几何最值之瓜豆原理知识精讲

初中数学有一类动态问题叫做主从联动，这类问题应该说是非常出题，好多优秀老师都在研究它，原因是它在很多名校模考的时候经常出现，有的老师叫他瓜豆原理，个人理解可能是种瓜得瓜种豆得豆的意思吧，主动点运动的轨迹是什么，则从动点的轨迹就是什么。也有的老师叫他旋转相似，或者手拉手。我感觉这类问题在解答的时候需要有轨迹思想，就是先要明确主动点的轨迹，然后要搞清楚主动点和从动点的关系，进而确定从动点的轨迹来解决问题，但在解答问题时，要符合解不超纲的原则，所以最后解决问题还是用到了旋转相似的知识，也就是动态手拉手模型，下面整理一些题目来集中训练一下这类题目，希望对你能有所帮助.

涉及的知识和方法：

知识：①相似；②三角形的两边之和大于第三边；③点到直线之间的距离垂线段最短；④点到圆上点共线有最值。

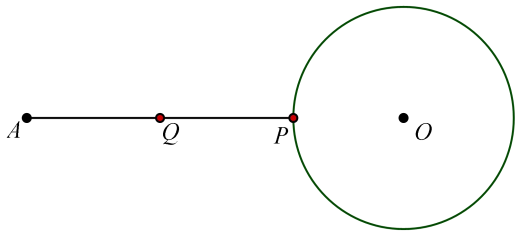
方法：第一步：找主动点的轨迹 ；第二步：找从动点与主动点的关系；第三步：找主动点的起点和终点；第四步：通过相似确定从动点的轨迹，第五步：根据轨迹确定点线、点圆最值

在此类题目中，题目或许先描述的是主动点 P，但最终问题问的可以是另一点 Q（*从动点*），根据 P、Q 之间存在某种联系，从 P 点出发探讨 Q 点运动轨迹并求出最值。

一、轨迹之圆篇

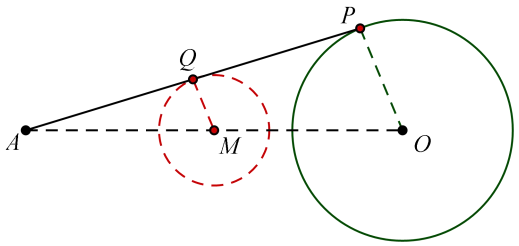
例 1：如图，P 是圆 O 上一个动点，A 为定点，连接 AP，Q 为 AP 中点.

考虑：当点 P 在圆 O 上运动时，Q 点轨迹是？



分析观察动图可知点 Q 轨迹是个圆，而我们还需确定的是此圆与圆 O 有什么关系？

考虑到 Q 点始终为 AP 中点，连接 AO，取 AO 中点 M，则 M 点即为 Q 点轨迹圆圆心，半径 MQ 是 OP 一半，任意时刻，均有$\triangle AMQ\backsim\triangle AOP$，$QM:PO=AQ:AP=1:2$.



结论：确定 Q 点轨迹圆即确定其圆心与半径，

由 A、Q、P 始终共线可得：A、M、O 三点共线，

由 Q 为 AP 中点可得：$AM=1/2AO$.

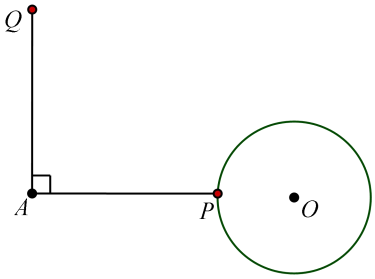
Q 点轨迹相当于是 P 点轨迹成比例缩放.

根据动点之间的相对位置关系分析圆心的相对位置关系；

根据动点之间的数量关系分析轨迹圆半径数量关系.

例 2：如图，P 是圆 O 上一个动点，A 为定点，连接 AP，作 $AQ\perp AP$ 且 $AQ=AP$.

考虑：当点 P 在圆 O 上运动时，Q 点轨迹是？

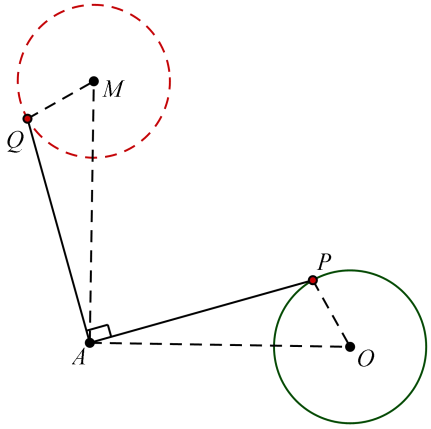


分析 Q 点轨迹是个圆，可理解为将 AP 绕点 A 逆时针旋转 90°得 AQ，故 Q 点轨迹与 P 点轨迹都是圆．接下来确定圆心与半径.

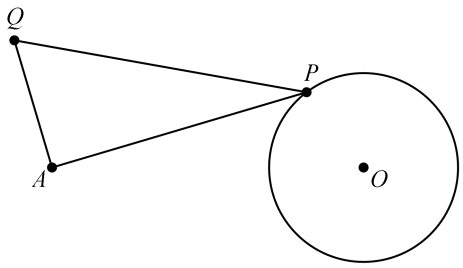
考虑 $AP\perp AQ$，可得 Q 点轨迹圆圆心 M 满足 $AM\perp AO$；

考虑 $AP=AQ$，可得 Q 点轨迹圆圆心 M 满足 $AM=AO$，且可得半径 $MQ=PO$.

即可确定圆 M 位置，任意时刻均有$\triangle APO\cong\triangle AQM$.



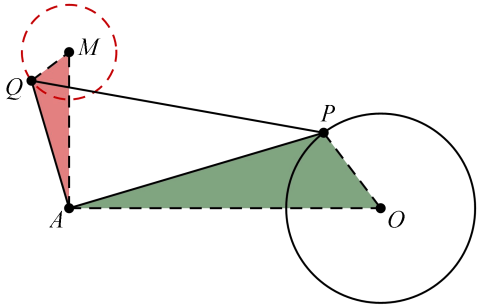
例 3：如图，$\triangle APQ$ 是直角三角形，$\angle PAQ=90°$ 且 $AP=2AQ$，当 P 在圆 O 运动时，Q 点轨迹是？



分析考虑 $AP\perp AQ$，可得 Q 点轨迹圆圆心 M 满足 $AM\perp AO$；

考虑 $AP:AQ=2:1$，可得 Q 点轨迹圆圆心 M 满足 $AO:AM=2:1$.

即可确定圆 M 位置，任意时刻均有 $\triangle APO\backsim\triangle AQM$，且相似比为 2.



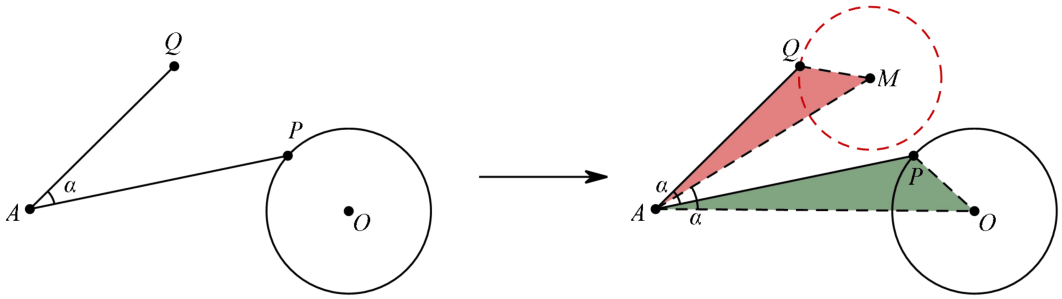
模型总结

为了便于区分动点 P、Q，可称点 P 为“主动点”，点 Q 为“从动点”.

此类问题的必要条件：两个定量

主动点、从动点与定点连线的夹角是定量（$\angle PAQ$ 是定值）；

主动点、从动点到定点的距离之比是定量（$AP:AQ$ 是定值）.



结论（1）主、从动点与定点连线的夹角等于两圆心与定点连线的夹角：

$\angle PAQ=\angle OAM$；

（2）主、从动点与定点的距离之比等于两圆心到定点的距离之比：

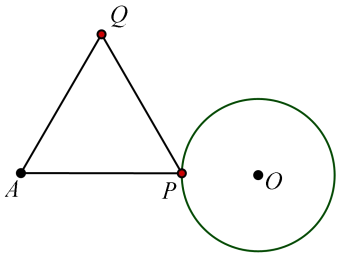
$AP:AQ=AO:AM$ ，也等于两圆半径之比.

按以上两点即可确定从动点轨迹圆，Q 与 P 的关系相当于旋转+伸缩.

古人云：种瓜得瓜，种豆得豆.“种”圆得圆，“种”线得线，谓之“瓜豆原理”.

思考 1：如图，P 是圆 O 上一个动点，A 为定点，连接 AP，以 AP 为一边作等边$\triangle APQ$.

考虑：当点 P 在圆 O 上运动时，Q 点轨迹是？

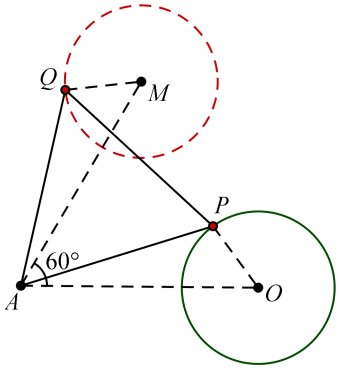


分析 Q 点满足（1）$\angle PAQ=60°$；（2）$AP=AQ$，故 Q 点轨迹是个圆：

考虑 $\angle PAQ=60°$，可得 Q 点轨迹圆圆心 M 满足 $\angle MAO=60°$；

考虑 $AP=AQ$，可得 Q 点轨迹圆圆心 M 满足 $AM=AO$，且可得半径 $MQ=PO$.

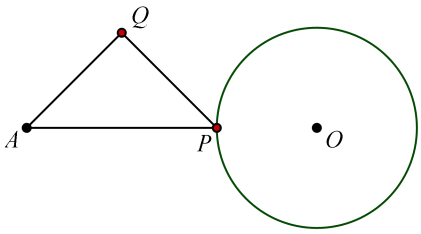
即可确定圆 M 位置，任意时刻均有$\triangle APO\cong\triangle AQM$.



小结可以理解 AQ 由 AP 旋转得来，故圆 M 亦由圆 O 旋转得来，旋转角度与缩放比例均等于 AP 与 AQ 的位置和数量关系.

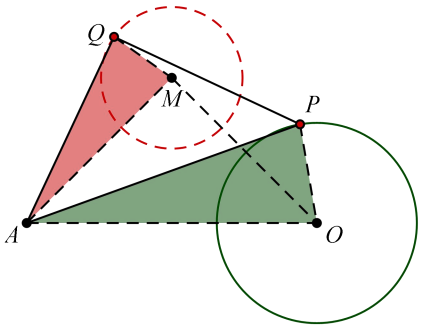
思考 2 如图，P 是圆 O 上一个动点，A 为定点，连接 AP，以 AP 为斜边作等腰直角$\triangle APQ$.

考虑：当点 P 在圆 O 上运动时，如何作出 Q 点轨迹？



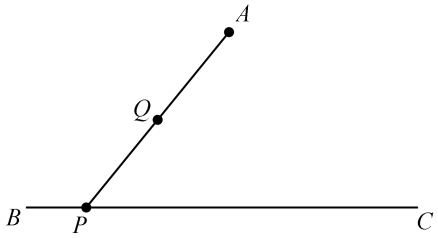
分析 Q 点满足（1）$\angle PAQ=45°$；（2）$AP:AQ=\sqrt{2}:1$，故 Q 点轨迹是个圆.

连接 AO，构造$\angle OAM=45°$且 $AO:AM=\sqrt{2}:1$．M 点即为 Q 点轨迹圆圆心，此时任意时刻均有$\triangle AOP\backsim\triangle AMQ$．即可确定点 Q 的轨迹圆.



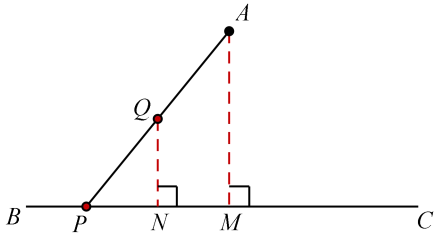
二、轨迹之线段篇

引例：如图，P 是直线 BC 上一动点，连接 AP，取 AP 中点 Q，当点 P 在 BC 上运动时，Q 点轨迹是？

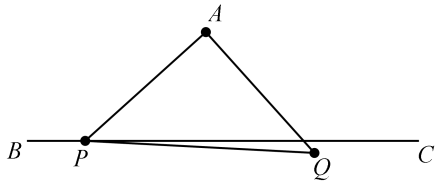


分析当 P 点轨迹是直线时，Q 点轨迹也是一条直线.

可以这样理解：分别过 A、Q 向 BC 作垂线，垂足分别为 M、N，在运动过程中，因为 $AP=2AQ$，所以 QN 始终为 AM 的一半，即 Q 点到 BC 的距离是定值，故 Q 点轨迹是一条直线.

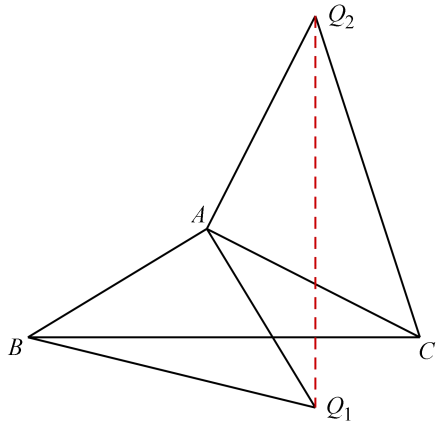


引例如图，$\triangle APQ$ 是等腰直角三角形，$\angle PAQ=90°$ 且 $AP=AQ$，当点 P 在直线 BC 上运动时，求 Q 点轨迹？



分析当 AP 与 AQ 夹角固定且 AP:AQ 为定值的话，P、Q 轨迹是同一种图形.

当确定轨迹是线段的时候，可以任取两个时刻的 Q 点的位置，连线即可，比如 Q 点的起始位置和终点位置，连接即得 Q 点轨迹线段.



模型总结

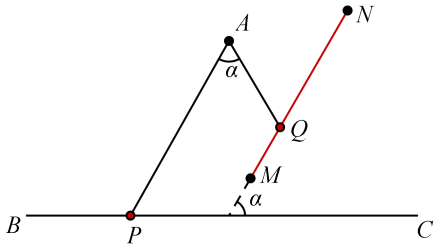
必要条件：

主动点、从动点与定点连线的夹角是定量（$\angle PAQ$ 是定值）；

主动点、从动点到定点的距离之比是定量（$AP:AQ$ 是定值）.

结论：

P、Q 两点轨迹所在直线的夹角等于 $\angle PAQ$（当 $\angle PAQ \leqslant 90°$ 时，$\angle PAQ$ 等于 MN 与 BC 夹角）



P、Q 两点轨迹长度之比等于 $AP:AQ$（由 $\triangle ABC \backsim \triangle AMN$，可得 $AP:AQ=BC:MN$）

