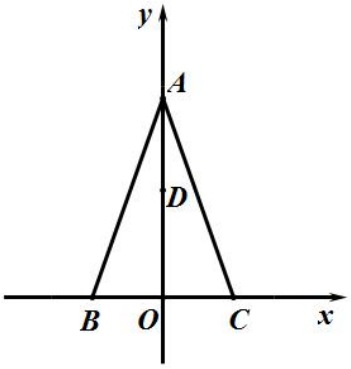
几何最值之胡不归巩固练习

1. 如图，△ABC 在直角坐标系中，$AB=AC$，$A\left(0,2\sqrt{2}\right)$，$C$（1，0），$D$ 为射线 AO 上一点，一动点 P 从 A 出发，运动路径为 $A\to D\to C$，点 P 在 AD 上的运动速度是在 CD 上的 3 倍，要使整个运动时间最少，则点 D 的坐标应为（　　）



A.（0，$\sqrt{2}$）　B.（0，$\frac{\sqrt{2}}{2}$）　C.（0，$\frac{\sqrt{2}}{3}$）　D.（0，$\frac{\sqrt{2}}{4}$）

【解答】D

【解析】假设 P 在 AD 的速度为 3，在 CD 的速度为 1，

设 D 坐标为（0，y），则 $AD=2\sqrt{2}-y$，$CD=\sqrt{y^2+1^2}=\sqrt{y^2+1}$，

$\therefore$ 设 $t=\frac{2\sqrt{2}-y}{3}+\sqrt{y^2+1}$，

等式变形为：$t+\frac{1}{3}y-\frac{2\sqrt{2}}{3}=\sqrt{y^2+1}$，则 t 的最小值时考虑 y 的取值即可，

$\therefore t^2+\left(\frac{2}{3}y-\frac{4\sqrt{2}}{3}\right)t+\left(\frac{1}{3}y-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^2=y^2+1$，

$\therefore \frac{8}{9}y^2+\left(\frac{4\sqrt{2}}{9}-\frac{2}{3}t\right)y-t^2+\frac{4\sqrt{2}}{3}t+1=0$，

$\triangle=\left(\frac{4\sqrt{2}}{9}-\frac{2}{3}t\right)^2-4\times\frac{8}{9}\left(-t^2+\frac{4\sqrt{2}}{3}t+1\right)\geqslant 0$，

$\therefore t$ 的最小值为 $\sqrt{3}$，$\therefore y=\frac{\sqrt{2}}{4}$，

∴点 D 的坐标为（0，$\frac{\sqrt{2}}{4}$），

故选 D.

解法二：假设 P 在 AD 的速度为 $3V$，在 CD 的速度为 $1V$，

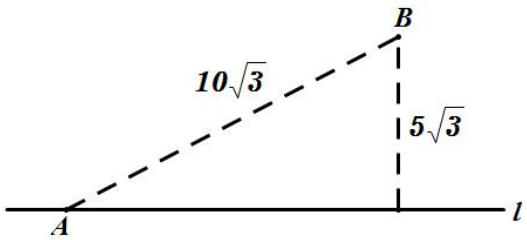
总时间 $t=\frac{AD}{3V}+\frac{CD}{V}=\frac{1}{V}\left(\frac{AD}{3}+CD\right)$，要使 t 最小，就要 $\frac{AD}{3}+CD$ 最小，

因为 $AB=AC=3$，过点 B 作 $BH\perp AC$ 交 AC 于点 H，交 OA 于 D，易证 $\triangle ADH\backsim\triangle ACO$，所以 $\frac{AC}{OC}=\frac{AD}{DH}=3$，

所以 $\frac{AD}{3}=DH$，因为 $\triangle ABC$ 是等腰三角形，所以 $BD=CD$，所以要 $\frac{AD}{3}+CD$ 最小，就是要 $DH+BD$ 最小，就要 B、D、H 三点共线就行了．因为 $\triangle AOC\backsim\triangle BOD$，所以 $\frac{AO}{OB}=\frac{OC}{OD}$，即 $\frac{2\sqrt{2}}{1}=\frac{1}{OD}$，所以 $OD=\frac{\sqrt{2}}{4}$，

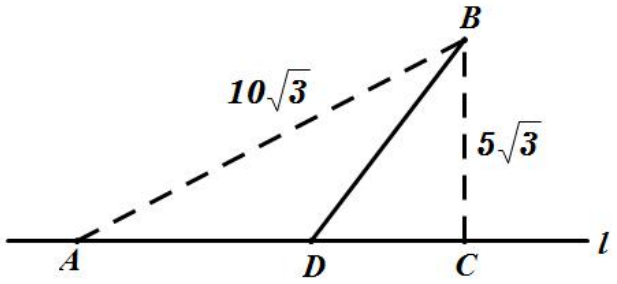
所以点 D 的坐标应为 $\left(0,\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$.

2．如图，一条笔直的公路 l 穿过草原，公路边有一消防站 A，距离公路 $5\sqrt{3}$ 千米的地方有一居民点 B，A、B 的直线距离是 $10\sqrt{3}$ 千米．一天，居民点 B 着火，消防员受命欲前往救火．若消防车在公路上的最快速度是 80 千米/小时，而在草地上的最快速度是 40 千米/小时，则消防车在出发后最快经过____小时可到达居民点 B.（友情提醒：消防车可从公路的任意位置进入草地行驶.）



【解答】$\frac{3}{8}$

【解析】如图所示，公路上行驶的路线是 AD，草地上行驶的路线是 DB，设 AD 的路程为 x 千米，



由已知条件 $AB=10\sqrt{3}$ 千米，$BC=5\sqrt{3}$ 千米，$BC\perp AC$，知

$AC=\sqrt{AB^2-BC^2}=15$ 千米.

则 $CD=AC-AD=$（15 - x）千米，

$BD=\sqrt{CD^2+BC^2}=\sqrt{\left(5\sqrt{3}\right)^2+(15-x)^2}\,km$，

设走的行驶时间为 y，则 $y=\frac{x}{80}=\frac{\sqrt{75+(15-x)^2}}{40}$.

整理为关于 x 的一元二次方程得

$3x^2+$（$160y$ - 120）x - $6400y^2+1200=0$.

因为 x 必定存在，所以△$\geqslant$0. 即

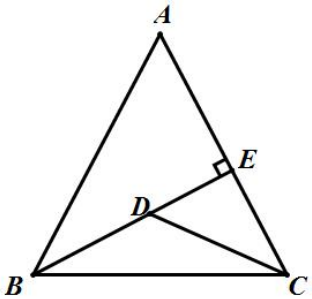
（$160y$ - 120）^{2} - 4×3×（1200 - $6400y^2$）$\geqslant$0.

化简得 $102400y^2$ - $38400y\geqslant 0$.

解得 $y\geqslant\frac{3}{8}$，

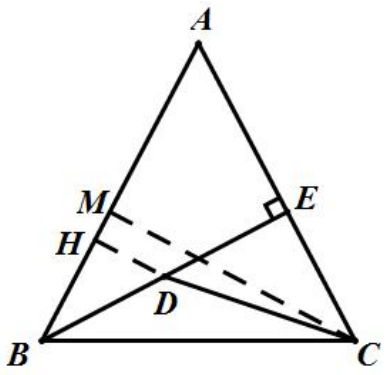
即消防车在出发后最快经过 $\frac{3}{8}$ 小时可到达居民点 B.

3. 如图，在△ABC中，$AB=AC=10$，$\tan A=2$，$BE\perp AC$于点E，D是线段BE上的一个动点，则$CD+\frac{\sqrt{5}}{5}BD$的最小值是_____.



【解答】$4\sqrt{5}$

【解析】如图，作 $DH\perp AB$ 于 H，$CM\perp AB$ 于 M.



$\because BE\perp AC$，$\therefore \angle AEB=90°$，

$\therefore \tan A=\dfrac{BE}{AE}=2$

设 $AE=a$，$BE=2a$，

则有：$100=a^2+4a^2$，$\therefore a^2=20$，

$\therefore a=2\sqrt{5}$ 或 $-2\sqrt{5}$（舍）

$\therefore BE=2a=4\sqrt{5}$,

$\because AB=AC$，$BE\perp AC$，$CM\perp AB$，

$\therefore CM=BE=4\sqrt{5}$，

$\because \angle DBH=\angle ABE$，$\angle BHD=\angle BEA$，

$\therefore$

$\therefore \sin\angle DBH=\dfrac{DH}{BD}=\dfrac{AE}{AB}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$,

$\therefore DH=\dfrac{\sqrt{5}}{5}BD$,

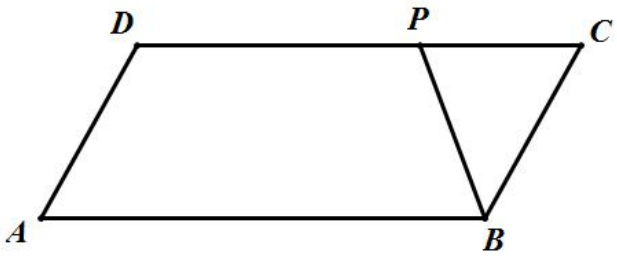
$\therefore CD+\dfrac{\sqrt{5}}{5}BD=CD+DH$，

$\therefore CD+DH\geq CM$，

$\therefore CD+\dfrac{\sqrt{5}}{5}BD\geqslant 4\sqrt{5}$,

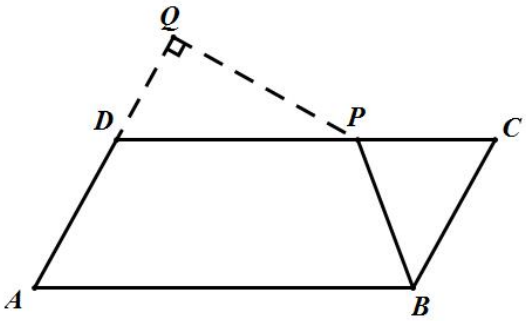
$CD+\dfrac{\sqrt{5}}{5}BD$ 的最小值为 $4\sqrt{5}$.

3. 如图，平行四边形 $ABCD$ 中，$\angle DAB=60°$，$AB=6$，$BC=2$，P 为边 CD 上的一动点，则 $PB+\frac{\sqrt{3}}{2}PD$ 的最小值等于_____.



【解答】$3\sqrt{3}$

过点 P 作 $PQ\perp AD$，垂足为 Q，



∵四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

∴$DC//AB$，

∴$\angle QDP=\angle DAB=60°$，

$\therefore PQ=PD\cdot\sin\angle QDP=\frac{\sqrt{3}}{2}PD$，

$\therefore PB+\frac{\sqrt{3}}{2}PD=BP+PQ$,

∴当点 B、P、Q 三点共线时，$PB+\frac{\sqrt{3}}{2}PD$ 有最小值，

$\therefore PB+\frac{\sqrt{3}}{2}PD$ 的最小值为 $AB\cdot\sin 60°=3\sqrt{3}$.

5. 如图，在平面直角坐标系中，二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象经过点 $A(-1,0),B\left(0,-\sqrt{3}\right)$，$C(2,0)$，其对称轴与 x 轴交于点 D

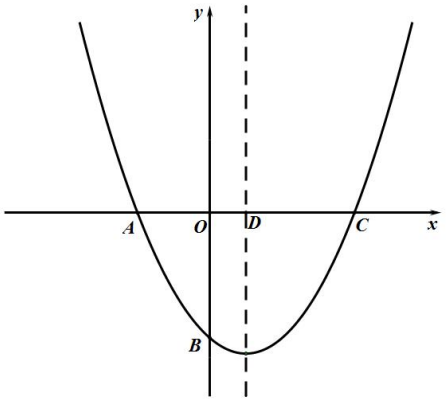
（1）求二次函数的表达式及其顶点坐标；

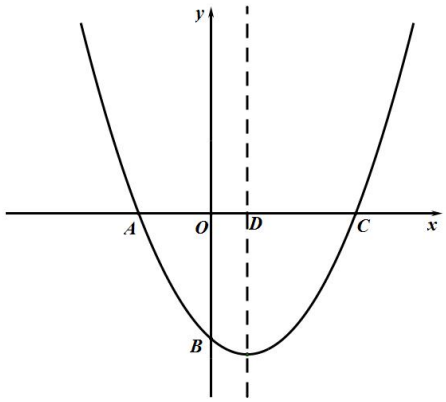
（2）若 P 为 y 轴上的一个动点，连接 PD，则 $\frac{1}{2}PB+PD$ 的最小值为____；

（3）M（x，t）为抛物线对称轴上一动点

①若平面内存在点 N，使得以 A，B，M，N 为顶点的四边形为菱形，则这样的点 N 共有____个；

②连接 MA，MB，若 $\angle AMB$ 不小于 60°，求 t 的取值范围．





备用图

【解答】(1) $y=\frac{\sqrt{3}}{2}x^2-\frac{\sqrt{3}}{2}x-\sqrt{3}$，$\left(\frac{1}{2},-\frac{9\sqrt{3}}{8}\right)$；(2) $\frac{3\sqrt{3}}{4}$；(3)①5 个，②t 的取值范围 $\frac{-2\sqrt{3}-39}{6}$ $\leqslant t\leqslant$ $\frac{-2\sqrt{3}+39}{6}$

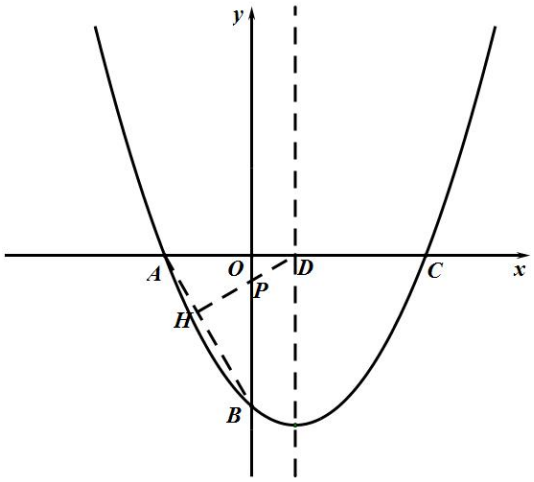
【解析】（1）由题意 $\begin{cases}a-b+c=0\\ c=\sqrt{3}\\ 4a+2b+c=0\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=\frac{\sqrt{3}}{2}\\ b=-\frac{\sqrt{3}}{2}\\ c=\sqrt{3}\end{cases}$，

∴抛物线解析式为 $y=\frac{\sqrt{3}}{2}x^2-\frac{\sqrt{3}}{2}x-\sqrt{3}$，

∵ $y=\frac{\sqrt{3}}{2}x^2-\frac{\sqrt{3}}{2}x-\sqrt{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{9\sqrt{3}}{8}$，

∴顶点坐标 $\left(\frac{1}{2},-\frac{9\sqrt{3}}{8}\right)$．

（2）如图，连接 AB，作 $DH\perp AB$ 于 H，交 OB 于 P，此时 $\frac{1}{2}PB+PD$ 最小．



理由：∵$OA=1$，$OB=\sqrt{3}$，

∴$\tan\angle ABO=\frac{OA}{OB}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，

∴$\angle ABO=30°$，

∴$PH=\frac{1}{2}PB$，

∴$\frac{1}{2}PB+PD=PH+PD=DH$，

∴此时$\frac{1}{2}PB+PD$最短（垂线段最短）．

在$Rt\triangle ADH$中，∵$\angle AHD=90°$，$AD=\frac{3}{2}$，$\angle HAD=60°$，

∴$\sin 60°=\frac{DH}{AD}$，

∴$DH=\frac{3\sqrt{3}}{4}$，

∴$\frac{1}{2}PB+PD$的最小值为$\frac{3\sqrt{3}}{4}$；

（3）①以A为圆心AB为半径画弧与对称轴有两个交点，

以B为圆心AB为半径画弧与对称轴也有两个交点，

线段AB的垂直平分线与对称轴有一个交点，

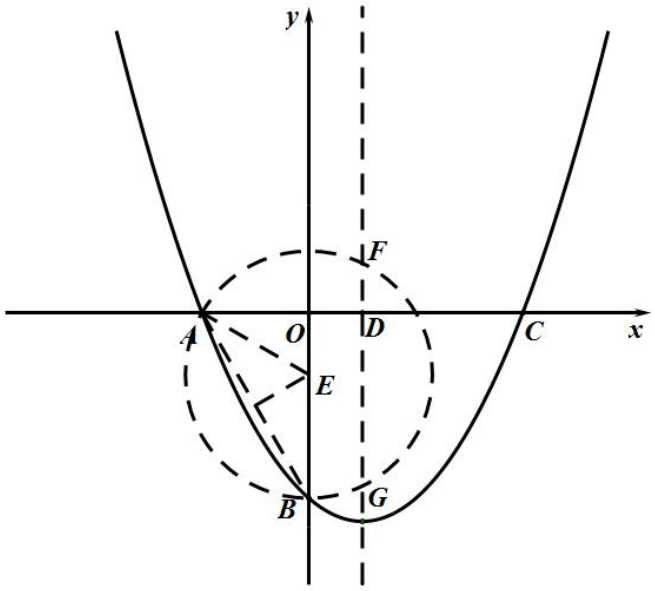
所以满足条件的点M有5个，即满足条件的点N也有5个，

②如图，$Rt\triangle AOB$中，∵$\tan\angle ABO=\frac{OA}{OB}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，∴$\angle ABO=30°$，

作AB的中垂线与y轴交于点E，连接EA，则$\angle AEB=120°$，

以 E 为圆心，EB 为半径作圆，与抛物线对称轴交于点 F、G.

则 $\angle AFB=\angle AGB=60°$，从而线段 FG 上的点满足题意，



$\because EB=\dfrac{\frac{AB}{2}}{\cos 30°}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$,

$\therefore OE=OB-EB=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$,

$\because F\left(\dfrac{1}{2},t\right)$，$EF^2=EB^2$,

$\therefore\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(t+\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)^2=\left(\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2$,

解得 $t=\dfrac{-2\sqrt{3}+39}{6}$ 或 $t=\dfrac{-2\sqrt{3}-39}{6}$,

故 $F\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{-2\sqrt{3}+39}{6}\right)$，$G\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{-2\sqrt{3}-39}{6}\right)$,

$\therefore t$ 的取值范围 $\dfrac{-2\sqrt{3}-39}{6}\leqslant t\leqslant\dfrac{-2\sqrt{3}+39}{6}$.