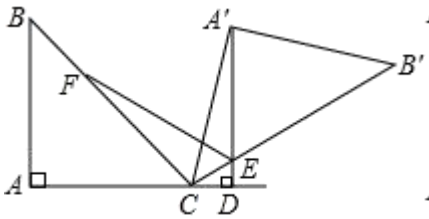


图1

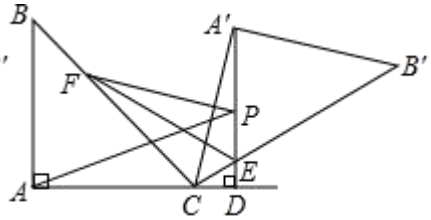


图2

（1）如图 1，当 $\angle CA'D=15°$ 时，作 $\angle A'EC$ 的平分线 EF 交 BC 于点 F.

①写出旋转角 α 的度数；

②求证：$EA'+EC=EF$；

（2）如图 2，在（1）的条件下，设 P 是直线 $A'D$ 上的一个动点，连接 PA，PF，若 $AB=\sqrt{2}$，求线段 $PA+PF$ 的最小值.（结果保留根号）.

【思路分析】（1）①解直角三角形求出 $\angle A'CD$ 即可解决问题.

②连接 $A'F$，设 EF 交 CA' 于点 O. 在 EF 时截取 $EM=EC$，连接 CM. 首先证明 $\Delta CFA'$ 是等边三角形，再证明 $\Delta FCM\cong\triangle A'CE(SAS)$，即可解决问题.

（2）如图 2 中，连接 $A'F$，PB'，AB'，作 $B'M\perp AC$ 交 AC 的延长线于 M. 证明△ $A'EF\cong\triangle A'EB'$，推

出 $EF=EB'$，推出 B'，F 关于 $A'E$ 对称，推出 $PF=PB'$，推出 $PA+PF=PA+PB'$ AB'，求出 AB' 即可解决问题.

【解题过程】（1）①解：旋转角为105°.

理由：如图 1 中，

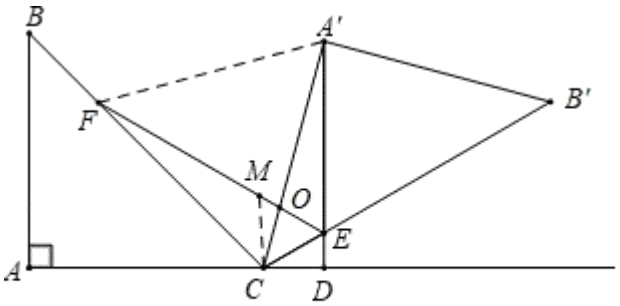


图1

$\because A'D\perp AC$，

$\therefore \angle A'DC=90°$，

$\because \angle CA'D=15°$，

$\therefore \angle A'CD=75°$，

$\therefore \angle ACA'=105°$，

$\therefore$ 旋转角为105°.

②证明：连接 $A'F$，设 EF 交 CA' 于点 O. 在 EF 时截取 $EM=EC$，连接 CM.

$\because \angle CED=\angle A'CE+\angle CA'E=45°+15°=60°$，

$\therefore \angle CEA'=120°$，

$\because FE$ 平分 $\angle CEA'$，

$\therefore \angle CEF=\angle FEA'=60°$，

$\because \angle FCO=180°-45°-75°=60°$，

$\therefore \angle FCO=\angle A'EO$，$\because \angle FOC=\angle A'OE$，

$\therefore \Delta FOC\backsim\triangle A'OE$，

$\therefore \dfrac{OF}{A'O}=\dfrac{OC}{OE}$，

$\therefore \dfrac{OF}{OC}=\dfrac{A'O}{OE}$，

$\because \angle COE=\angle FOA'$，

$\therefore \Delta COE\backsim\Delta FOA'$，

$\therefore \angle FA'O = \angle OEC = 60°$，

$\therefore$ △ $A'OF$ 是等边三角形，

$\therefore CF = CA' = A'F$，

$\because EM = EC$， $\angle CEM = 60°$，

$\therefore \Delta CEM$ 是等边三角形，

$\angle ECM = 60°$， $CM = CE$，

$\because \angle FCA' = \angle MCE = 60°$，

$\therefore \angle FCM = \angle A'CE$，

$\therefore \Delta FCM \cong$ △ $A'CE(SAS)$，

$\therefore FM = A'E$，

$\therefore CE + A'E = EM + FM = EF$．

（2）解：如图 2 中，连接 $A'F$， PB'， AB'，作 $B'M \perp AC$ 交 AC 的延长线于 M．

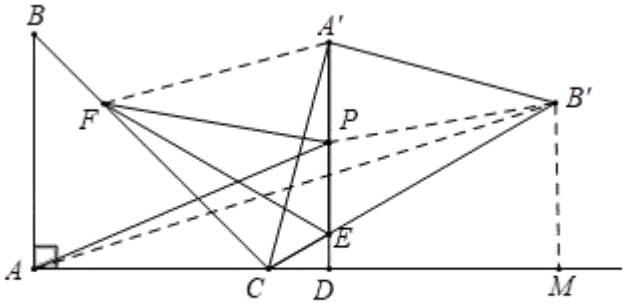


图2

由②可知， $\angle EA'F = 'EA'B' = 75°$， $A'E = A'E$， $A'F = A'B'$，

$\therefore$ △ $A'EF \cong$ △ $A'EB'$，

$\therefore EF = EB'$，

$\therefore B'$， F 关于 $A'E$ 对称，

$\therefore PF = PB'$，

$\therefore PA + PF = PA + PB'$ AB'，

在 Rt △ $CB'M$ 中， $CB' = BC = \sqrt{2}AB = 2$， $\angle MCB' = 30°$，

$\therefore B'M = \frac{1}{2}CB' = 1$， $CM = \sqrt{3}$，

$\therefore AB' = \sqrt{AM^2 + B'M^2} = \sqrt{(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2 + 1^2} = \sqrt{6+2\sqrt{6}}$．

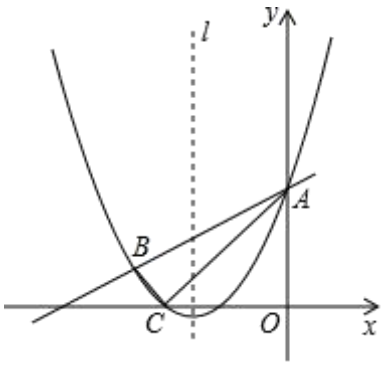
$\therefore PA + PF$ 的最小值为 $\sqrt{6+2\sqrt{6}}$．

16.（2019 贵州省安顺市）如图，抛物线 $y=\frac{1}{2}x^2+bx+c$ 与直线 $y=\frac{1}{2}x+3$ 分别相交于 A，B 两点，且此抛物线与 x 轴的一个交点为 C，连接 AC，BC．已知 A（0，3），C（﹣3，0）．

（1）求抛物线的解析式；

（2）在抛物线对称轴 l 上找一点 M，使 $|MB-MC|$ 的值最大，并求出这个最大值；

（3）点 P 为 y 轴右侧抛物线上一动点，连接 PA，过点 P 作 $PQ\perp PA$ 交 y 轴于点 Q，问：是否存在点 P 使得以 A，P，Q 为顶点的三角形与△ABC 相似？若存在，请求出所有符合条件的点 P 的坐标；若不存在，请说明理由．



【思路分析】（1）①将 A（0，3），C（﹣3，0）代入 $y=\frac{1}{2}x^2+bx+c$，即可求解；

（2）分当点 B、C、M 三点不共线时、当点 B、C、M 三点共线时，两种情况分别求解即可；

（3）分当 $\frac{PG}{AG}=\frac{BC}{AC}=\frac{1}{3}$ 时、当 $\frac{PG}{AG}=\frac{BC}{AC}=3$ 时两种情况，分别求解即可．

【解题过程】（1）①将 A（0，3），C（﹣3，0）代入 $y=\frac{1}{2}x^2+bx+c$ 得：

$\begin{cases} c=3 \\ \frac{9}{2}-3b+c=0 \end{cases}$，解得：$\begin{cases} b=\frac{5}{2}, \\ c=3 \end{cases}$

∴抛物线的解析式是 $y=\frac{1}{2}x^2+\frac{5}{2}x+3$；

（2）将直线 $y=\frac{1}{2}x+3$ 表达式与二次函数表达式联立并解得：$x=0$ 或﹣4，

∵A（0，3），∴B（﹣4，1）

①当点 B、C、M 三点不共线时，

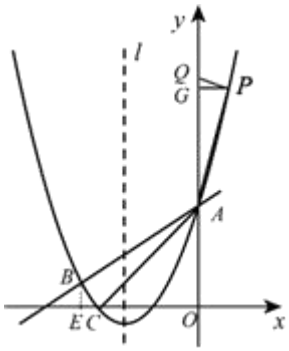
$|MB-MC|<BC$

②当点 B、C、M 三点共线时，

$|MB-MC|=BC$

∴当点、C、M 三点共线时，$|MB-MC|$ 取最大值，即为 BC 的长，

过点 B 作 x 轴于点 E，在 Rt△BEC 中，由勾股定理得 $BC=\sqrt{BE^2+CE^2}=\sqrt{2}$，



∴$|MB-MC|$ 取最大值为 $\sqrt{2}$；

（3）存在点 P 使得以 A、P、Q 为顶点的三角形与△ABC 相似．

设点 P 坐标为（x，$\frac{1}{2}x^2+\frac{5}{2}x+3$）（$x>0$）

在 Rt△BEC 中，∵$BE=CE=1$，∴$\angle BCE=45°$，

在 Rt△ACO 中，∵$AO=CO=3$，∴$\angle ACO=45°$，

∴$\angle ACB=180°-45^0-45^0=90^0$，$AC=3\sqrt{2}$，

过点 P 作 $PQ\perp PA$ 于点 P，则 $\angle APQ=90°$，

过点 P 作 $PQ\perp y$ 轴于点 G，∵$\angle PQA=\angle APQ=90°$

$\angle PAG=\angle QAP$，∴△PGA∽△QPA

∵$\angle PGA=\angle ACB=90°$

∴①当 $\frac{PG}{AG}=\frac{BC}{AC}=\frac{1}{3}$ 时，

△PAG∽△BAC，

∴$\frac{x}{\frac{1}{2}x^2+\frac{5}{2}x+3-3}=\frac{1}{3}$，

解得 $x_1=1$，$x_2=0$，（舍去）

∴点 P 的纵坐标为 $\frac{1}{2}\times1^2+\frac{5}{2}\times1+3=6$，

∴点 P 为（1，6）；

②当 $\frac{PG}{AG}=\frac{BC}{AC}=3$ 时，

△PAG∽△ABC，

∴$\frac{x}{\frac{1}{2}x^2+\frac{5}{2}x+3-3}=3$，

解得 $x_1=-\frac{13}{3}$（舍去），$x_2=0$（舍去），

∴此时无符合条件的点 P

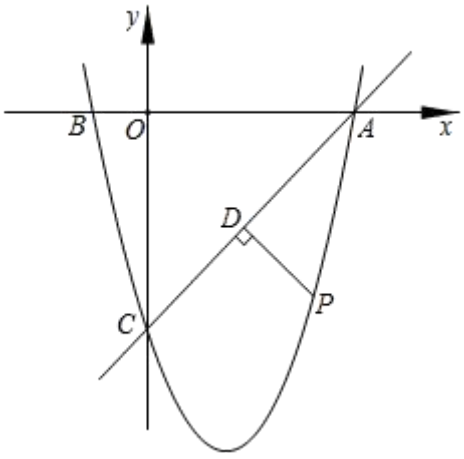
综上所述，存在点 P（1，6）.

17.（2019 广西贺州）如图，在平面直角坐标系中，已知点 B 的坐标为 $(-1,0)$，且 $OA=OC=4OB$，抛物线 $y=ax^2+bx+c(a\neq 0)$ 图象经过 A，B，C 三点.

（1）求 A，C 两点的坐标；

（2）求抛物线的解析式；

（3）若点 P 是直线 AC 下方的抛物线上的一个动点，作 $PD\perp AC$ 于点 D，当 PD 的值最大时，求此时点 P 的坐标及 PD 的最大值.



【思路分析】（1）$OA=OC=4OB=4$，即可求解；

（2）抛物线的表达式为：$y=a(x+1)(x-4)=a(x^2-3x-4)$，即可求解；

（3）$PD=HP\sin\angle PFD=\frac{\sqrt{2}}{2}(x-4-x^2+3x+4$，即可求解.

【解题过程】（1）$OA=OC=4OB=4$，

故点 A、C 的坐标分别为 $(4,0)$、$(0,-4)$；

（2）抛物线的表达式为：$y=a(x+1)(x-4)=a(x^2-3x-4)$，

即 $-4a=-4$，解得：$a=1$，

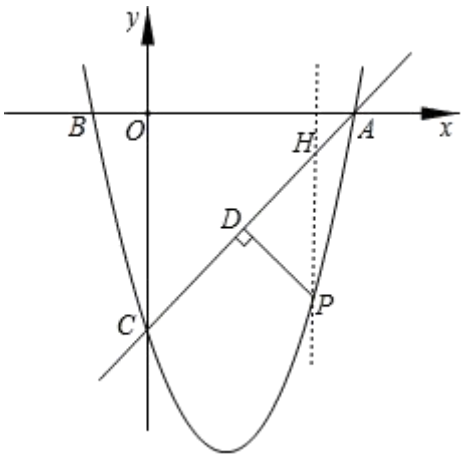
故抛物线的表达式为：$y=x^2-3x-4$；

（3）直线 CA 过点 C，设其函数表达式为：$y=kx-4$，

将点 A 坐标代入上式并解得：$k=1$，

故直线 CA 的表达式为：$y=x-4$，

过点 P 作 y 轴的平行线交 AC 于点 H，



$\because OA=OC=4$，$\therefore \angle OAC=\angle OCA=45°$，

$\because PH//y$ 轴，$\therefore \angle PHD=\angle OCA=45°$，

设点 $P(x,x^2-3x-4)$，则点 $H(x,x-4)$，

$PD=HP\sin\angle PFD=\frac{\sqrt{2}}{2}(x-4-x^2+3x+4)=-\frac{\sqrt{2}}{2}x^2+2\sqrt{2}x$，

$\because -\frac{\sqrt{2}}{2}<0$，$\therefore PD$ 有最大值，当 $x=2$ 时，其最大值为 $2\sqrt{2}$，

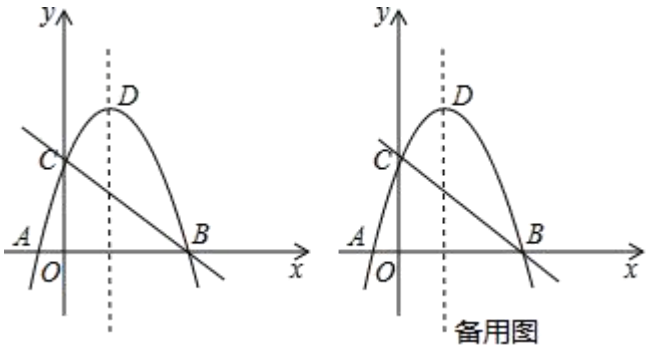
此时点 $P(2,-6)$.

18.（2019 内蒙古赤峰）如图，直线 $y=-x+3$ 与 x 轴、y 轴分别交于 B、C 两点，抛物线 $y=-x^2+bx+c$ 经过点 B、C，与 x 轴另一交点为 A，顶点为 D.

（1）求抛物线的解析式；

（2）在 x 轴上找一点 E，使 $EC+ED$ 的值最小，求 $EC+ED$ 的最小值；

（3）在抛物线的对称轴上是否存在一点 P，使得 $\angle APB=\angle OCB$？若存在，求出 P 点坐标；若不存在，请说明理由.



【思路分析】（1）直线 $y=-x+3$ 与 x 轴、y 轴分别交于 B、C 两点，则点 B、C 的坐标分别为（3，0）、（0，3），将点 B、C 的坐标代入二次函数表达式，即可求解；

（2）如图1，作点C关于x轴的对称点C'，连接CD'交x轴于点E，则此时$EC+ED$为最小，即可求解；

（3）分点P在x轴上方、点P在x轴下方两种情况，分别求解.

【解题过程】（1）直线$y=-x+3$与x轴、y轴分别交于B、C两点，则点B、C的坐标分别为（3，0）、（0，3），

将点B、C的坐标代入二次函数表达式得：$\begin{cases}-9+3b+c=0\\c=3\end{cases}$，解得：$\begin{cases}b=2\\c=3\end{cases}$，

故函数的表达式为：$y=-x^2+2x+3$，

令$y=0$，则$x=-1$或3，故点A（-1，0）；

（2）如图1，作点C关于x轴的对称点C'，连接CD'交x轴于点E，则此时$EC+ED$为最小，

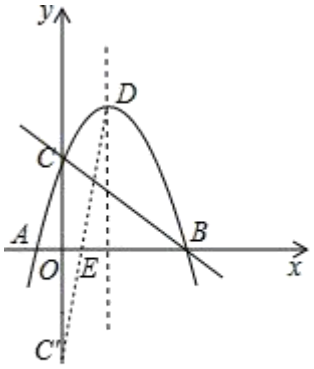


图1

函数顶点坐标为（1，4），点C'（0，-3），

将CD的坐标代入一次函数表达式并解得：

直线CD的表达式为：$y=7x-3$，

当$y=0$时，$x=\frac{3}{7}$，故点E（$\frac{3}{7}$，x）；

（3）①当点P在x轴上方时，如下图2，

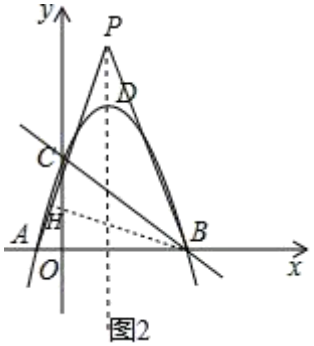


图2

∵$OB=OC=3$，则$\angle OCB=45°=\angle APB$，

过点B作$BH\perp AH$，设$PH=AH=m$，

则 $PB=PA=\sqrt{2}m$，

由勾股定理得：$AB^2=AH^2+BH^2$，

$16=m^2+(\sqrt{2}m-m)^2$，解得：$m=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{66}}{2}$（负值已舍去），

则 $PB=\sqrt{2}m=1+\sqrt{33}$，

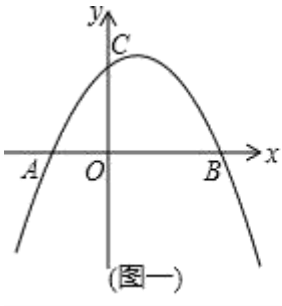
则 $y_P=\sqrt{(1+\sqrt{33})^2+2^2}=\sqrt{10}-\sqrt{3}$；

②当点 P 在 x 轴下方时，

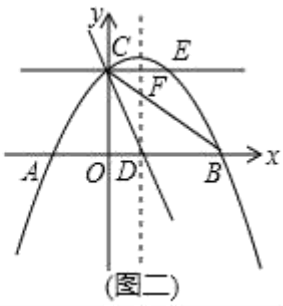
则 $y_P=-(\sqrt{10}-\sqrt{3})$；

故点 P 的坐标为（1，$\sqrt{10}-\sqrt{3}$）或（1，$\sqrt{3}-\sqrt{10}$）.

19.（2019•湘潭）如图一，抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 过 A（－1，0）B（3.0）、C（0，$\sqrt{3}$）三点



(图一)



(图二)

（1）求该抛物线的解析式；

（2）P（x_1，y_1）、Q（4，y_2）两点均在该抛物线上，若 $y_1\leqslant y_2$，求 P 点横坐标 x_1 的取值范围；

（3）如图二，过点 C 作 x 轴的平行线交抛物线于点 E，该抛物线的对称轴与 x 轴交于点 D，连结 CD、CB，点 F 为线段 CB 的中点，点 M、N 分别为直线 CD 和 CE 上的动点，求△FMN 周长的最小值.

【分析】（1）将三个点的坐标代入，求出 a、b、c，即可求出关系式；

（2）可以求出点 Q（4，y_2）关于对称轴的对称点的横坐标为：$x=-2$，根据函数的增减性，可以求出当 $y_1\leqslant y_2$ 时 P 点横坐标 x_1 的取值范围；

（3）由于点 F 是 BC 的中点，可求出点 F 的坐标，根据对称找出 F 关于直线 CD、CE 的对称点，连接两个对称点的直线与 CD、CE 的交点 M、N，此时三角形的周长最小，周长就等于这两个对称点之间的线段的长，根据坐标，和勾股定理可求.

【解答】（1）∵抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 过 A（－1，0）B（3.0）、C（0，$\sqrt{3}$）三点

$\therefore\begin{cases}a-b+c=0\\9a+3b+c=0\\c=\sqrt{3}\end{cases}$解得：$a=-\frac{\sqrt{3}}{3}$，$b=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，$c=\sqrt{3}$；

∴抛物线的解析式为：$y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x^2+\frac{2\sqrt{3}}{3}x+\sqrt{3}$.

（2）抛物线的对称轴为 $x=1$，抛物线上与 $Q(4, y_2)$ 相对称的点 Q' $(-2, y_2)$

$P(x_1, y_1)$ 在该抛物线上，$y_1 \leqslant y_2$，根据抛物线的增减性得：

$\therefore x_1 \leqslant -2$ 或 $x_1 \geqslant 4$

答：P 点横坐标 x_1 的取值范围：$x_1 \leqslant -2$ 或 $x_1 \geqslant 4$.

（3）$\because C(0, \sqrt{3})$，B，$(3, 0)$，$D(1, 0)$

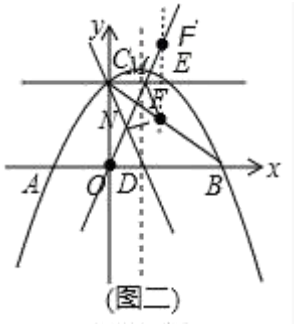
$\therefore OC=\sqrt{3}$，$OB=3$，OD，$=1$

$\because F$ 是 BC 的中点，$\therefore F(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$

当点 F 关于直线 CE 的对称点为 F'，关于直线 CD 的对称点为 F''，直线 F' F'' 与 CE、CD 交点为 M、N，此时△FMN 的周长最小，周长为 F' F'' 的长，由对称可得到：F' $(\frac{3}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2})$，$F''$ $(0, 0)$ 即点 O，

F' F'' $=F'$ $O=\sqrt{(\frac{3}{2})^2+(\frac{3\sqrt{3}}{2})^2}=3$,

即：△FMN 的周长最小值为 3，



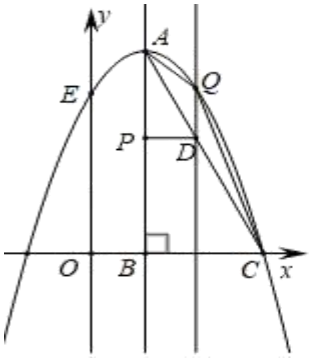
(图二)

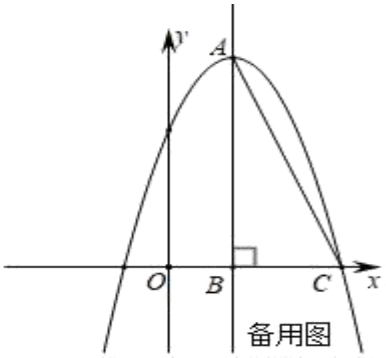
20.（2019•辽阳）如图，在平面直角坐标系中，Rt△ABC 的边 BC 在 x 轴上，$\angle ABC=90°$，以 A 为顶点的抛物线 $y=-x^2+bx+c$ 经过点 $C(3, 0)$，交 y 轴于点 $E(0, 3)$，动点 P 在对称轴上.

（1）求抛物线解析式；

（2）若点 P 从 A 点出发，沿 $A \rightarrow B$ 方向以 1 个单位/秒的速度匀速运动到点 B 停止，设运动时间为 t 秒，过点 P 作 $PD \perp AB$ 交 AC 于点 D，过点 D 平行于 y 轴的直线 l 交抛物线于点 Q，连接 AQ，CQ，当 t 为何值时，△ACQ 的面积最大？最大值是多少？

（3）若点 M 是平面内的任意一点，在 x 轴上方是否存在点 P，使得以点 P，M，E，C 为顶点的四边形是菱形，若存在，请直接写出符合条件的 M 点坐标；若不存在，请说明理由.





【分析】（1）将点 C、E 的坐标代入二次函数表达式，即可求解；

（2）$S_{\triangle ACQ}=\frac{1}{2}\times DQ\times BC$，即可求解；

（3）分 EC 是菱形一条边、EC 是菱形一对角线两种情况，分别求解即可.

【解答】解：（1）将点 C、E 的坐标代入二次函数表达式得：$\begin{cases}-9+3b+c=0\\c=3\end{cases}$，解得：$\begin{cases}b=2\\c=3\end{cases}$，

故抛物线的表达式为：$y=-x^2+2x+3$，

则点 A（1，4）；

（2）将点 A、C 的坐标代入一次函数表达式并解得：

直线 AC 的表达式为：$y=-2x+6$，

点 P（1，$4-t$），则点 D（$\frac{t+2}{2}$，$4-t$），设点 Q（$\frac{t+2}{2}$，$4-\frac{t^2}{4}$），

$S_{\triangle ACQ}=\frac{1}{2}\times DQ\times BC=-\frac{1}{4}t^2+t$，

∵ $-\frac{1}{4}<0$，故 $S_{\triangle ACQ}$ 有最大值，当 $t=2$ 时，其最大值为 1；

（3）设点 P（1，m），点 M（x，y），

①当 EC 是菱形一条边时，

当点 M 在 x 轴下方时，

点 E 向右平移 3 个单位、向下平移 3 个单位得到 C，

则点 P 平移 3 个单位、向下平移 3 个单位得到 M，

则 $1+3=x$，$m-3=y$，

而 $MP=EP$ 得：$1+(m-3)^2=(x-1)^2+(y-m)^2$，

解得：$y=m-3=\sqrt{17}$，

故点 M（4，$\sqrt{17}$）；

当点 M 在 x 轴上方时，

同理可得：点 M（﹣2，$3+\sqrt{14}$）；

②当 EC 是菱形一对角线时，

则 EC 中点即为 PM 中点，

则 $x+1=3$，$y+m=3$，

而 $PE=PC$，即 $1+(m-3)^2=4+(m-2)^2$，

解得：$m=1$，

故 $x=2$，$y=3-m=3-1=2$，

故点 M（2，2）；

综上，点 M（4，$\sqrt{17}$）或（﹣2，$3+\sqrt{14}$）或 M（2，2）．