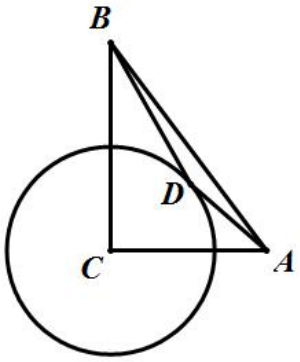
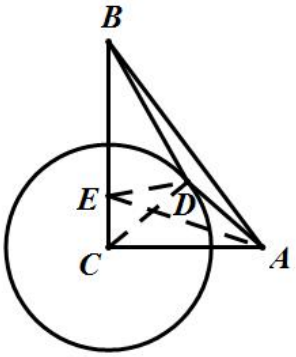
几何最值之阿氏圆巩固练习

1. 如图，已知 $AC=6$，$BC=8$，$AB=10$，$\odot C$ 的半径为 4，点 D 是 $\odot C$ 上的动点，连接 AD，连接 AD、BD，则 $AD+\frac{1}{2}BD$ 的最小值为_____.



【解答】$2\sqrt{10}$

【解析】连接 CD，在 BC 上取点 E，使得 $CE=2$，连接 AE、ED，如图所示：



$\because CD=4$，$BC=8$，$CE=2$，$\therefore CD^2=26=2\times 8=CE\cdot CB$，

$\therefore \frac{CD}{CE}=\frac{BC}{CD}$，

$\because \angle BCD=\angle BCD$，$\therefore \triangle CDE\backsim\triangle CBD$，

$\therefore \frac{DE}{BD}=\frac{CE}{CD}$，$\therefore \frac{DE}{BD}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$，

$\therefore BD=2DE$，$\therefore DE=\frac{1}{2}BD$，

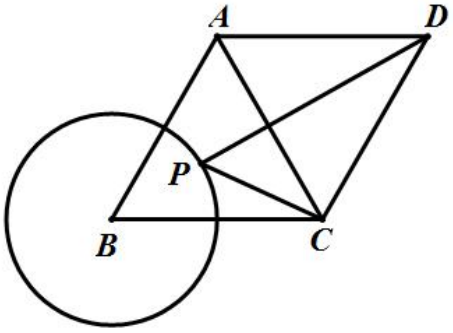
$\therefore AD+\frac{1}{2}BD=AD+DE$，

根据两点之间，线段最短，当点 D 在 AE 上时，$AD+DE$ 最小，最小值就是 AE 的长，

$\because AC^2+BC^2=10^2=AB^2$，$\therefore \angle ACB=90^\circ$，

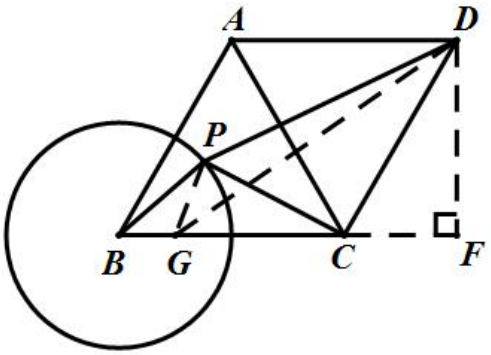
$\therefore AE=\sqrt{6^2+2^2}=2\sqrt{10}$，$\therefore AD+\frac{1}{2}BD$ 的最小值是 $2\sqrt{10}$.

2. 如图，已知菱形 $ABCD$ 的边长为 4，$\angle B=60^\circ$，$\odot B$ 的半径为 2，P 为$\odot B$ 上一动点，则 $PD+\frac{1}{2}PC$ 的最小值为_____.



【解答】$\sqrt{37}$

【解析】在 BC 上取一点 G，使得 $BG=1$，过点 D 作 $DF\perp BC$ 的延长线交于点 F，连接 DG、BP，如图所示：



$\because \frac{PB}{BG}=\frac{2}{1}=2,\frac{BC}{PB}=\frac{4}{2}=2,\therefore \frac{PB}{BG}=\frac{BC}{PB}$,

$\because \angle PBG=\angle PBC$，$\therefore \triangle PBG\backsim\triangle CBP$,

$\therefore \frac{PG}{PC}=\frac{BG}{PB}=\frac{1}{2},\therefore PG=\frac{1}{2}PC,\therefore PD+\frac{1}{2}PC=DP+PG$

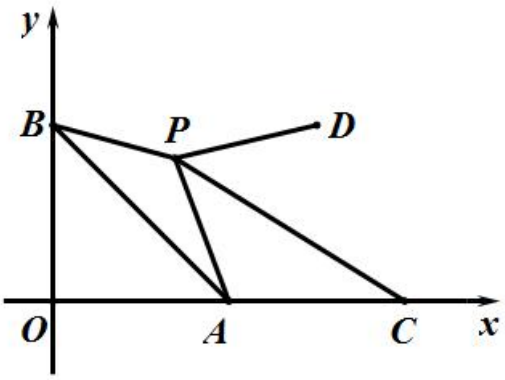
$\because DP+PG\geqslant DG$，$\therefore$当 D、G、P 三点共线时，$PD+\frac{1}{2}PC$ 的值最小，最小值为 DG,

在 $Rt\triangle CDF$ 中，$\angle DCF=60^\circ$，$CD=4$，$\therefore DF=CD\cdot\sin 60^\circ=2\sqrt{3},\therefore CF=2$，

在 $Rt\triangle GDF$ 中，$DG=\sqrt{\left(2\sqrt{3}\right)^2+5^2}=\sqrt{37}$,

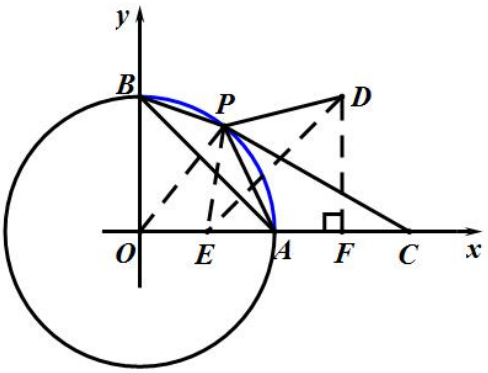
$\therefore PD+\frac{1}{2}PC$ 的最小值为 $\sqrt{37}$.

3. 如图，在平面直角坐标系中，A（2，0）、B（0，2）、C（4，0）、D（3，2），P 是$\triangle AOB$ 外部的第一象限内一动点，且$\angle BPA=135^\circ$，则 $2PD+PC$ 的最小值是_____.



【解答】$4\sqrt{2}$

【解析】依题意可得 $OA=OB=2$，$\angle BPA=135°$，∴点 P 的轨迹是以原点为圆心，OA 长为半径的圆 O 上的劣弧 AB，构造圆 O，连接 OP，在 OC 上截取 $OE=1$，连接 PE、ED，过点 D 作 $DF\perp OC$ 于点 F，如图所示：



$\because \dfrac{OP}{OC}=\dfrac{OE}{OP}=\dfrac{1}{2}$，$\angle POC=\angle EOP$，$\therefore \triangle POC\backsim\triangle EOP$，

$\therefore \dfrac{PE}{PC}=\dfrac{1}{2}$，$\therefore \dfrac{1}{2}PC=PE$，

$\therefore 2PD+PC=2\left(PD+\dfrac{1}{2}PC\right)=2(PD+PE)\geqslant 2DE$，

当 E、P、D 三点共线时，$PD+PE$ 的值最小，最小值为 DE 的值，

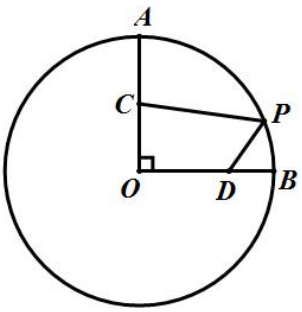
$\because DF\perp OC$ 于点 F，则 $DF=2$，$EF=2$，$\therefore DE=\sqrt{EF^2+DF^2}=2\sqrt{2}$，

$\therefore 2PD+PC$ 的最小值为 $2DE=4\sqrt{2}$.

4. 如图，点 A、B 在⊙O 上，且 $OA=OB=6$，且 $OA\perp OB$，点 C 是 OA 的中点，点 D 在 OB 上，且 $OD=4$，动点 P 在⊙O 上.

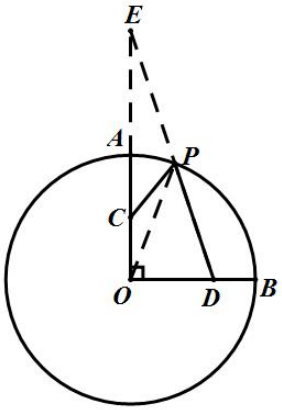
（1）求 $2PC+PD$ 的最小值；

（2）求 $2PC+3PD$ 的最小值.



【解答】（1）$4\sqrt{10}$；（2）$6\sqrt{10}$

【解析】（1）连接 OP，在射线 OA 上截取 $AE=6$，连接 PE，如图所示：



则 $OE=OA+AE=12$，

$\because C$ 是 OA 的中点，$\therefore OC=\frac{1}{2}OA=3$，$\therefore \frac{OP}{OC}=\frac{OE}{OP}=2$，

又 $\because \angle POC=\angle EOP$，$\therefore \triangle OPC \backsim \triangle OEP$，$\therefore \frac{PE}{CP}=2$，

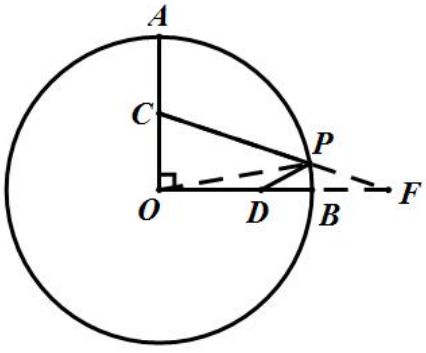
$\therefore PE=2CP$，$\therefore 2PC+PD=PE+PD\geqslant DE$，

当 P、D、E 三点共线时，$2PC+PD$ 的值最小，

在 $Rt\triangle ODE$ 中，$DE=\sqrt{OD^2+OE^2}=\sqrt{4^2+12^2}=4\sqrt{10}$，

$\therefore 2PC+PD$ 的最小值是 $4\sqrt{10}$；

（2）在射线 OB 上截取 $BF=3$，连接 CF 交 $\odot O$ 于点 P，连接 OP，如图所示：



$OF=OB+BF=9$，

$\because OD=4$，$\therefore \dfrac{PF}{DP}=\dfrac{3}{2},\therefore PF=\dfrac{3}{2}PD$，

$\therefore 2PC+3PD=2\left(PC+\dfrac{3}{2}PD\right)=2(PC+PF)\geqslant 2CF$，

当 C、P、F 三点共线时，$2PC+3PD$ 的值最小，

在 $Rt\triangle OCF$ 中，$CF=\sqrt{OC^2+OF^2}=\sqrt{3^2+9^2}=3\sqrt{10}$，

$\therefore 2PC+3PD$ 的最小值为 $6\sqrt{10}$.

5. 如图 1，抛物线 $y=ax^2+(a+3)x+3$（$a\neq 0$）与 x 轴交于点 A（4，0），与 y 轴交于点 B，在 x 轴上有一动点 E（m，0）（$0<m<4$），过点 E 作 x 轴的垂线交直线 AB 于点 N，交抛物线于点 P，过点 P 作 $PM\perp AB$ 于点 M.

（1）求 a 的值和直线 AB 的函数表达式；

（2）设 $\triangle PMN$ 的周长为 C_1，$\triangle AEN$ 的周长为 C_2，若 $\dfrac{C_1}{C_2}=\dfrac{6}{5}$，求 m 的值；

（3）如图 2，在（2）条件下，将线段 OE 绕点 O 逆时针旋转得到 OE'，旋转角为 α（$0°<\alpha<90°$），连接 $E'A$、$E'B$，求 $E'A+\dfrac{2}{3}E'B$ 的最小值.

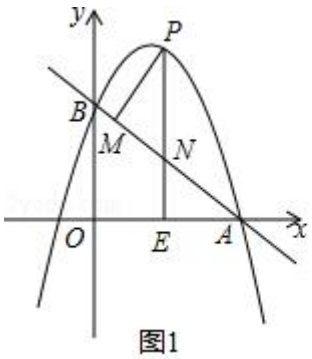


图1

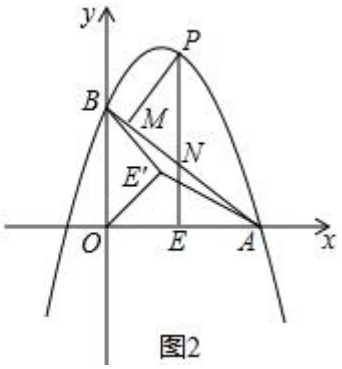


图2

【解答】（1）$y=-\dfrac{3}{4}x+3$；（2）$m=2$；（3）$\dfrac{3}{4}\sqrt{10}$

【解析】（1）令 $y=0$，则 $ax^2+(a+3)x+3=0$，

$\therefore (x+1)(ax+3)=0$，

$\therefore x=-1$ 或 $-\dfrac{3}{a}$，

$\because$ 抛物线 $y=ax^2+(a+3)x+3$（$a\neq 0$）与 x 轴交于点 A（4，0），

$\therefore -\dfrac{3}{a}=4$，

$\therefore a=-\frac{3}{4}$.

$\because A$（4，0），B（0，3），

设直线 AB 解析式为 $y=kx+b$，则 $\begin{cases} b=3 \\ 4k+b=0 \end{cases}$，

解得 $\begin{cases} k=-\frac{3}{4} \\ b=3 \end{cases}$，

$\therefore$ 直线 AB 解析式为 $y=-\frac{3}{4}x+3$.

（2）如图 1 中，

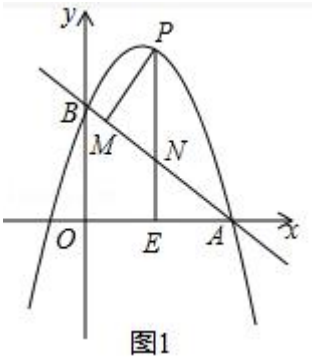


图1

$\because PM\perp AB$，$PE\perp OA$，

$\therefore \angle PMN=\angle AEN$，$\because \angle PNM=\angle ANE$，

$\therefore \triangle PNM\backsim\triangle ANE$，

$\therefore \frac{PN}{AN}=\frac{6}{5}$，

$\because NE/\!/OB$，

$\therefore \frac{AN}{AB}=\frac{AE}{OA}$，

$\therefore AN=\frac{5}{4}$（4 - m），

$\because$ 抛物线解析式为 $y=-\frac{3}{4}x^2+\frac{9}{4}x+3$，

$\therefore PN=-\frac{3}{4}m^2+\frac{9}{4}m+3-(-\frac{3}{4}m+3)=-\frac{3}{4}m^2+3m$，

$\therefore \frac{-\frac{3}{4}m^2+3m}{\frac{5}{4}(4-m)}=\frac{6}{5}$，解得 $m=2$.

（3）如图 2 中，在 y 轴上 取一点 M' 使得 $OM'=\frac{3}{4}$，连接 AM'，在 AM' 上取一点 E' 使得 OE'

$=OE$.

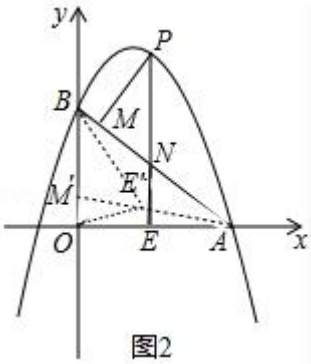


图2

$\because OE'=2$，$OM'\cdot OB=\frac{3}{4}\times 3=4$，

$\therefore OE'^{2}=OM'\cdot OB$，

$\therefore \frac{OE'}{OM'}=\frac{OB}{OE'}$，$\because \angle BOE'=\angle M'OE'$，

$\therefore \triangle M'OE'\backsim\triangle E'OB$，

$\therefore \frac{M'E'}{BE'}=\frac{OE'}{OB}=\frac{2}{3}$，

$\therefore M'E'=\frac{2}{3}BE'$，

$\therefore AE'+\frac{2}{3}BE'=AE'+E'M'=AM'$，此时 $AE'+\frac{2}{3}BE'$ 最小（两点间线段最短，A、M'、E' 共线时），

最小值 $=AM'=\sqrt{4^2+\left(\frac{4}{3}\right)^2}=\frac{4}{3}\sqrt{10}$.

6. 如图 1，在 $Rt\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=90°$，$CB=4$，$CA=6$，$\odot C$ 半径为 2，P 为圆上一动点，连结 AP、BP，求 $AP+\frac{1}{2}BP$ 的最小值.

（1）尝试解决：为了解决这个问题，下面给出一种解题思路：如图 2，连接 CP，在 CB 上取点 D，使 $CD=1$，则有 $\frac{CD}{CP}=\frac{CP}{CB}=\frac{1}{2}$，又 $\because \angle PCD=\angle BCP$，$\therefore \triangle PCD\backsim\triangle BCP$. $\therefore \frac{PD}{BP}=\frac{1}{2}$，$\therefore PD=\frac{1}{2}BP$，$\therefore AP+\frac{1}{2}BP=AP+PD$.

请你完成余下的思考，并直接写出答案：$AP+\frac{1}{2}BP$ 的最小值为_____.

（2）自主探索：在“问题提出”的条件不变的情况下，$\frac{1}{3}AP+BP$ 的最小值为_____.

（3）拓展延伸：已知扇形 COD 中，$\angle COD=90°$，$OC=6$，$OA=3$，$OB=5$，点 P 是 $\overset{\frown}{CD}$ 上一点，求 $2PA+PB$ 的最小值.

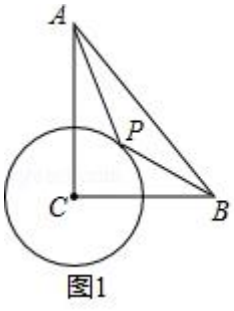


图1

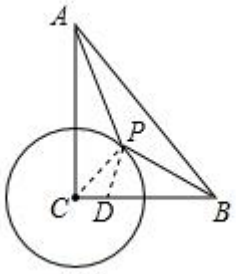


图2

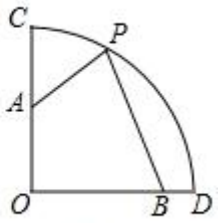


图3

【解答】（1）$\sqrt{37}$；（2）$\frac{2}{3}\sqrt{37}$；（3）13

【解析】（1）如图 1，

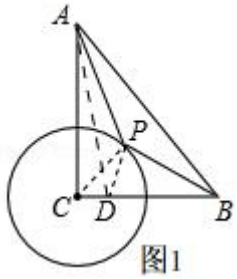


图1

连结 AD，

∵$AP+\frac{1}{2}BP=AP+PD$，要使 $AP+\frac{1}{2}BP$ 最小，

∴$AP+AD$ 最小，当点 A，P，D 在同一条直线时，$AP+AD$ 最小，

即：$AP+\frac{1}{2}BP$ 最小值为 AD，

在 $Rt\triangle ACD$ 中，$CD=1$，$AC=6$，

∴$AD=\sqrt{AC^2+CD^2}=\sqrt{37}$，

$AP+\frac{1}{2}BP$ 的最小值为 $\sqrt{37}$；

（2）如图 2，

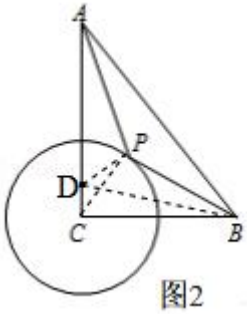


图2

连接 CP，在 CA 上取点 D，使 $CD=\frac{2}{3}$，

$\therefore \frac{CD}{CP}=\frac{CP}{CA}=\frac{1}{3}$，

$\because \angle PCD=\angle ACP$，

$\therefore \triangle PCD\backsim\triangle ACP$，

$\therefore \frac{PD}{AP}=\frac{1}{3}$，

$\therefore PD=\frac{1}{3}AP$，

$\therefore \frac{1}{3}AP+BP=BP+PD$，

$\therefore$同（1）的方法得出 $\frac{1}{3}AP+BP$ 的最小值为 $BD=\sqrt{BC^2+CD^2}=\frac{2}{3}\sqrt{37}$；

（3）如图 3，

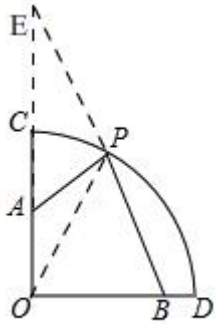


图3

延长 OA 到点 E，使 $CE=6$，

$\therefore OE=OC+CE=12$，

连接 PE、OP，

$\because OA=3$，

$\therefore \frac{OA}{OP}=\frac{OP}{OE}=\frac{1}{2}$，

$\because \angle AOP=\angle AOP$，

$\therefore \triangle OAP\backsim\triangle OPE$，

$\therefore \frac{AP}{EP}=\frac{1}{2}$，

$\therefore EP=2PA$，

$\therefore 2PA+PB=EP+PB$，

$\therefore$当 E、P、B 三点共线时，取得最小值为：$BE=\sqrt{OB^2+OE^2}=13$.