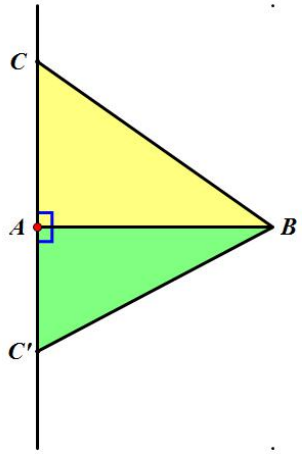
直角三角形存在性问题知识精讲

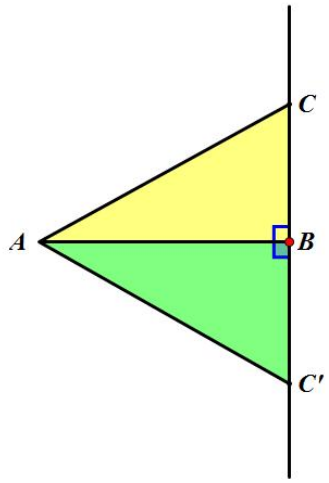
1. “两线一圆”几何法

已知线段 AB，在平面内找一点 C，使△ABC 为等腰三角形。

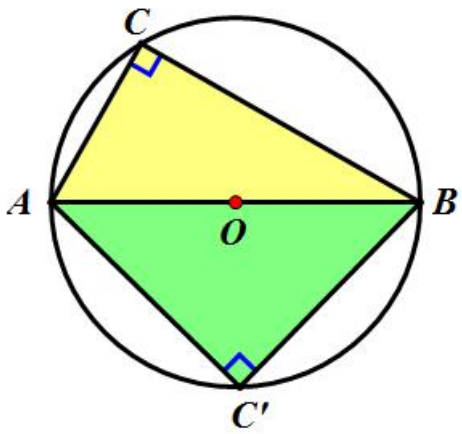
①过点 A 作线段 AB 的垂线，除点 A 外，垂线上任意一点都可以与 A、B 两点组成直角三角形；



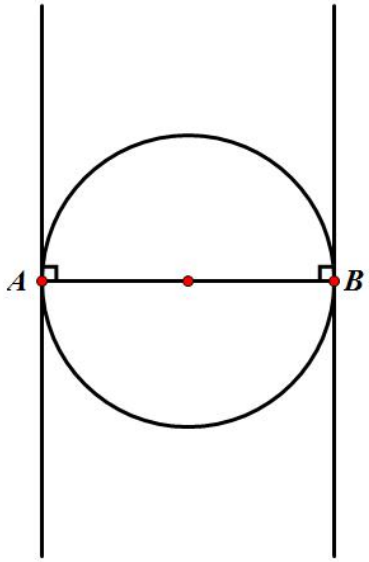
②过点 B 作线段 AB 的垂线，除点 B 外，垂线上任意一点都可以与 A、B 两点组成直角三角形；



③以线段 AB 为直径作圆，除 AB 的中点（圆心）外，圆上任意一点都可以与 A、B 两点组成直角三角形.



同样的，我们将上述情况放到同一个图形中，如下图所示：（AB 所在直线上的点要去掉，即为图中红色的点）



“两线一圆”法会得到无数个满足条件的点 C，一般题目中也会对 C 点有限制条件，使得 C 点的个数变为有限的，所以此类题一定要考虑全面，将所有满足题中条件的点准确找出来，不能多，也不能少。

2. 两点间距离公式代数法

代数法解题步骤：（以上述题目为例）

（1）表示出 A、B、C 的坐标；

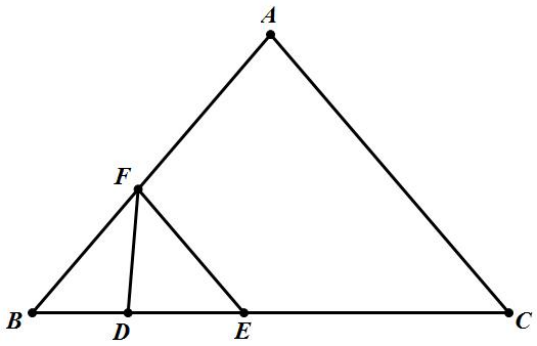
（2）表示出线段 AB、AC、BC 的长；

（3）分类列方程：①$AB^2+AC^2=BC^2$，②$AB^2+BC^2=AC^2$，③$AC^2+BC^2=AB^2$；

（3）解方程；

（4）检验。

例 1：如图所示，在$\triangle ABC$中，$AB=AC=10$，$\cos\angle B=\frac{4}{5}$，D、E 为线段 BC 上的两个动点，且$DE=3$（E 在 D 的右边），运动初始时 D 与 B 重合，当 E 与 C 重合时运动停止，过点 E 作$EF\parallel AC$交 AB 于 F，连接 DF，设$BD=x$，如果$\triangle BDF$为直角三角形，求x的值.



【解答】$x=3$或 $x=\frac{75}{7}$

【解析】在$\triangle BDF$中，$\angle B$是确定的锐角，那么按照直角顶点分类，直角三角形 BDF 存在两种情况，如果把夹$\angle B$的两条边用含有x的式子表示出来，分两种情况列方程就可以了.

如图 1，作$AH\perp BC$，垂足为 H，那么 H 为 BC 的中点，

在$Rt\triangle ABH$中，$AB=10,\cos\angle B=\frac{4}{5},\therefore BH=8,\therefore BC=16$，

由$EF\parallel AC$得$\frac{BF}{BA}=\frac{BE}{BC}$，即$\frac{BF}{10}=\frac{x+3}{16}$，解得$BF=\frac{5}{8}(x+3)$，

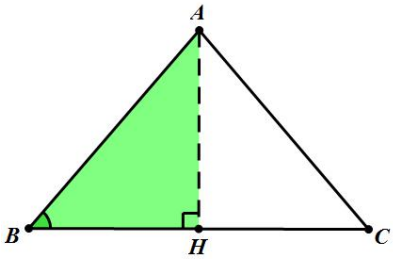


图1

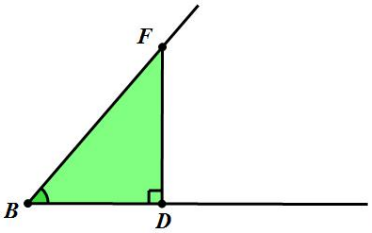


图2

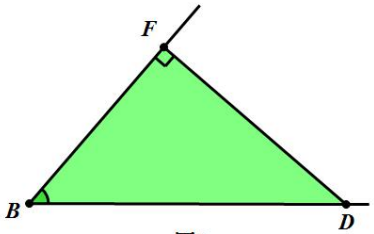


图3

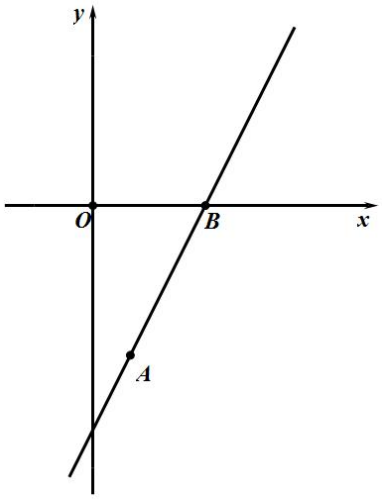
①如图 2，当$\angle BDF=90°$时，由$\cos\angle B=\frac{BD}{BF}=\frac{4}{5}$，得$BD=\frac{4}{5}BF$，

$\therefore x=\frac{4}{5}\times\frac{5}{8}(x+3)$，解得$x=3$；

②如图 3，当$\angle BFD=90°$时，$\cos\angle B=\frac{BF}{BD}=\frac{4}{5}$，得$BF=\frac{4}{5}BD$，

$\therefore\frac{5}{8}x+\frac{15}{8}=\frac{4}{5}x$，解得$x=\frac{75}{7}$.

例 2：如图，已知直线$y=kx-6$经过点$A(1,-4)$，与x轴相交于点 B，若点 Q 是y轴上一点，且$\triangle ABQ$为直角三角形，求点 Q 的坐标.

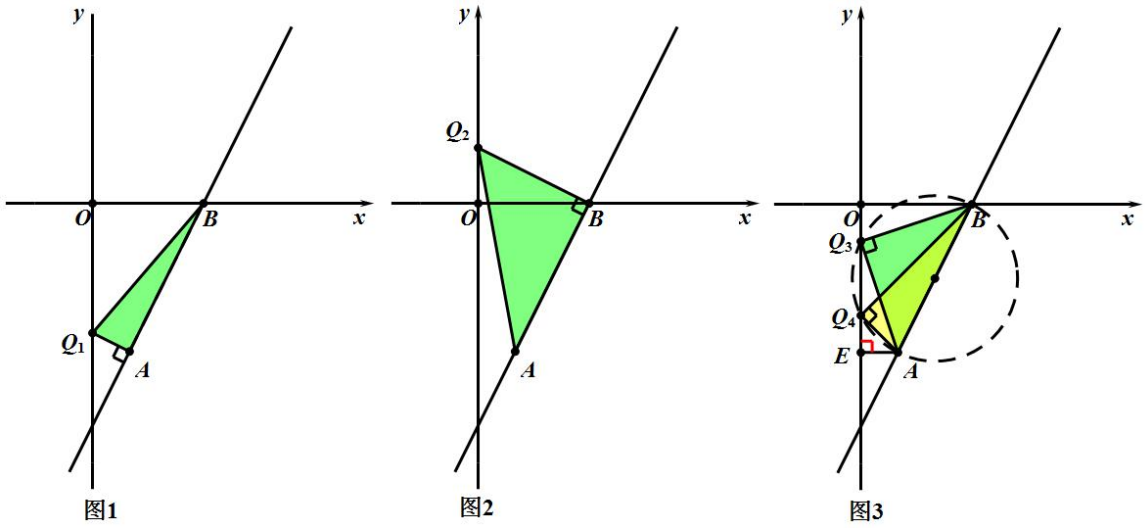


【解答】$Q_1\left(0,-\frac{7}{2}\right)$，$Q_2\left(0,\frac{3}{2}\right)$，$Q_3(0,-1)$，$Q_4(0,-3)$

【解析】将$A(1,-4)$代入$y=kx-6$中，解得$k=2$，$\therefore y=2x-6$，$\therefore B(3,0)$，

①如图 1，过点 A 作 AB 的垂线交y轴于Q_1，

由 AB 的解析式可得AQ_1的解析式为$y=-\frac{1}{2}x-\frac{7}{2}$，即$Q_1\left(0,-\frac{7}{2}\right)$；



②如图 2，过点 B 作 AB 的垂线交y轴于Q_2，

由 AB 的解析式可得BQ_2的解析式为$y=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$，即$Q_2\left(0,\frac{3}{2}\right)$；

③如图 3，以 AB 为直径画圆与y轴分别交于Q_3、Q_4，作$AE\perp y$轴，垂足为点 E，则$\triangle BOQ_3\backsim\triangle Q_3EA$，

$\therefore\frac{OB}{Q_3E}=\frac{OQ_3}{AE}$，即$\frac{3}{4-OQ_3}=\frac{OQ_3}{1}$，解得$OQ_3=1$或 3，$\therefore Q_3(0,-1),Q_4(0,-3)$，

综上，$Q_1\left(0,-\frac{7}{2}\right)$，$Q_2\left(0,\frac{3}{2}\right)$，$Q_3(0,-1)$，$Q_4(0,-3)$.